

বিসমিল্লাহির রাহমানির রাহিম

গণিত সমাধান

নবম-দশম শ্রেণি



MyMahbub.Com



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

PDF বইয়ের অনলাইন লাইব্রেরী

MyMahbub.Com

PDF MADE BY:

MyMahbub.Com

নামাজ! নামাজ!! নামাজ!!!

একটু গভীরভাবে ভেবে দেখুন ১দিন যাচ্ছে মানেই-

আমাদের মৃত্যু আরো ১দিন কাছে চলে আসলো

আজরাঙ্গিল (আ:) একদিন আসবেই আসবে

আল্লাহর কাছে প্রতিটা দিনের হিসাব দিতেই হবে

অন্ততপক্ষে দৈনিক ৫ ওয়াক্ত নামাজ যাতে

কোনোভাবেই কোনোভাবেই মিস না হয়

আজকের কোন ওয়াক্ত নামাজ মিস হয়নি তো?

অফিসে, বাসায়, রাস্তায় সবসময়ই মনে রাখবেনঃ

আল্লাহ সব দেখতেছে সব

২ কাঁধে ২ ফেরেশতা যাবতীয় কর্মের হিসাব রাখতেছে

BCS, BANK +

অন্যান্য সরকারী চাকরির বই

ইসলামী বই

বোর্ড বই, গণিত সমাধান

আপডেট চাকরির প্রশ্নের সমাধান

প্রতি মাসের Current Affairs

আরো অনেক বই

ওয়াজ, গজল, ইসলামী সংগীত

এককথায় প্রয়োজনীয় সব এখানে পাবেনঃ

MyMahbub.Com

imo number: **01836672102** (মাহবুব)

All kinds of PDF free download: MyMahbub.Com

নিঃসন্দেহে আল্লাহর কাছে গ্রহণযোগ্য একমাত্র জীবনব্যবস্থা হলো ইসলাম
(সূরা আল ইমরান, আয়াত-১৯)

সূচিপত্র

Chapter Page

1-----	5
2-----	19
3-----	32
4-----	63
5-----	75
6-----	91
7-----	103
8-----	116
9-----	140
10-----	156

Chapter Page

11-----	164
12-----	181
13-----	203
14-----	222
15-----	239
16-----	245
17-----	272



বাস্তব সংখ্যা

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- বাস্তব সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করে আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।
- অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সদৃশ ও বিসদৃশ দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



স্বাভাবিক সংখ্যা : 1, 2, 3, 4,..... ইত্যাদি সংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলে। 2, 3, 5, 7,..... ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যা এবং 4, 6, 8, 9,..... ইত্যাদি যৌগিক সংখ্যা।

পূর্ণসংখ্যা : শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। অর্থাৎ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,..... ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

ভগ্নাংশ সংখ্যা : p, q পরস্পর সহমৌলিক, $q \neq 0$ এবং $q \neq 1$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে ভগ্নাংশ সংখ্যা বলে। যেমন : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশ সংখ্যা।

$p < q$ হলে ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $p > q$ হলে ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ইত্যাদি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং

$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ ইত্যাদি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

মূলদ সংখ্যা : p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়। যেমন : $\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2} = 5.5, \frac{5}{3} = 1.666\dots$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা। মূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং সকল পূর্ণসংখ্যা এবং সকল ভগ্নাংশ সংখ্যা হবে মূলদ সংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যা : যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। পূর্ণবর্গ নয় এরূপ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল একটি অমূলদ সংখ্যা। যেমন :

$$\sqrt{2} = 1.414213\dots, \sqrt{3} = 1.732\dots$$

$\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.58113\dots$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা : মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করা হলে তাকে দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন,

$$3 = 3 \cdot 0, \frac{5}{2} = 2 \cdot 5, \frac{10}{3} = 3 \cdot 3333\dots, \sqrt{3} = 1 \cdot 732\dots$$

ইত্যাদি দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। দশমিক ক্রিদ্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা সসীম হলে, এদেরকে সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং অঙ্ক সংখ্যা অসীম হলে, এদেরকে অসীম দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন, 0.52, 3.4152 ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং 1.333....., 2.123512367..... ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা। আবার, অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলোর মধ্যে দশমিক ক্রিদ্দুর পর অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি হলে, তাদেরকে অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি না হলে তাদের অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা বলা হয়। যেমন, 1.2323....., 5.654 ইত্যাদি অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং 0.523050056....., 2.12340314..... ইত্যাদি অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

বাস্তব সংখ্যা : সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। যেমন :

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{4}{3}, \dots$$

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$$

$$1.23, 0.415, 1.3333\dots, 0.62, 4.120345061\dots$$

ধনাত্মক সংখ্যা : শূন্য অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যাকে ধনাত্মক সংখ্যা বলা হয়। যেমন,

1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, 0.415, 0.62, 4.120345061.....

ইত্যাদি ধনাত্মক সংখ্যা।

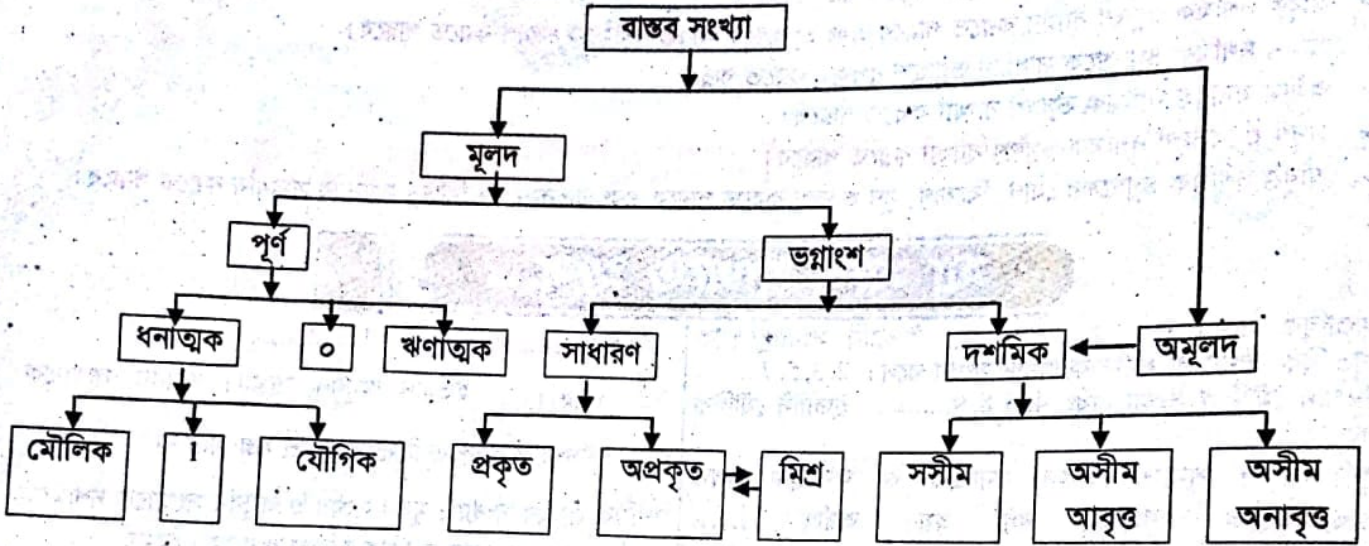
ঋণাত্মক সংখ্যা : শূন্য অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাকে ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\sqrt{2}$, -0.415, -0.62, -4.120345061..... ইত্যাদি ঋণাত্মক সংখ্যা।

অঋণাত্মক সংখ্যা : শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যাকে অঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন, 0, 3, $\frac{1}{2}$, 0.612, 1.3, 2.120345..... ইত্যাদি অঋণাত্মক সংখ্যা।

বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস



পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : $\frac{3}{4}$, 5, -7, $\sqrt{13}$, 0, 1, $\frac{9}{7}$, 12, $2\frac{4}{5}$, 1.1234....., .323

সংখ্যাগুলোকে বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে অবস্থান দেখাও।

[পৃষ্ঠা- 8]

সমাধান : নিচে প্রদত্ত সংখ্যাগুলোকে বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে অবস্থান দেখানো হলো-

$\frac{3}{4}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

5 একটি মূলদ সংখ্যা।

-7 একটি পূর্ণ সংখ্যা।

$\sqrt{13}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

0 একটি পূর্ণ সংখ্যা।

1 একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\frac{9}{7}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

12 একটি মূলদ সংখ্যা।

$2\frac{4}{5}$ একটি সাধারণ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ সংখ্যা।

1.1234..... একটি অমূলদ সংখ্যা।

.323 একটি মূলদ সংখ্যা।

□ কাজ : প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। [পৃষ্ঠা-৬]

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 3 < 4$

$$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$$

$$\text{বা, } 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\text{প্রমাণ : } 1^2 = 1, \sqrt{3}^2 = 3, 2^2 = 4$$

সুতরাং $\sqrt{3}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 2 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{3}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{3}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

ধরি, $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

$$\text{বা, } 3 = \frac{p^2}{q^2}; [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 3q = \frac{p^2}{q} [\text{উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে}]$$

স্পষ্টত : $3q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু, $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

$\therefore 3q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $3q \neq \frac{p^2}{q}$

$\sqrt{3}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারে কোন সংখ্যা হতে পারে না, অর্থাৎ

$$\sqrt{3} \neq \frac{p}{q}$$

$\therefore \sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

□ কাজ : 1.723, 5.2333..., 0.0025, 2.1356127..., 0.0105105 এবং 0.450123..... ভগ্নাংশগুলোকে কারণসহ শ্রেণিবিন্যাস কর। [পৃষ্ঠা-৬]

সমাধান : 1.723 ভগ্নাংশটি একটি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক রয়েছে।

5.2333..... ভগ্নাংশটি একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলোর অঙ্কবিশেষ বার বার রয়েছে।

0.0025 ভগ্নাংশটি একটি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক রয়েছে।

2.1356124..... ভগ্নাংশটি একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম নয় বা অঙ্কবিশেষ বারবার আসেনি। একে অমূলদ সংখ্যাও বলা হয়।

0.0105105..... ভগ্নাংশটি একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম নয় এবং অঙ্কবিশেষ বার বার রয়েছে। একে মূলদ সংখ্যাও বলা হয়।

0.450123..... ভগ্নাংশটি একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ, কারণ দশমিক চিহ্নের ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম নয় বা অঙ্কবিশেষ বার বার আসেনি। একে অমূলদ সংখ্যাও বলা হয়।

□ কাজ : 0.41 এবং 3.04623 কে ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

[পৃষ্ঠা-১০]

সমাধান : 0.41

এখানে, $0.41 = 0.414141.....$

সুতরাং, $0.41 \times 100 = 41.4141$

এবং, $0.41 \times 1 = 41$

(-) করে, $0.41 \times 99 = 41$

অতএব, $0.41 = \frac{41}{99}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{41}{99}$

এবং 3.4623

এখানে, $3.04623 = 3.04623623$

সুতরাং $3.04623 \times 100000 = 304623.623$

$3.04623 \times 100 = 304.623623$

(-) করে, $3.04623 \times 99900 = 304623 - 304$

বা, $3.04623 = \frac{304319}{99900}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{304319}{99900}$

□ কাজ : 0.012 এবং 3.3124 কে ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

[পৃষ্ঠা-১১]

সমাধান : $0.012 = \frac{12}{990} = \frac{2}{165}$

$3.3124 = \frac{33124 - 331}{9900} = \frac{32793}{9900} = \frac{10931}{3300}$

□ কাজ : 3.467, 2.01243 এবং 7.5256 কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন কর।

[পৃষ্ঠা-১২]

সমাধান : 3.467 এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ০

2.01243 এ " " " " 2 এবং " " " " 3

7.5256 এ " " " " 2 এবং " " " " 2

এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2, 3 এর ল.সা.গু. 6। অর্থাৎ ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন করতে হলে, অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্কের সংখ্যা হবে 6।

∴ $3.467 = 3.467000000$

$2.01243 = 2.012432432$

$7.5256 = 7.525656565$

□ কাজ : যোগ কর :

[পৃষ্ঠা-১৪]

১। 2.097 ও 5.12768

সমাধান : ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 ল.সা.গু. 6।

এখন দুটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে যোগ করা হলো :

$2.097 = 2.0979797979$

$5.12768 = 5.1276876876$

$= 7.2256674855$

∴ নির্ণেয় যোগফল = 7.22566748

২। 1.345, 0.31576 ও 0.05678

সমাধান: এখানে দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 1, 3, 2 এর ল.সা.গু. 6। এখন আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে যোগ করা হলো—

$$\begin{array}{r} 1.345 = 1.34555555 | 55 \\ 0.31576 = 0.315765765 | 76 \\ 0.05678 = 0.056787878 | 78 \\ \hline = 9.718109200 | 09 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় যোগফল = 9.718109200

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা-১৫]

১। 13.12784 থেকে 10.418 বিয়োগ কর।

সমাধান: এখানে দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 3। এখন আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে বিয়োগ করা হলো—

$$\begin{array}{r} 13.12784 = 13.127847 | 84 \\ 10.418 = 10.418000 | 00 \\ \hline = 2.709847 | 84 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় যোগফল = 2.709847

২। 230394 থেকে 9.2645

সমাধান: এখানে দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করতে হলে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। এখন আবৃত্ত দশমিকগুলোকে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করে বিয়োগ করা হলো—

$$\begin{array}{r} 23.0394 = 23.03949494 | 94 \\ 9.12645 = 9.12645645 | 64 \\ \hline = 13.91303849 | 30 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় যোগফল = 13.91303849

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা-১৬]

১। 1.13 কে 2.6 দ্বারা গুণ কর।

সমাধান: $1.13 = \frac{113 - 11}{90} = \frac{102}{90}$

$$2.6 = \frac{26}{10}$$

$$\therefore 1.13 \times 2.6 = \frac{102}{90} \times \frac{26}{10} = \frac{2652}{900} = 2.9466... = 2.946$$

২। $0.2 \times 1.12 \times 0.081 =$ কত?

সমাধান: $0.2 \times 1.12 \times 0.081$
 $= \frac{2}{9} \times \frac{112 - 1}{99} \times \frac{81}{990}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{9} \times \frac{111}{99} \times \frac{81}{990} \\ &= \frac{1111}{5445} \\ &= 0.0203856 \dots \end{aligned}$$

[পৃষ্ঠা-১৭]

□ কাজ :

১। 0.6 কে 0.9 দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান: $0.6 \div 0.9$

এখানে, $0.6 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ এবং $0.9 = \frac{9}{9} = 1$

$$\therefore 0.6 \div 0.9 = \frac{2}{3} \div 1 = \frac{2}{3}$$

২। 0.732 কে 0.027 দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান: $0.732 = \frac{732 - 7}{990}$
 $= \frac{725}{990} = \frac{145}{198}$

এবং $0.027 = \frac{27}{990}$

$$0.732 \div 0.027 = \frac{145}{198} \div \frac{27}{990} = \frac{145}{198} \times \frac{990}{27}$$

$$= \frac{145}{198} \times \frac{110}{3}$$

$$= \frac{725}{27}$$

$$= 26.851851 \dots$$

$$= 26.851$$

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা-১৮]

১। 29 এর বর্গমূল নির্ণয় কর এবং বর্গমূলকে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

সমাধান: 5) 29 (5.3851.....

$$\begin{array}{r} 25 \\ 103 \overline{) 400} \\ \underline{309} \\ 1068 \\ \underline{9100} \\ 10765 \\ \underline{8544} \\ 10765 \\ \underline{55600} \\ 107701 \\ \underline{53825} \\ 107701 \\ \underline{177500} \\ 107701 \\ \underline{107701} \\ 69799 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল 5.3851....

নির্ণেয় দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 5.38

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 5.39

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ- ১। $\sqrt{3}$ এবং ৪ এর মধ্যে দুটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: $\sqrt{3}$ এবং ৪ এর মধ্যে দুটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, $\sqrt{3} = ১.৭৩২০৫০৮.....$

মনে করি, $a = ২.০৩০০৩৩০০০৩৩৩.....$

এবং $b = ২.৫০৫৫০০৫৫৫.....$

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই অপেক্ষা বড় এবং ৪ অপেক্ষা ছোট।

অর্থাৎ $\sqrt{3} < ২.০৩০০৩৩০০৩৩৩..... < ৪$

এবং $\sqrt{3} < ২.৫০৫৫০০৫৫৫..... < ৪$

আবার, a ও b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

∴ a ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

প্রতিজ্ঞা : $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 2 < 4$

$$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

$$\text{বা, } 1 < \sqrt{2} < 2$$

প্রমাণ : $1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $2^2 = 4$

সুতরাং $\sqrt{2}$ এর মান ১ অপেক্ষা বড় এবং ২ অপেক্ষা ছোট।

অতএব $\sqrt{2}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

∴ $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে

ধরি, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

বা, $2 = \frac{p^2}{q^2}$; বর্গ করে

বা, $2q = \frac{p^2}{q}$; উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে।

স্পষ্টত : $2q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

∴ $2q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $2q \neq \frac{p^2}{q}$

∴ $\sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না,

অর্থাৎ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$

∴ $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা (প্রমাণিত)

উদাহরণ- ৮। ৩২.৩৪৭৮ কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $৩২.৩৪৭৮ = ৩২.৩৪৭৮৭৮.....$

সুতরাং, $৩২.৩৪৭৮ \times 10000 = ৩২.৩৪৭৮৭৮ \dots \times 10000 = ৩২৩৪৭৮.৭৮৭৮$

এবং $৩২.৩৪৭৮ \times 100 = ৩২.৩৪৭৮৭৮ \dots \times 100 = ৩২৩৪.৭৮৭৮$

বিয়োগ করে, $৩২.৩৪৭৮ \times 9900 = ৩২৩৪৭৮ - ৩২৩৪$

অতএব, $৩২.৩৪৭৮ = \frac{৩২৩৪৭৮ - ৩২৩৪}{9900} = \frac{৪১৯২৪৪}{9900} = \frac{৩৪৯৩৭}{৮২৫} = ৪২\frac{২৮৭}{৮২৫}$

উদাহরণ- ২। প্রমাণ কর যে, কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে ১ যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

সমাধান: মনে করি, চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা যথাক্রমে $x, x+1, x+2, x+3$

ক্রমিক সংখ্যা চারটির গুণফলের সাথে ১ যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x(x+3)(x+1)(x+2)+1$$

$$= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$

$$= a(a+2)+1; [x^2+3x=a \text{ ধরে}]$$

$$= a^2+2a+1 = (a+1)^2 = (x^2+3x+1)^2; \text{ যা একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা।}$$

∴ যে কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে ১ যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে। (প্রমাণিত)

উদাহরণ- ৩। $\frac{3}{11}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান:

$$11 \overline{) 30} (0.2727$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{80} \\ 77 \\ \underline{30} \\ 22 \\ \underline{80} \\ 77 \\ \underline{3} \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ} = 0.2727..... = 0.27$$

উদাহরণ- ৪। $\frac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান:

$$37 \overline{) 95} (2.56756$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \underline{210} \\ 185 \\ \underline{250} \\ 222 \\ \underline{280} \\ 259 \\ \underline{210} \\ 185 \\ \underline{250} \\ 222 \\ \underline{28} \end{array}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ} = 2.56756..... = 2.567$$

উদাহরণ- ১১ 5.23457 কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $5.23457 = 5.23457457457 \dots$

সুতরাং $5.23457 \times 100000 = 523457.457457$

এবং $5.23457 \times 100 = 523.457457$

বিয়োগ করে, $5.23457 \times 99900 = 522943$

অতএব, $5.23457 = \frac{522934}{99900} = \frac{261467}{49950}$

\therefore নির্ণেয় ভগ্নাংশ $\frac{261467}{49950}$

উদাহরণ- ১৩ 1.7643, 3.24 ও 2.78346 কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন কর।

সমাধান: 1.7643 এ অনাবৃত্ত অঙ্ক বলতে দশমিক বিন্দুর পরের ৪টি অঙ্ক, এখানে আবৃত্ত অংশ নেই।
3.24 এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ০ এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ২;
2.78346 এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ২ এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ৩।
এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো ৪ এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা ২ ও ৩ এর ল.সা.গু হলো ৬।
প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে ৪ এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে ৬।

$\therefore 1.7643 = 1.7643000000,$

3.24

$= 3.2424242424$

ও $2.78346 = 2.7834634634$

নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিকসমূহ :

1.7643000000, 3.2424242424, 2.7834634634

উদাহরণ- ১৪ 3.89, 2.178 ও 5.89798 যোগ কর।

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে ২ এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে ২, ২ ও ৩ এর ল.সা.গু ৬। প্রথমে তিনটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ দশমিকে পরিবর্তন করা হয়েছে।

3.89 = 3.89898989

2.178 = 2.17878787

5.89798 = 5.89798798

11.97576574 [8 + 8 + 7 + 2 = 25, এখানে ২ হলো হাতের ২। 25 এর ২ যোগ হয়েছে।]

+ 2

11.97576579

\therefore নির্ণেয় যোগফল 11.97576576 বা 11.97576

উদাহরণ- ১৬ 8.243 থেকে 5.24673 বিয়োগ কর।

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে ২ এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে ২ ও ৩ এর ল.সা.গু. ৬। এখন দশমিক সংখ্যা দুটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করা হলো।

8.243 = 8.24343434

5.24643 = 5.24673673

2.99669761

- 1

2.99669760

[3 থেকে 6 বিয়োগ করলে হাতে ১ নিতে হবে।]

\therefore নির্ণেয় বিয়োগফল 2.99669760।

মন্তব্য : পৌনঃপুনিক কিন্তু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বডানের অঙ্ক থেকে ১ বিয়োগ করতে হবে।

দ্রষ্টব্য : সর্বডানের অঙ্ক থেকে ১ কেন বিয়োগ করা হয় তা বোঝানোর জন্য নিচে অন্যভাবে বিয়োগ করে দেখানো হলো।

8.243 = 8.24343434 | 34

5.24673 = 5.24673673 | 67

2.99669760 | 67

\therefore নির্ণেয় বিয়োগফল 2.99669760 | 67 এখানে দুটি বিয়োগফলই এক।

উদাহরণ- ১৭। 24.45645 থেকে 16.437 বিয়োগ কর।

সমাধান:

$$24.45645 = 24.45645$$

$$16.437 = 16.43743$$

[6 থেকে 7 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে।]

$$8.01901$$

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল 8.01901

দ্রষ্টব্য :

$$24.45645 = 24.45645 | 64$$

$$16.437 = 16.43743 | 74$$

$$8.01901 | 90$$

উদাহরণ- ১৯। 0.28 কে 42.18 দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $0.28 = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$

$$42.18 = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99} = \frac{464}{11}$$

$$\therefore 0.28 \times 42.18 = \frac{13}{45} \times \frac{464}{11}$$

$$= \frac{6032}{495} = 12.185$$

∴ নির্ণেয় গুণফল 12.185

উদাহরণ- ২০। $2.5 \times 4.35 \times 1.234 =$ কত?

সমাধান : $2.5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

$$4.35 = \frac{435-43}{90} = \frac{392}{90}$$

$$1.234 = \frac{1234-12}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$$

$$\therefore \frac{5}{2} \times \frac{392}{90} \times \frac{611}{495} = \frac{196 \times 611}{8910}$$

$$= \frac{119756}{8910}$$

$$= 13.44063 \dots$$

∴ নির্ণেয় গুণফল 13.44063

উদাহরণ- ২২। 2.2718 কে 1.912 দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : $2.2718 = \frac{22718-2}{9999} = \frac{22176}{9999}$

$$1.912 = \frac{1912-19}{990} = \frac{1893}{990}$$

$$\therefore 2.2718 \div 1.912 = \frac{22176}{9999} \div \frac{1893}{990}$$

$$= \frac{22176}{9999} \times \frac{990}{1893}$$

$$= \frac{120}{101}$$

$$= 1.1881$$

∴ নির্ণেয় ভাগফল 1.1881

উদাহরণ- ২৪। 13 এর বর্গমূল বের কর এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লেখ।

সমাধান : 3) 13 (3.605551.....

$$\begin{array}{r} 9 \\ 66 \overline{) 400} \\ \underline{396} \\ 7205 \overline{) 40000} \\ \underline{36025} \\ 72105 \overline{) 3697500} \\ \underline{3605525} \\ 7211101 \overline{) 9197500} \\ \underline{7211101} \\ 1986399 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল 3.605551.....

এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 3.606

উদাহরণ- ২৫। 4.4623845.... দশমিকটির 1, 2, 3, 4 ও 5

দশমিক স্থান পর্যন্ত মান ও আসন্ন মান বের কর।

সমাধান : 4.4623846 সংখ্যাটির

এক দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.4

এবং এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.5

দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.46

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.46

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.462

এবং তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.462

চার দশমিক স্থান পর্যন্ত 4.4623

এবং চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন 4.4624

পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 4.46238

এবং পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 4.46238

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। প্রমাণ কর যে, ক) $\sqrt{5}$ খ) $\sqrt{7}$ গ) $\sqrt{10}$ প্রত্যেকে অমূলদ সংখ্যা।

ক) $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 5 < 9$

$$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$\text{বা, } 1 < \sqrt{5} < 3$$

$$\text{এখানে, } (1)^2 = 1, (\sqrt{5})^2 = 5, 3^2 = 9.$$

সুতরাং $\sqrt{5}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট অতএব, $\sqrt{5}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

∴ $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

$$\text{মনে করি, } \sqrt{5} = \frac{p}{q}$$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$]

$$\text{বা, } 5 = \frac{p^2}{q^2} \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 5q = \frac{p^2}{q} \quad [\text{উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে}]$$

স্পষ্টত : $5q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $9 > 1$.

$\therefore 5q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $5q \neq \frac{p^2}{q}$
 $\therefore \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{5} \neq \frac{p}{q}$

$\therefore \sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

খ) $\sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 7 < 9$

$$\sqrt{1} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

$$\text{বা, } 1 < \sqrt{7} < 3$$

$$\text{এখানে, } (1)^2 = 1, (\sqrt{7})^2 = 7, (3)^2 = 9$$

সুতরাং $\sqrt{7}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{7}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

$$\text{মনে করি, } \sqrt{7} = \frac{p}{q}$$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$]

$$\text{বা, } 7 = \frac{p^2}{q^2}$$

[বর্গ করে]

$$\text{বা, } 7q = \frac{p^2}{q}$$

[উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : $7q$ পূর্ণসংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $2 > 1$.

$\therefore 7q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $7q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore \sqrt{7}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না

$$\text{অর্থাৎ } \sqrt{7} \neq \frac{p}{q}$$

$\therefore \sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

গ) $\sqrt{10}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : আমরা জানি, $1 < 10 < 16$

$$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

$$\text{বা, } 1 < \sqrt{10} < 4$$

$$\text{এখানে, } (1)^2 = 1, (\sqrt{10})^2 = 10, (4)^2 = 16$$

সুতরাং $\sqrt{10}$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট

অতএব, $\sqrt{10}$ পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি $\sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

$$\text{মনে করি, } \sqrt{10} = \frac{p}{q}$$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$]

$$\text{বা, } 10 = \frac{p^2}{q^2}$$

[বর্গ করে]

$$\text{বা, } 10q = \frac{p^2}{q}$$

[উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত : $10q$ পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

$\therefore 10q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $10q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore \sqrt{10}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যা হতে পারে না,

$$\text{অর্থাৎ } \sqrt{10} \neq \frac{p}{q}$$

$\therefore \sqrt{10}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

২। ক) 0.31 এবং 0.12 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি,

$$\text{একটি সংখ্যা } a = 0.301001000100001 \dots$$

$$\text{এবং অপর সংখ্যা } b = 0.302002000200002 \dots$$

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয় 0.31 অপেক্ষা ছোট এবং 0.12 অপেক্ষা বড়।

$$\text{অর্থাৎ, } 0.31 > 0.3010010001 \dots > 0.12$$

$$\text{এবং } 0.31 > 0.3020020002 \dots > 0.12$$

আবার, a ও b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

a ও b 0.31 এবং 0.12 এর মাঝখানে অবস্থিত।

$\therefore a$ ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

এভাবে অনেক উত্তর আসবে যার সবই গ্রহণযোগ্য।

খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মধ্যে একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

$\therefore 0.707106$ ও 1.4142 এর মাঝখানে একটি মূলদ সংখ্যা $a = 0.70717071$

[\therefore কোনো সংখ্যার দশমিকের পরে অসীম পর্যন্ত অংক থাকলে এই অংকগুলো যদি পুনরাবৃত্ত হয় তবে সংখ্যাটি মূলদ সংখ্যা হয়।]

$$\text{এবং অমূলদ সংখ্যা } b = 1.414213562101001$$

\therefore নির্ণেয় 0.70717071 --- একটি মূলদ সংখ্যা

এবং 1.414213562101001 --- একটি অমূলদ সংখ্যা

৪। আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

$$\text{ক) } \frac{1}{6}$$

সমাধান : $\frac{1}{6}$

$$6 \overline{) 10} 0.1666$$

$$\underline{6}$$

$$40$$

$$\underline{36}$$

$$40$$

$$\underline{36}$$

$$40$$

$$\underline{36}$$

$$4$$

\therefore নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ 0.16

খ) $\frac{7}{11}$

সমাধান: $\frac{7}{11}$

$11 \overline{) 70} \mid 0.63636$

$\frac{66}{40}$

$\frac{33}{70}$

$\frac{66}{40}$

$\frac{33}{70}$

$\frac{66}{40}$

$\frac{33}{70}$

$\frac{66}{40}$

$\frac{33}{70}$

$\frac{66}{40}$

$\frac{33}{70}$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ 0.63

গ) $3\frac{2}{9}$

সমাধান: $3\frac{2}{9}$

$= \frac{29}{9}$

∴ $9 \overline{) 29} \mid 3.222$

$\frac{27}{20}$

$\frac{18}{20}$

$\frac{18}{20}$

$\frac{18}{20}$

$\frac{18}{20}$

$\frac{18}{20}$

$\frac{18}{20}$

$\frac{18}{20}$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ 3.2

ঘ) $3\frac{8}{15}$

সমাধান: $3\frac{8}{15}$

$= \frac{53}{15}$

$15 \overline{) 53} \mid 3.5333$

$\frac{45}{80}$

$\frac{75}{75}$

$\frac{50}{45}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

$\frac{45}{50}$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ 3.53

৫। সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) 0.2

সমাধান: $0.2 = 0.2222$

এখানে, $0.2 \times 10 = 0.222 \times 10 = 2.222$

$0.2 \times 1 = 0.222 \times 1 = 0.222$

(-) করে $0.2(10 - 1)$

বা, $0.2 \times 9 = 2$

বা, $0.2 = \frac{2}{9}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $\frac{2}{9}$

খ) 0.35

সমাধান: $0.35 = 0.353535$

এখানে, $0.35 \times 100 = 0.353535 \times 100 = 35.3535$

এবং $0.35 \times 1 = 0.353535 \times 1 = 0.3535$

(-) করে $0.35(100 - 1)$

বা, $0.35 \times 99 = 35$

বা, $0.35 = \frac{35}{99}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $\frac{35}{99}$

গ) 0.13

সমাধান: $0.13 = 0.13333$

এখানে, $0.13 \times 100 = 0.13333 \times 100 = 13.333$

এবং $0.13 \times 10 = 0.13333 \times 10 = 1.333$

(-) করে $0.13(100 - 10)$

বা, $0.13 \times 90 = 12$

বা, $0.13 = \frac{12}{90}$

$= \frac{2}{15}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $\frac{2}{15}$

ঘ) 3.78

সমাধান: $3.78 = 3.7888$

এখানে, $3.78 \times 100 = 3.7888 \times 100 = 378.888$

এবং $3.78 \times 10 = 3.7888 \times 10 = 37.888$

(-) করে $3.78(100 - 10)$

বা, $3.78 \times 90 = 341$

বা, $3.78 = \frac{341}{90} = 3\frac{71}{90}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $3\frac{71}{90}$

ঙ) 6.2309

সমাধান: $6.2309 = 6.2309309$

এখানে, $6.2309 \times 10000 = 6.2309309 \times 10000 = 62309.309$

এবং $6.2309 \times 10 = 6.2309309 \times 10 = 62.309$

(-) করে $6.2309(10000 - 10)$

বা, $6.2309 \times 9990 = 62247$

∴ $6.2309 = \frac{62247}{9990}$

$= 6\frac{2307}{9990}$

∴ নির্ণেয় সামান্য ভগ্নাংশ $6\frac{2307}{9990}$

৬। সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ প্রকাশ কর।

ক) 2.3, 5.235

সমাধান: 2.3, 5.235

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 1 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা 1, 2 এর ল.সা.গু = 2.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে প্রত্যেক দশমিকের পরে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 1 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 2.

$$\therefore 2.3 = 2.333$$

$$5.235 = 5.235$$

\therefore নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ 2.333, 5.235

খ) 7.26, 4.237

সমাধান: 7.26, 4.237

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা 1, 1 এর ল.সা.গু = 1.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে প্রত্যেক দশমিকের পরে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 1.

$$\therefore 7.26 = 7.266$$

$$4.237 = 4.237$$

\therefore নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ 7.266, 4.237

গ) 5.7, 8.34, 6.245

সমাধান: 5.7, 8.34, 6.245

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা 0 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা = 1, 2, 3 এর ল.সা.গু = 6.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে, প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 0 (শূন্য) এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা 6 হবে।

$$\therefore 5.7 = 5.777777$$

$$8.34 = 8.343434$$

$$6.245 = 6.245245$$

\therefore নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিকসমূহ: 5.777777; 8.343434 এবং 6.245245

ঘ) 12.32, 2.19, 4.3256

সমাধান: 12.32, 2.19, 4.3256

এখানে, আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যা = 0, 1, 2 এর ল.সা.গু = 2.

সুতরাং সদৃশ আবৃত্ত দশমিক করতে হলে, প্রত্যেকটি দশমিকের অনাবৃত্ত অংক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংক সংখ্যাও হবে 2।

$$\therefore 12.32 = 12.3200$$

$$2.19 = 2.1999$$

$$4.3256 = 4.3256$$

\therefore নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিকসমূহ 12.3200; 2.1999, এবং 4.3256

৭। যোগ কর :

ক) $0.45 + 0.134$

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1.

$$\therefore 0.45 = 0.455$$

$$0.134 = 0.134$$

$$\hline 0.589$$

\therefore নির্ণেয় যোগফল 0.589

খ) $2.05 + 8.04 + 7.018$

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 3 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1.

$$\therefore 2.05 = 2.0555$$

$$8.04 = 8.0444$$

$$7.018 = 7.0180$$

$$\hline 17.1179$$

\therefore নির্ণেয় যোগফল 17.1179

গ) $0.006 + 0.92 + 0.0134$

সমাধান: এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা সর্বোচ্চ 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1, 2, 3। এদের ল.সা.গু = 6.

$$\therefore 0.006 = 0.00666666$$

$$0.92 = 0.92929292$$

$$0.0134 = 0.01341341$$

$$\hline 0.94937299$$

$$\hline 0.94937300$$

\therefore নির্ণেয় যোগফল 0.94937300

৮। বিয়োগ কর :

ক) $3.4 - 2.13$

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যাও 1.

$$\therefore 3.4 = 3.44$$

$$\text{এবং } 2.13 = 2.13$$

$$\hline 1.31$$

\therefore নির্ণেয় বিয়োগফল 1.31

খ) $5.12 - 3.45$

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1, 2 এর ল.সা.গু = 2.

$$\therefore 5.12 = 5.121$$

$$3.45 = 3.455$$

$$\hline 1.666$$

$$\hline -1$$

$$\hline 1.665$$

\therefore নির্ণেয় বিয়োগফল 1.665.

মন্তব্য : পৌনঃপুনিক কিন্তু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বভানের অংক থেকে 1 বিয়োগ করতে হয়।

গ) $8.49 - 5.356$

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যাও 2.

$$\therefore 8.49 = 8.4900$$

$$5.356 = 5.3565$$

$$\hline 3.1335$$

$$\hline -1$$

$$\hline 3.1334$$

\therefore নির্ণেয় বিয়োগফল 3.1334

ঘ) $19.345 - 13.2349$

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অংক সংখ্যা 1, 3 এর ল.সা.গু = 3.

$$\therefore 19.345 = 19.34555$$

$$13.2349 = 13.23493$$

$$\hline 6.11062$$

\therefore নির্ণেয় বিয়োগফল 6.11062

৯। গুণ কর :

ক) $0.\dot{3} \times 0.\dot{6}$

সমাধান : এখানে, $0.\dot{3} = \frac{3}{9}$ এবং $0.\dot{6} = \frac{6}{9}$

এখন, $0.\dot{3} \times 0.\dot{6} = \frac{3}{9} \times \frac{6}{9}$
 $= \frac{2}{9} = 0.\dot{2}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $0.\dot{2}$.

খ) $2.\dot{4} \times 0.\dot{8}\dot{1}$

সমাধান : এখানে, $2.\dot{4} = \frac{24-2}{9} = \frac{22}{9}$ এবং $0.\dot{8}\dot{1} = \frac{81}{99}$

এখন, $2.\dot{4} \times 0.\dot{8}\dot{1} = \frac{22}{9} \times \frac{81}{99}$
 $= 2$

∴ নির্ণেয় গুণফল 2

গ) $0.\dot{6}\dot{2} \times 0.\dot{3}$

সমাধান : এখানে, $0.\dot{6}\dot{2} = \frac{62-6}{90} = \frac{56}{90}$ এবং $0.\dot{3} = \frac{3}{9}$

এখন, $0.\dot{6}\dot{2} \times 0.\dot{3} = \frac{56}{90} \times \frac{3}{9}$
 $= \frac{28}{135}$
 $= 0.207\dot{4}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $0.207\dot{4}$

ঘ) $42.\dot{1}\dot{8} \times 0.2\dot{8}$

সমাধান : এখানে, $42.\dot{1}\dot{8} = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99}$

এবং $0.2\dot{8} = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90}$

এখন, $42.\dot{1}\dot{8} \times 0.2\dot{8} = \frac{4176}{99} \times \frac{26}{90}$
 $= \frac{6032}{495}$
 $= 12.18\dot{5}$

∴ নির্ণেয় গুণফল $12.18\dot{5}$

১০। ভাগ কর :

ক) $0.\dot{3} \div 0.\dot{6}$

সমাধান : এখানে, $0.\dot{3} = \frac{3}{9}$ এবং $0.\dot{6} = \frac{6}{9}$

এখন, $\frac{3}{9} \div \frac{6}{9} = \frac{3}{9} \times \frac{9}{6}$
 $= \frac{1}{2} = 0.5$

∴ নির্ণেয় ভাগফল 0.5

খ) $0.3\dot{5} + 1.\dot{7}$

সমাধান : এখানে, $0.3\dot{5} = \frac{35-3}{90} = \frac{32}{90}$

এবং $1.\dot{7} = \frac{17-1}{9} = \frac{16}{9}$

এখন, $\frac{32}{90} + \frac{16}{9}$
 $= \frac{32}{90} + \frac{160}{90}$
 $= \frac{192}{90}$
 $= \frac{16}{7.5}$
 $= 2.13\dot{3}$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $2.13\dot{3}$

গ) $2.3\dot{7} \div 0.4\dot{5}$

সমাধান : এখানে, $2.3\dot{7} = \frac{237-23}{90} = \frac{214}{90}$

এবং $0.4\dot{5} = \frac{45-4}{90} = \frac{41}{90}$

এখন, $2.3\dot{7} \div 0.4\dot{5} = \frac{214}{90} \div \frac{41}{90}$
 $= \frac{214}{90} \times \frac{90}{41}$
 $= \frac{214}{41}$

$= 5.219\dot{5}$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $= 5.219\dot{5}$

ঘ) $1.18\dot{5} \div 0.2\dot{4}$

সমাধান : এখানে, $1.18\dot{5} = \frac{1185-1}{999} = \frac{1184}{999}$

এবং $0.2\dot{4} = \frac{24}{99}$

এখন, $1.18\dot{5} \div 0.2\dot{4} = \frac{1184}{999} \div \frac{24}{99}$
 $= \frac{1184}{999} \times \frac{99}{24}$
 $= \frac{1184}{243}$
 $= 4.87\dot{2}$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $4.87\dot{2}$

১১। বর্গমূল নির্ণয় কর (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত) এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূলগুলোর আসন্ন মান লেখ :

ক) 12

সমাধান : 12 এর বর্গমূল = $\sqrt{12}$

$$\begin{array}{r} 12000000 \quad 3.464 \\ 9 \\ \hline 64 \quad 300 \\ 256 \\ \hline 684 \quad 4400 \\ 4116 \\ \hline 6924 \quad 28400 \\ 27696 \\ \hline 704 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় বর্গমূল = 3.464

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান 3.46

খ) 0.25

সমাধান : 0.25 এর বর্গমূল = $\sqrt{0.25}$

$$0.25 = 0.252525 \dots$$

$$\begin{array}{r} 0.5 \quad 0.252525 \dots \quad 0.5025 \\ 25 \\ \hline 1002 \quad 2525 \\ 2004 \\ \hline 10045 \quad 52125 \\ 50225 \\ \hline 1900 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় বর্গমূল = 0.502

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 0.50

গ) 1.34

সমাধান : 1.34 এর বর্গমূল = $\sqrt{1.34}$

$$\therefore 1.34 = 1.34444 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1.34444 \dots \quad 1.159 \\ 1 \\ \hline 21 \quad 34 \\ 21 \\ \hline 225 \quad 1344 \\ 1125 \\ \hline 2309 \quad 21944 \\ 20781 \\ \hline 1163 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় বর্গমূল = 1.159

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 1.16

ঘ) 5.1302

সমাধান : 5.1302 এর বর্গমূল = $\sqrt{5.1302}$

$$\therefore 5.1302 = 5.1302302302 \dots$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 5.13023023 \dots \quad 2.265 \\ 4 \\ \hline 42 \quad 113 \\ 84 \\ \hline 446 \quad 2902 \\ 2676 \\ \hline 4525 \quad 22630 \\ 22625 \\ \hline 5 \end{array}$$

\therefore নির্ণেয় বর্গমূল 2.265

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 2.27

১২। নিচের কোন সংখ্যাগুলো মূলদ এবং কোন সংখ্যাগুলো অমূলদ লেখ :

ক) 0.4

সমাধান :

$$0.4 = \frac{4}{9}$$

\therefore সংখ্যাটি মূলদ

খ) $\sqrt{9}$

সমাধান :

$$\sqrt{9} = \sqrt{(3)^2} = 3$$

\therefore সংখ্যাটি মূলদ

গ) $\sqrt{11}$

সমাধান :

$$\sqrt{11} = 3.31662 \dots$$

\therefore সংখ্যাটি অমূলদ

ঘ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

সমাধান :

$$\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3 \times 2}}{3} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

\therefore সংখ্যাটি অমূলদ

ঙ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

সমাধান :

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2 \times 4}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

\therefore সংখ্যাটি অমূলদ

চ) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$

সমাধান :

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{3 \times 9}}{\sqrt{3 \times 16}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{9}}{\sqrt{3} \sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

\therefore সংখ্যাটি অমূলদ

১৭) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{7}$

সমাধান:

$$= \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{9}$$

$$= 1.63\bar{8}$$

∴ সংখ্যাটি মূলদ

১৩। সরল কর :

ক) $(0.3 \times 0.83) + (0.5 \times 0.1) + 0.35 + 0.08$

সমাধান: $(0.3 \times 0.83) + (0.5 \times 0.1) + 0.35 + 0.08$

$$= \left(\frac{3}{10} \times \frac{83}{100} \right) + \left(\frac{5}{10} \times \frac{1}{10} \right) + \frac{35}{100} + \frac{8}{100}$$

$$= \left(\frac{3}{10} \times \frac{83}{100} \right) + \left(\frac{5}{10} \times \frac{1}{10} \right) + \frac{35}{100} + \frac{8}{100}$$

$$= \left(\frac{3}{10} \times \frac{83}{100} \right) + \left(\frac{5}{10} \times \frac{1}{10} \right) + \frac{35}{100} + \frac{8}{100}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{1}{18} + \frac{16}{45} + \frac{4}{45}$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{1}{18} + \frac{16}{45} + \frac{4}{45}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

∴ নির্ণেয় সরল মান 9

খ) $[(6.27 \times 0.5) + \{(0.5 \times 0.75) \times 8.36\}] + \{(0.25 \times 0.1) \times (0.75 \times 21.3) \times 0.5\}$

সমাধান: $[(6.27 \times 0.5) + \{(0.5 \times 0.75) \times 8.36\}] + \{(0.25 \times 0.1) \times (0.75 \times 21.3) \times 0.5\}$

$$= \left[\left(\frac{627}{100} \times \frac{5}{10} \right) + \left\{ \left(\frac{5}{10} \times \frac{75}{100} \right) \times \frac{836}{100} \right\} \right] + \left\{ \left(\frac{25}{100} \times \frac{1}{10} \right) \times \left(\frac{75}{100} \times \frac{213}{10} \right) \times \frac{5}{10} \right\}$$

$$= \left[\frac{627}{200} + \left\{ \frac{3}{200} \times \frac{209}{100} \right\} \right] + \left\{ \frac{8}{200} \times \frac{3195}{40} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \left[\frac{627}{200} + \frac{627}{200} \right] + \left\{ \left(\frac{1}{40} \times \frac{639}{40} \right) \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \left[\frac{627}{200} \times \frac{200}{627} \right] + \left\{ \left(\frac{639}{1600} \times \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$= 1 + \left(\frac{639}{3200} \right)$$

$$= 1 + \frac{3200}{639}$$

$$= \frac{3200}{639} = \frac{3200}{639}$$

$$= 5.007$$

∴ নির্ণেয় সরল মান 5.

১৪। $\sqrt{5}$ ও 4 দুইটি বাস্তব সংখ্যা।

ক) কোনটি মূলদ ও কোনটি অমূলদ নির্দেশ কর।

খ) $\sqrt{5}$ ও 4 এদের মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান:

অ) 5.639

সমাধান: 5.639

$$= \frac{5639 - 5}{999}$$

$$= \frac{5634}{999}$$

∴ সংখ্যাটি মূলদ

ক) এখানে, $\sqrt{5} = 2.36067 \dots$

∴ $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

এবং 4 একটি মূলদ সংখ্যা।

খ) এখানে, $\sqrt{5} = 2.236067 \dots$

মনে করি, $a = 3.202002000 \dots$

এবং $b = 3.505005000$ -----

স্পষ্টত : a ও b উভয়ই দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই $\sqrt{5}$ অপেক্ষা বড় এবং ৪ অপেক্ষা ছোট।

অর্থাৎ, $\sqrt{5} < 3.202002000$ ----- < 4

এবং $\sqrt{5} < 3.505005000$ ----- < 4

$\therefore a$ ও b -ই নির্ণয় দুইটি অমূলদ সংখ্যা।

গ) আমরা জানি, $1 < 5 < 9$

$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$

বা, $1 < \sqrt{5} < 3$

এখানে, $(1)^2 = 1$, $(\sqrt{5})^2 = 5$ এবং $(3)^2 = 9$

সুতরাং $\sqrt{5}$ এর মান ১ অপেক্ষা বড় এবং ৩ অপেক্ষা ছোট

অতএব, $\sqrt{5}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা যদি $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা হয়।

তাহলে, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$

[যেখানে p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $2 > 1$]

বা, $(\sqrt{5})^2 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$

বা, $5q = \frac{p^2}{q}$ [q দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে]

স্পষ্টত : $5q$ পূর্ণ সংখ্যক কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ ।

$\therefore 5q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না

অর্থাৎ $5q \neq \frac{p^2}{q}$

$\therefore \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারে কোন সংখ্যা হতে পারে না,

অর্থাৎ, $\sqrt{5} \neq \frac{p}{q}$

অতএব, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

- a, b, c বাস্তব সংখ্যা $a < b$ এবং $c < 0$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [ডিকারুননিসা নুন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $ac = bc$ খ $ac > bc$ (গ)
গ $ac < bc$ ঘ $ac \neq bc$
- $0.1\bar{3}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে? [ডিকারুননিসা নুন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $\frac{13}{90}$ খ $\frac{13}{99}$ (গ)
গ $\frac{2}{15}$ ঘ $\frac{4}{33}$
- নিচের কোনটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ? [ডিকারুননিসা নুন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]
ক 1.4142135 খ 2.1356124 (ঘ)
গ 2.282471 ঘ 5.12765765
- মৌলিক সংখ্যা সেটের ক্ষুদ্রতম সদস্য কোনটি? [ডা. খানগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]
ক ১ খ ২ (ঘ)
গ ৩ ঘ ৪
- $0.\dot{9}$ এর মান কোনটি? [ঢাকা রেসিডেন্সিয়াল মডেল]
ক $\frac{9}{10}$ খ $\frac{1}{9}$ (ঘ)
গ $\frac{1}{6}$ ঘ 1

- নিচের কোনটি মূলদ সংখ্যা? [ঢাকা রেসিডেন্সিয়াল মডেল]
ক $\sqrt{0.25}$ খ $\sqrt{0.35}$ (ক)
গ $\sqrt{0.9}$ ঘ $\sqrt{0.10}$
- গণনাকারী সংখ্যার অপর নাম কী? [ব্র বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক মূলদ সংখ্যা খ অমূলদ সংখ্যা (গ)
গ স্বাভাবিক সংখ্যা ঘ বাস্তব সংখ্যা
- নিচের কোনটি অমূলদ সংখ্যা? [ব্র বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক 3.415 খ $\frac{5}{9}$ (গ)
গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\frac{\sqrt{9}}{4}$
- 1.3 কে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করলে কত হবে? [ব্র বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $\frac{7}{3}$ খ $\frac{5}{3}$ (গ)
গ $\frac{4}{3}$ ঘ $\frac{2}{3}$
- 0.5 এর 0.19 = কত? [ব্র বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $\frac{5}{8}$ খ $\frac{7}{9}$ (গ)
গ $\frac{1}{9}$ ঘ $\frac{3}{5}$
- $0.2\dot{4}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে কত হয়? [ব্র বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $\frac{8}{33}$ খ $\frac{8}{13}$ (ক)
গ $\frac{8}{23}$ ঘ $\frac{8}{43}$

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- সেট ও উপসেটের ধারণা ব্যাখ্যা করে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবে।
- সেট প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবে।
- অসীম সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং সসীম ও অসীম সেটের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সেটের সংযোগ ও ছেদ ব্যাখ্যা এবং যাচাই করতে পারবে।
- শক্তি সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং দুই ও তিন সদস্যবিশিষ্ট সেটের শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- উদাহরণ ও ভেনচিত্রের সাহায্যে সেট প্রক্রিয়ার সহজ বিধিগুলো প্রমাণ করতে পারবে এবং বিধিগুলো প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- অম্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা করতে ও গঠন করতে পারবে।
- ডোমেন ও রেঞ্জ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



□ সেট :

আধুনিক গণিতের হাতিয়ার হিসেবে সেটের ব্যবহার ব্যাপক। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪ – ১৯১৮) সেট সম্বন্ধে প্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন। তিনি অসীম সেটের যে ধারণা প্রদান করেন তা গণিত শাস্ত্রে বিপুল আলোড়ন সৃষ্টি করে। তাঁর প্রদত্ত ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে যে নতুন শাখার জন্ম দেয়, তা সেট তত্ত্ব (Set Theory) হিসেবে পরিচিত। “বাস্তব জগত এবং চিন্তা জগতের বস্তুসমূহের যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহই সেট।” সেটের সদস্য সংখ্যা সসীম বা অসীম হতে পারে। এই সদস্যসমূহ অন্তত একটি শর্ত দ্বারা পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত।

□ কতিপয় বিশেষ ধরনের সেট এবং এদের সংজ্ঞা :

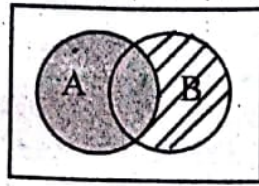
- ❖ **সসীম সেট** : যে সেটের উপাদান সংখ্যা নির্দিষ্ট তাকে সসীম সেট বলে। যেমন, $A = \{2, 5, 6\}$ সেটটির উপাদান সংখ্যা ৩। সুতরাং এটি একটি সসীম সেট।
- ❖ **অসীম সেট** : যে সেটের উপাদান সংখ্যা অসীম(নির্দিষ্ট নয় বা গণনা করা যায় না) তাকে অসীম সেট বলে। যেমন, সকল জোড় সংখ্যার সেট $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ একটি অসীম সেট। কারণ এর উপাদান সংখ্যা অসীম।
- ❖ **ফাঁকা সেট** : যে সেটের কোনো উপাদান নেই অর্থাৎ উপাদান সংখ্যা শূন্য তাকে ফাঁকা সেট বলে। যেমন, ২৪ এবং ২৪ এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যার সেট একটি ফাঁকা সেট। কারণ ২৪ এবং ২৪ এর মধ্যে কোনো মৌলিক সংখ্যা নেই। ফাঁকা সেটকে $\{\}$ অথবা প্রতীক দ্বারা লেখা হয়।
- ❖ **উপসেট** : A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান থাকলে A কে B এর উপসেট বলে। একে $A \subset B$ আকারে লেখা হয়। যেমন,
 $A = \{2, 4, 6\}$ এবং $B = \{2, 4, 6, 8\}$ হলে A, B এর একটি উপসেট বা $A \subset B$
- ❖ **প্রকৃত উপসেট** : যদি একটি সেট A থেকে একাধিক নতুন সেট পাওয়া যায় এবং মূল সেট A তে অন্তত একটি উপাদান থাকে যা প্রাপ্ত নতুন সেটগুলোতে নেই, তবে প্রাপ্ত সেটগুলোকে মূল সেট A এর প্রকৃত উপসেট বলে। অতএব, A নিজে A এর প্রকৃত উপসেট নয়।
- ❖ **সার্বিক সেট** : আলোচনাধীন সকল সেট কোনো নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হলে ঐ নির্দিষ্ট সেটকে সার্বিক সেট বলে। একে U প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- ❖ **সংযোগ সেট** : দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলে। এই ক্ষেত্রে কোন উপাদানকেই পুনরাবৃত্তি না করে শুধু একবার লেখা হয়। যেমন,
 $A = \{1, 3\}$ এবং $B = \{3, 5\}$ হলে A ও B এর সংযোগ সেট $C = \{1, 3, 5\}$ । একে $C = A \cup B$ আকারে লেখা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B বা A union B.
- ❖ **ছেদ সেট** : দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলে। A ও B এর ছেদ সেট C হলে,
 $C = A \cap B$. একে $C = A \text{ intersection } B$ পড়া হয়।
 $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{3, 5, 7\}$ হলে এদের ছেদ সেট $C = A \cap B = \{3, 5\}$
- ❖ **নিষেদ সেট** : দুটি সেটের কোনো সাধারণ উপাদান না থাকলে তাদের নিষেদ সেট বলে। যেমন, $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$ হলে, এ সেট দুটি নিষেদ সেট। দুটি নিষেদ সেটের ছেদ সেট হলো একটি ফাঁকা সেট।

- ❖ **পূরক সেট** : দুটি সেট A এবং B যদি এমন হয় যে A এর যেসব উপাদান B এর উপাদান নয়, তবে উক্ত উপাদানসমূহ নিয়ে গঠিত সেটকে A এর প্রেক্ষিতে B এর পূরক সেট বলে। একে $A \setminus B$ আকারে প্রকাশ করা হয়।
যদি $A = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $B = \{2, 4\}$ হয়, তবে B এর পূরক সেট $B' = A - B = \{2, 4, 6, 8\} - \{2, 4\} = \{6, 8\}$ [এখানে B এর উপাদানগুলো বাদে A এর সব উপাদান]
- ❖ **পাওয়ার সেট** : মনে করি, A একটি সেট। A সেটের যতগুলো উপসেট হয়, তাদের সেটকে A সেটের পাওয়ার সেট বলে এবং লেখা হয় $P(A)$ ।
A-এর উপাদান সংখ্যা n হলে, $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n । যেমন- কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা 4 হলে এর উপসেট সংখ্যা হবে $2^4 = 16$ ।

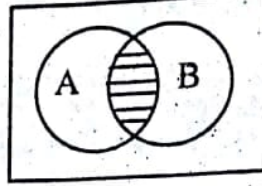
- ❖ **কার্তেসীয় গুণজ** : দুটি সেট যেমন, $A = \{a, b\}$ এবং $B = \{x, y\}$ হলে, A এবং B-এর কার্তেসীয় গুণজ $A \times B = \{a, b\} \times \{x, y\} = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$

- ❖ **দুইটি সেটের তুলনা** : দুইটি সেট যেমন, $A = (a, b)$ এবং $B = (x, y)$ সমান হলে, অর্থাৎ $(a, b) = (x, y)$ হলে, $a = x, b = y$ হবে।

- ❖ **ভেনচিত্র** : কোনো সেটের একাধিক উপসেটের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করতে যে জ্যামিতিক চিত্র ব্যবহার করা হয়, তাকে ভেনচিত্র বলে।
ব্রিটিশ তর্কশাস্ত্রবিদ জন ভেন (১৮৩৪ - ১৮৮৩) কতিপয় জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার সেটের মধ্যকার সম্পর্ক স্থাপন করেন। তাঁর নাম অনুসারে এগুলোকে ভেনচিত্র বলা হয়। নিম্নে কয়েকটি ভেনচিত্র দেখানো হলো :



$A \cup B$ হলো, গাঢ় অংশটুকু



$A \cap B$ হলো, গাঢ় অংশটুকু

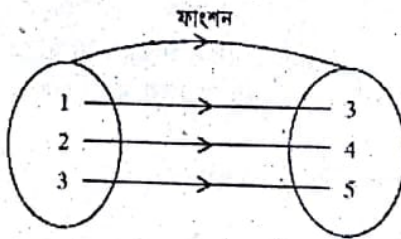
একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট U এবং দুইটি পরস্পরস্বত্ব বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা A ও B সেট চিহ্নিত করা হয়েছে। এতে সার্বিক সেট চারটি এলাকায় বিভক্ত হলো যাদের a, b, c, d দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

- ❖ **বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য** : একটি পূর্ণ সংখ্যাকে অন্যভাবে মৌলিক সংখ্যার গুণফল আকারে প্রকাশ করা যায়। যেমন-

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

- ❖ **অন্বয়** : যদি A ও B দুইটি সেট হয় তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ $A \times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর অশূন্য উপসেট R কে A সেট হতে B সেটের একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়। এখানে, R সেট $A \times B$ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ, $R \subseteq A \times B$
- ❖ **ফাংশন** : নিচের A ও B সেটের অন্বয় লক্ষ্য করি :



এখানে, যখন $y = x + 2$; তখন $x = 1$ হলে, $y = 3$

$$x = 2 \text{ হলে, } y = 4$$

$$x = 3 \text{ হলে, } y = 5$$

অর্থাৎ x এর এক-একটি মানের জন্য y এর মাত্র একটি মান পাওয়া যায় এবং x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক তৈরি হয় $y = x + 2$ দ্বারা। সুতরাং দুইটি চলক x এবং y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যেন x এর যেকোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়। x এর ফাংশনকে সাধারণত y, f(x), g(x), F(x) ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি, $y = x^2 - 2x + 3$ একট ফাংশন। এখানে, x এর যে কোনো একটি মানের জন্য y এর একটি মাত্র মান পাওয়া যাবে। এখানে, x এবং y উভয়ই চলক তবে, x এর মানের উপর y এর মান নির্ভরশীল। কাজেই x হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং y হচ্ছে অধীন চলক।

- ❖ **ডোমেন ও রেঞ্জ**

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয় অর্থাৎ $R \subseteq A \times B$, R এ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান সেট হবে R এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট হবে R এর রেঞ্জ। R এর ডোমেনকে ডোম R এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ R লিখে প্রকাশ করা হয়।

□ অনুশীলনী- ২.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১ : $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$ সেটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

[পৃষ্ঠা- ২২]

সমাধান : দেওয়া আছে, $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$

C সেটের উপাদানসমূহ $-9, -6, -3, 3, 6, 9$

এখানে প্রত্যেকটি উপাদান ৩ দ্বারা বিভাজ্য এবং পূর্ণসংখ্যা।

∴ নির্ণেয় সেট, $C = \{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } -9 \leq x^2 < 100\}$

(Ans.)

□ কাজ-২ : $Q = \{y : y \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } y^3 \leq 27\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

[পৃষ্ঠা- ২২]

সমাধান : দেওয়া আছে, $Q = \{y : y \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } y^3 \leq 27\}$

পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$y = 0$ হলে $y^3 = 0^3 = 0$, যা ২৭ থেকে ছোট

$y = 1$ " $y^3 = (1)^3 = 1$, " " "

$y = -1$ " $y^3 = (-1)^3 = -1$, " " "

$y = 2$ " $y^3 = (2)^3 = 8$, " " "

$y = -2$ " $y^3 = (-2)^3 = -8$, " " "

$y = 3$ " $y^3 = (3)^3 = 27$, যা ২৭ এর সমান

$y = -3$ " $y^3 = (-3)^3 = -27$, যা ২৭ এর ছোট

$y = 4$ " $y^3 = (4)^3 = 64$, যা ২৭ এর বড়

$y = -4$ " $y^3 = (-4)^3 = -64$, যা ২৭ এর ছোট

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী নির্ণেয় সেট, $Q = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

□ কাজ-৩ : নিচের সেটগুলো থেকে সসীম সেট ও অসীম সেট লেখ :

[পৃষ্ঠা- ২২]

১। $\{3, 5, 7\}$

সমাধান : মনে করি, $A = \{3, 5, 7\}$

এখানে A সেটে ৩টি উপাদান আছে।

আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, তাকে সসীম সেট বলে।

এখানে A সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ধারিত এবং গণনা করে নির্ধারণ করা যায়।

সুতরাং A সেটটি একটি সসীম সেট।

২। $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}\}$

সমাধান : মনে করি, $B = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}\}$

আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়, তাকে অসীম সেট বলে।

এখানে B সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ধারিত এবং গণনা করে নির্ধারণ করা যায়।

∴ B সেটটি একটি সসীম সেট।

৩। $\{3, 3^2, 3^3, \dots\}$

সমাধান : মনে করি, $C = \{3, 3^2, 3^3, \dots\}$

আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, তাকে অসীম সেট বলে।

এখানে, C সেটের উপাদান সংখ্যা নির্ধারিত নয় অর্থাৎ অসীম

∴ C সেটটি একটি অসীম সেট।

৪। $\{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } x < 4\}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } x < 4\}$

আমরা জানি, পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

প্রদত্ত সেট দেখা যাচ্ছে পূর্ণ সংখ্যাগুলো নির্ধারিত নয়, অর্থাৎ ৪ থেকে ছোট সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট।

৪ থেকে ছোট পূর্ণসংখ্যার সেট = $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

∴ প্রদত্ত সেটটি একটি অসীম সেট।

৫। $\left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ও } q \text{ পরস্পর সহমৌলিক এবং } q > 1 \right\}$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ও } q \text{ পরস্পর সহমৌলিক এবং } q > 1 \right\}$

আমরা জানি, যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না তাকে অসীম সেট বলে।

প্রদত্ত সেটটি একটি মূলদ সংখ্যার সেট এবং এ প্রদত্ত সেটের উপাদানগুলো অসীম অর্থাৎ গণনা করে শেষ করা যায় না।

∴ প্রদত্ত সেটটি একটি অসীম সেট।

৬। $\{y : y \in \mathbb{N} \text{ এবং } y^2 < 100 < y^3\}$

সমাধান : মনে করি, $A = \{y : y \in \mathbb{N} \text{ এবং } y^2 < 100 < y^3\}$

আমরা জানি,

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ ১০০ থেকে ছোট এবং ঘন ১০০ থেকে বড় তাদের সেট।

A সেটটিতে দেখা যাচ্ছে ১০০ থেকে ছোট স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো গণনা করা গেলেও ১০০ থেকে বড় স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো গণনা করে শেষ করা যাবে না।

∴ A সেটটি একটি অসীম সেট।

□ কাজ-৪ : $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $E = \{1, 5, 9\}$ এবং $F = \{3, 7, 11\}$ হলে $E^c \cup F^c$ এবং $E^c \cap F^c$ নির্ণয় কর।

[পৃষ্ঠা-২৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$E = \{1, 5, 9\}$

$F = \{3, 7, 11\}$

এখানে, $E^c = U \setminus E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{1, 5, 9\}$

$= \{3, 7, 11\}$

$F^c = U \setminus F = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \setminus \{3, 7, 11\}$

$= \{1, 5, 9\}$

∴ $E^c \cup F^c = \{3, 7, 11\} \cup \{1, 5, 9\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (Ans.)

এবং $E^c \cap F^c = \{3, 7, 11\} \cap \{1, 5, 9\}$

$= \Phi$ (Ans.)

□ কাজ-৫ : $G = \{1, 2, 3\}$ হলে, $P(G)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

[পৃষ্ঠা-২৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $G = \{1, 2, 3\}$

G সেটের সকল উপসেট-ই হলো P(G) এর উপাদান।
 $\therefore P(G) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$
 এখানে, P(G) এর উপাদান সংখ্যা = 8
 G সেটের উপাদান সংখ্যা $n = 3$
 এবং P(G) সেটের উপাদান সংখ্যা $= 8 = 2^3 = 2^n$
 \therefore P(G) এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে। (দেখানো হলো)

□ কাজ-৬: $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।
 [পৃষ্ঠা-২৭]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$

ক্রমজোড়ের সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং সমীকরণকে $\frac{1}{2}$ ও (ii) নং সমীকরণকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(-) \frac{x}{4} - \frac{x}{9} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{9x - 4x}{36} = \frac{3 - 2}{6}$$

$$\text{বা, } \frac{5x}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{বা, } 5x \times 6 = 36$$

$$\text{বা, } x = \frac{36}{5 \times 6}$$

$$\text{বা, } x = \frac{6}{5}$$

সমীকরণ (i) এ $x = \frac{6}{5}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{6}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{6}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{y}{3} = 1 - \frac{6}{5}$$

$$\text{বা, } \frac{y}{3} = \frac{5 - 6}{5}$$

$$\text{বা, } \frac{y}{3} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{বা, } 5y = -6$$

$$\therefore y = -\frac{6}{5}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় } (x, y) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}\right)$$

□ কাজ-৭: $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{3, 4\}$ এবং $R = \{x, y\}$ হলে, $(P \cap Q) \times R$ এবং $(P \cap Q) \times Q$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{3, 4\}$ এবং $R = \{x, y\}$ হলে, $(P \cap Q) \times R$ এবং $(P \cap Q) \times Q$ মান নির্ণয় করতে হবে।

$$\text{এখানে, } (P \cap Q) = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$$

$$\therefore (P \cap Q) \times R = \{3\} \times \{x, y\} = \{(3, x), (3, y)\} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{আবার, } P \cap Q = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$$

$$\therefore (P \cap Q) \times Q = \{3\} \times \{3, 4\} = \{(3, 3), (3, 4)\} \text{ (Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ১১ A = {7, 14, 21, 28} সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, A = {7, 14, 21, 28}

A সেটের উপাদানসমূহ 7, 14, 21, 28

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 7 দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ 7 এর গুণিতক এবং 28 এর বড় নয়।

$$\therefore A = \{x : x, 7 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 28\}$$

উদাহরণ- ২১ B = {x : x, 28 এর গুণনীয়ক} সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, B = {x : x, 28 এর গুণনীয়ক}

$$\text{এখানে, } 28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$$

$$\therefore 28 \text{ এর গুণনীয়কসমূহ } 1, 2, 4, 7, 14, 28$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সেট, } B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

উদাহরণ- ৪১ দেখাও যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

সমাধান: দেখাতে হবে যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

$$\text{স্বাভাবিক সংখ্যার সেট } N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

উদাহরণ- ৩১ C = {x : x ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 18$ } সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, C = {x : x ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 18$ }

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ 1, 2, 3, 4, 5,

$$\text{এখানে, } x = 1 \text{ হলে, } x^2 = 1^2 = 1$$

$$x = 2 \text{ হলে, } x^2 = 2^2 = 4$$

$$x = 3 \text{ হলে, } x^2 = 3^2 = 9$$

$$x = 4 \text{ হলে, } x^2 = 4^2 = 16$$

$$x = 5 \text{ হলে, } x^2 = 5^2 = 25; \text{ যা } 18 \text{ এর চেয়ে বড়}$$

\therefore শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ 1, 2, 3, 4

$$\therefore \text{নির্ণেয় সেট, } C = \{1, 2, 3, 4\}.$$

জোড় " " " " $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
 B = $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

১৩৩। ইত্যাদি।

∴ N একটি অসীম সেট। (দেখানো হলো)

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x, y, z\}$

P এর প্রকৃত উপসেটসমূহ $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}$ (Ans.)

সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x : x, 12 \text{ এর গুণনীয়কসমূহ}\}$

এখানে, 12 এর গুণনীয়কসমূহ 1, 2, 3, 4, 6, 12
 $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

আবার, $Q = \{x : x, 3 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 12\}$
 এখানে 12 পর্যন্ত 3 এর গুণিতক

$$\therefore P - Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} - \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 2, 4\}$$

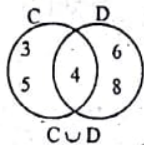
$$\therefore \text{নির্ণেয় সেট : } \{1, 2, 4\}$$

समाधान : $A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 3, 5\}$

\therefore নির্ণেয় সেট $A^c = \{1, 3, 5\}$ এবং $B^c = \{2, 4, 6, 7\}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $C = \{3, 4, 5\}$ এবং $D = \{4, 6, 8\}$

\therefore নির্ণেয় সেট $\{3, 4, 5, 6, 8\}$



সমাধান : দেওয়া আছে, $P = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x \leq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$

$$\therefore P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, 6\}$$

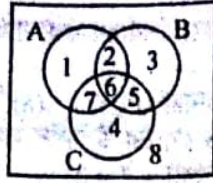
সমাধান : দেওয়া আছে, $A = \Phi$, $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$

∴ A সেটের উপাদান সংখ্যা শূন্য এবং এর শক্তি সেটের উপাদান হলো $= 1 = 2^0$

উদাহরণ-১৪১। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 6, 7\}$,
 $B = \{2, 3, 5, 6\}$ এবং $C = \{4, 5, 6, 7\}$ হলে, দেখাও যে, (i)
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং (ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap$
 $(B \cup C)$

সমাধান: (i) চিত্রে একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা U এবং পরস্পরস্বত্ব দুটি বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা যথাক্রমে A , B সেটকে নির্দেশ করা হলো।

সেট	উপাদান
$A \cup B$	1, 2, 3, 5, 6, 7
$(A \cup B)'$	4, 8
A'	3, 4, 5, 8
B'	1, 4, 7, 8
$A' \cup B'$	4, 8



$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (দেখানো হলো)

(ii) চিত্রে একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা U এবং পরস্পরস্বত্ব তিনটি বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা যথাক্রমে A , B , C সেটকে নির্দেশ করা হলো।

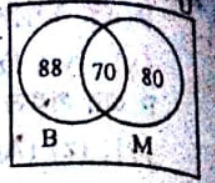
দাখ করি,

সেট	উপাদান
$A \cap B$	2, 6
$(A \cap B) \cup C$	2, 4, 5, 6, 7
$A \cup C$	1, 2, 4, 5, 6, 7
$B \cup C$	2, 3, 4, 5, 6, 7
$(A \cup C) \cap (B \cup C)$	2, 4, 5, 6, 7

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (দেখানো হলো)

উদাহরণ- ১৫: ১৫১ জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষার ১০০ জন বালা, ৮০ জন গণিতে এবং ৭০ জন উভয় বিষয়ে পাস করেছে। ভেনচিত্রে সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ কর এবং কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান: ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি ১০০ জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং বাংলায় ও গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে B ও M দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিম্নের সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P , Q , R , F দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।



এখানে, উভয় বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীদের সেট $Q = B \cap M$, যার সদস্য সংখ্যা ৭০
 $P =$ শুধু বাংলায় পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 88 - 70 = 18$
 $R =$ শুধু গণিতে পাস শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 80 - 70 = 10$
 $P \cup Q \cup R = B \cup M$, এক এবং উভয় বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীদের সেট যার সদস্য সংখ্যা $= 18 + 10 + 70 = 98$
 $F =$ উভয় বিষয়ে ফেল করা শিক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 100 - 98 = 2$
 \therefore উভয় বিষয়ে ফেল করেছে ২ জন শিক্ষার্থী। (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

২.১

১। নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

- ক) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 > 9 \text{ এবং } x^3 < 130\}$
 খ) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 \leq 36\}$
 গ) $\{x \in \mathbb{N} : x, 36 \text{ গুণনীয়ক এবং } 6 \text{ এর গুণিতক}\}$
 ঘ) $\{x \in \mathbb{N} : x^3 < 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$

সমাধান:

ক) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 > 9 \text{ এবং } x^3 < 130\}$

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ ৯ অপেক্ষা বড় সেগুলো হলো ৪, ৫, ৬, ৭, ...

কারণ $x = 4$ হলে $4^2 > 9$

$x = 5$ হলে $5^2 > 9$ ইত্যাদি।

আবার যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন ১৩০ অপেক্ষা ছোট সেগুলো হলো, ১, ২, ৩, ৪, ৫.

কারণ $x = 1$ হলে, $1^3 < 136$

$x = 2$ " $2^3 < 136$

$x = 3$ " $3^3 < 136$

$x = 4$ " $4^3 < 136$

$x = 5$ " $5^3 < 136$

কিন্তু $x = 6$ " $6^3 \nless 136$

এ থেকে আমরা দেখতে পাই যে, শুধু স্বাভাবিক সংখ্যা $x = 4$ এর ক্ষেত্রে $4^2 > 9$ এবং ৫ এর ক্ষেত্রে $5^2 > 9$ এবং $5^3 < 136$ শর্তদ্বয় পূরণ হয়।

অর্থাৎ শর্তমতে নির্ণেয় সেট $= \{4, 5\}$

খ) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 \leq 36\}$

সমাধান: আমরা জানি, পূর্ণ সংখ্যার সেট $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

যেসব পূর্ণ সংখ্যার বর্গ ৫ থেকে বড় সেগুলো হলো ৩, ৪, ৫, ৬, ... কারণ, $x = -3$ হলে $x^2 > 5$

$x = -4$ " $4^2 > 5$

$x = 3$ হলে $x^2 > 5$

$x = 4$ " $x^2 > 5$

আবার, যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন ৩৬ অপেক্ষা ছোট বা সমান সেগুলো হলো ১, ২, ৩.

কারণ $x = 1$ হলে, $1^3 < 36$

$x = 2$ " $2^3 < 36$

$x = 3$ " $3^3 < 36$

কিন্তু $x = 4$ " $4^3 \nless 36$

সুতরাং এ থেকে দেখা যায়, পূর্ণ সংখ্যা $x = 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ অর্থাৎ শর্তমতে নির্ণেয় সেট $x = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$

গ) $\{x \in \mathbb{N} : x, 36 \text{ এর গুণনীয়ক এবং } 6 \text{ এর গুণিতক}\}$

সমাধান: আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $= 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

এখানে, ৩৬-এর গুণনীয়কগুলো হলো-

$36 = 1 \times 36$

$= 2 \times 18$

$= 3 \times 12$

$= 4 \times 9$

$= 6 \times 6$

অর্থাৎ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36\}$ এবং ৬ এর গুণিতক হলো- ৬, ১২, ১৮, ৩৬

\therefore নির্ণেয় সেট $= \{6, 12, 18, 36\}$

৬। $\{x \in \mathbb{N} : x^3 < 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$

সমাধান: আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

এখন, যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন 25 অপেক্ষা কম সেগুলো হলো 1, 2

কারণ $x=1$ হলে $1^3 < 25$
 $x=2$ " $2^3 < 25$

আবার, যেসব স্বাভাবিক সংখ্যার x^4 , 264 অপেক্ষা কম সেগুলো হলো 1, 2, 3, 4

কারণ, $x=1$ হলে $1^4 < 264$

$x=2$ " $2^4 < 264$

$x=3$ " $3^4 < 264$

$x=4$ " $4^4 < 264$

কিন্তু $x=5$ হলে, $5^4 > 264$

এ থেকে দেখা যায় শুধুমাত্র স্বাভাবিক সংখ্যা $x=2$ এর ক্ষেত্রে $2^3 < 25$ এবং $2^4 < 264$ শর্তদ্বয় পূরণ করে।

অর্থাৎ শর্তমতে নির্ণেয় সেট = $\{2\}$

২। নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

ক) $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

খ) $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

গ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

ঘ) $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

সমাধান:

ক) $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

মনেকরি, $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

অর্থাৎ A সেটের উপাদানসমূহ 3, 5, 7, 9, 11

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান বিজোড় এবং 11 এর বড় নয়।

$\therefore A = \{x \in \mathbb{N} : x, \text{ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা যেখানে, } x \leq 11\}$ (Ans.)

খ) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36\}$

মনেকরি, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36\}$

অর্থাৎ A সেটের উপাদানসমূহ, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36\}$

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 36 এর গুণনীয়ক।

$\therefore A = \{x \in \mathbb{N} : x, 36 \text{ এর গুণনীয়ক}\}$ (Ans.)

গ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

মনেকরি, $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

অর্থাৎ A সেটের উপাদানসমূহ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 4 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ 4 এর গুণিতক এবং $x \leq 40$

$\therefore A = \{x : x, 4 \text{ এর গুণিতক এবং } x \leq 40\}$

ঘ) $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

সমাধান:

ধরি, $A = \{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

এখানে A সেটের উপাদানসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং যার বর্গ 16 অপেক্ষা বড় অথবা সমান এবং ঘন 216 অপেক্ষা ছোট অথবা সমান।

\therefore প্রদত্ত শর্তানুযায়ী নির্ণেয় সেট $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq 16 \text{ এবং } x^3 \leq 216\}$

৩। $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$ হলে নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর :

ক) B/C

খ) $A \cup B$

গ) $A \cap C$

ঘ) $A \cup (B \cap C)$

ঙ) $A \cap (B \cup C)$

সমাধান:

ক) B/C

দেওয়া আছে, $B = \{1, 2, a\}$ $C = \{2, a, b\}$

$\therefore B/C = \{1, 2, a\} / \{2, a, b\}$
 $= \{1\}$ (Ans.)

খ) $A \cup B$

দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, a\}$

$\therefore A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 2, a\}$

$= \{1, 2, 3, 4, a\}$ (Ans.)

গ) $A \cap C$

দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}$

$C = \{1, a, b\}$

$\therefore A \cap C = \{2, 3, 4\} \cap \{2, a, b\}$

$= \{2\}$ (Ans.)

ঘ) $A \cup (B \cap C)$

দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, a\}$

$C = \{2, a, b\}$

এখানে, $B \cap C = \{1, 2, a\} \cap \{2, a, b\}$
 $= \{2, a\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \cup \{2, a\}$

$= \{2, 3, 4, a\}$ (Ans.)

ঙ) $A \cap (B \cup C)$

দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, a\}$

$C = \{2, a, b\}$

এখানে, $B \cup C = \{1, 2, a\} \cup \{2, a, b\}$
 $= \{1, 2, a, b\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, a, b\}$
 $= \{2\}$ (Ans.)

৪। $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর :

i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

ii) $(B \cap C)' = B' \cap C'$

iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

সমাধান:

i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore \text{L.H.S} = (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$= \{7\}$

R.H.S $A' = U - A$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5\}$

$= \{2, 4, 6, 7\}$

$B' = U - B$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5, 7\}$



$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= A' \cap B' \\ &= \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} \\ &= \{7\} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S (Proved)}$$

$$\text{ii) } (B \cap C)' = B' \cup C'$$

$$\text{দেওয়া আছে, } U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{4, 6\}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = (B \cap C)' = U - (B \cap C)$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{4, 6\}$$

$$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$B' = U - B$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7\}$$

$$C' = U - C$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{1, 2\}$$

$$\text{R.H.S} = B' \cup C'$$

$$= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2\}$$

$$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S (Proved)}$$

$$\text{iii) } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$\text{দেওয়া আছে, } A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\therefore A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = (A \cup B) \cap C$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{3, 5\}$$

$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{4, 6\}$$

$$\text{R.H.S} = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= \{3, 5\} \cup \{4, 6\}$$

$$= \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S (Proved)}$$

$$\text{iv) } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\text{দেওয়া আছে, } A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\}$$

$$= \phi$$

$$\therefore \text{L.H.S} = (A \cap B) \cup C$$

$$= \phi \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cup C = \{1, 3, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{R.H.S} = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S (Proved)}$$

৫। $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$ হলে, $P(Q)$ এবং $P(R)$ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$Q = \{x, y\}$$

$$\therefore P(Q) = \{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \phi\} \text{ (Ans.)}$$

এখানে, Q সেটের উপাদানসংখ্যা ২ তাই এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে $= 4 = 2^2$

$$\text{এবং } R = \{m, n, l\}$$

$$\therefore P(R) = \{\{m, n, l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m\}, \{n\}, \{l\}, \phi\} \text{ (Ans.)}$$

এখানে R সেটের উপাদানসংখ্যা ৩ তাই এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে, $8 = 2^3$.

৬। $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে, $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n , যেখানে, n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{a, b\}$
 $B = \{a, b, c\}$

$$\therefore C = A \cup B$$

$$= \{a, b\} \cup \{a, b, c\}$$

$$= \{a, b, c\}$$

$$\therefore P(C) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \phi\}$$

কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে উপসেটের সংখ্যা হবে 2^n যেহেতু n হচ্ছে C সেটের উপাদান সংখ্যা

$\therefore P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n (দেখানো হলো)

৭। ক) $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হলে x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$
আমরা ক্রমজোড়ের ধারণা থেকে পাই,

$$x - 1 = y - 2 \dots\dots\dots (i)$$

$$y + 2 = 2x + 1 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$x - 1 = y - 2$$

$$\text{বা, } x = y - 2 + 1$$

$$\therefore x = y - 1 \dots\dots\dots (iii)$$

x -এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$y + 2 = 2(y - 1) + 1$$

$$\text{বা, } y = 2(y - 1) + 1 - 2$$

$$\text{বা, } y = 2y - 2 + 1 - 2$$

$$\text{বা, } y = 2y - 3$$

$$\text{বা, } y - 2y = -3$$

$$\text{বা, } -y = -3$$

$$\therefore y = 3$$

y এর মান (iii) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x = 3 - 1$$

$$\text{বা, } x = 2$$

$$\therefore x = 2$$

অতএব, নির্ণেয় মান $(x, y) = (2, 3)$

খ) $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$

আমরা, ক্রমজোড়ের ধারণা থেকে পাই,

$$ax - cy = 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$a^2 - c^2 = ay - cx \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং হতে পাই,

$$ax = cy$$

$$\text{বা, } x = \frac{cy}{a} \dots\dots\dots (iii)$$

(i) নং এর মান (ii) নং বসিয়ে পাই,

$$a^2 - c^2 = ay - c \cdot \frac{cy}{a}$$

$$\text{বা, } a^2 - c^2 = ay - \frac{c^2y}{a}$$

$$\text{বা, } a^2 - c^2 = \frac{a^2y - c^2y}{a}$$

$$\text{বা, } a^2 - c^2 = \frac{y(a^2 - c^2)}{a}$$

$$\text{বা, } \frac{(a^2 - c^2)}{y(a^2 - c^2)} = \frac{1}{a}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore y = a$$

y এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x = \frac{c \cdot a}{a}$$

$$\therefore x = c$$

অতএব নির্ণেয় মান $(x, y) = (c, a)$ গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।**সমাধান:** দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

আমরা ক্রমজোড়ের ধারণা থেকে পাই,

$$6x - y = 1 \dots\dots\dots (i)$$

$$3x + 2y = 13 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে যোগ করি,

$$12x - 2y = 2$$

$$3x + 2y = 13$$

$$\hline 15x + 0 = 15$$

$$\text{বা, } x = \frac{15}{15}$$

$$\therefore x = 1$$

x-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$6 \cdot 1 - y = 1$$

$$\text{বা, } -y = 1 - 6$$

$$\text{বা, } -y = -5$$

$$\therefore y = 5$$

অতএব নির্ণেয় মান $(x, y) = (1, 5)$ ৮। ক) $P = \{a\}$, $Q = \{b, c\}$ হলে, $P \times Q$ এবং $Q \times P$ নির্ণয় কর।**সমাধান:**

দেওয়া আছে,

$$P = \{a\}$$

$$Q = \{b, c\}$$

$$\therefore P \times Q = \{a\} \times \{b, c\}$$

$$= \{(a, b), (a, c)\}$$

$$\text{এবং } Q \times P = \{b, c\} \times \{a\}$$

$$= \{(b, a), (c, a)\}$$

$$\text{অতএব } P \times Q = \{(a, b), (a, c)\}$$

$$Q \times P = \{(b, a), (c, a)\} \text{ (Ans.)}$$

খ) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ এবং $C = \{x, y\}$ হলে, $(A \cap B) \times C$ নির্ণয় কর।**সমাধান:** দেওয়া আছে,

$$A = \{3, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$C = \{x, y\}$$

$$\text{এখানে, } A \cap B = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} \\ = \{4, 5\}$$

$$\therefore (A \cap B) \times C = \{4, 5\} \times \{x, y\}$$

$$= \{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় } (A \cap B) \times C = \{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$$

গ) $P = \{3, 5, 7\}$, $Q = \{5, 7\}$ এবং $R = P/Q$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ নির্ণয় কর।**সমাধান:** দেওয়া আছে, $P = \{3, 5, 7\}$, $Q = \{5, 7\}$

$$R = P \setminus Q$$

$$\text{এখানে, } R = P \setminus Q$$

$$= \{3, 5, 7\} \setminus \{5, 7\}$$

$$= \{3\}$$

$$P \cup Q = \{3, 5, 7\} \cup \{5, 7\}$$

$$= \{3, 5, 7\}$$

$$\therefore (P \cup Q) \times R = \{3, 5, 7\} \times \{3\}$$

$$= \{(3, 3), (5, 3), (7, 3)\}$$

$$\text{অতএব, } (P \cup Q) \times R = \{(3, 3), (5, 3), (7, 3)\} \text{ (Ans.)}$$

৯। A ও B যথাক্রমে 35 ও 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $A \cup B$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।**সমাধান:** 35 এর গুণনীয়কের উপাদানগুলো হলো 1, 5, 7, 35 এবং 45 এর গুণনীয়কের উপাদানগুলো হলো 1, 3, 5, 9, 15, 45.

$$\text{অর্থাৎ } A = \{1, 5, 7, 35\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$\therefore A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\} \text{ Ans.}$$

$$\text{এবং } A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \\ = \{1, 5\} \text{ (Ans.)}$$

১০। যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিশেষে 31 অবশিষ্ট থাকে, এদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিশেষে 31 অবশিষ্ট থাকবে, সে সংখ্যাগুলো 31 অপেক্ষা বড় এবং সে সংখ্যাগুলো দ্বারা $346 - 31 = 315$ এবং $556 - 31 = 525$ বিভাজ্য হবে।

অর্থাৎ সংখ্যাগুলো 315 এবং 525 এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনেকরি, 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কের সেট = A

এবং 31 অপেক্ষা বড় 525 এর গুণনীয়কের সেট = B

$$\therefore A = \{35, 105, 315\}$$

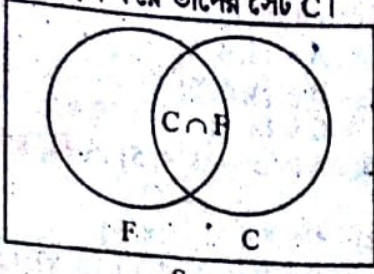
$$\therefore A \cap B \text{ এবং } B = \{35, 75, 105, 175, 525\}$$

$$= \{35, 105, 315\} \cap \{35, 75, 105, 175, 525\} \\ = \{35, 105\}$$

$$\text{অতএব, নির্ণেয় সেট} = \{35, 105\} \text{ (Ans.)}$$

১১। কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে তদ্রূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10; কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, খেলির শিক্ষার্থীর সংখ্যার সেট S।
যারা ফুটবল খেলা পছন্দ করে তাদের সেট F এবং যারা
ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট C।



তাহলে, প্রশ্নানুসারে, $n(S) = 30$
 $n(F) = 20$
 $n(C) = 15$
এবং $n(C \cap F) = 10$
কোনো খেলাই পছন্দ করে না এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা
 $= n(S) - n(C \cup F)$
এখন, $n(C \cup F) = n(C) + n(F) - n(C \cap F)$
 $= 15 + 20 - 10$
 $= 35 - 10$
 $= 25$
 \therefore কোনো খেলাই পছন্দ করে না এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা $n(S) - n(C \cup F) = 30 - 25$
 $= 5$

\therefore 5 জন শিক্ষার্থী কোনো খেলাই পছন্দ করে না। (Ans.)

১২। 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65% শিক্ষার্থী
বাংলায়, 48% শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাস
এবং 15% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।

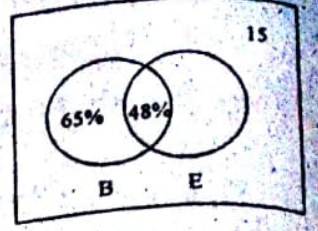
ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ
কর।

খ) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাস করেছে তাদের সংখ্যা
নির্ণয় কর।

গ) উভয় বিষয়ে পাস এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যায় ফেল
মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট
নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) মনে করি, সার্বিক সেট \cup
বাংলায় পরীক্ষার্থীদের সেট B
ইংরেজিতে " " E
 $\therefore n(\cup) = 100, n(B) = 65,$
 $n(B \cap E) = 48$ এবং $n(B \cup E)$
 $= 15$



খ) আমরা জানি, $n(B \cup C) = n(\cup) - n(B \cup E)$
 $= 100 - 15 = 85$
আবার, আমরা জানি, $n(B \cup E) = n(B) + n(E) - n(B \cap E)$
বা, $85 = 65 + n(E) - 48$
বা, $85 - 65 + 48 = n(E)$
 $\therefore n(E) = 68$
শুধু বাংলায় পাস করেছে $= n(B) - n(B \cap E)$
 $= 65 - 48 = 17$
শুধু ইংরেজিতে পাস করেছে $= n(E) - n(B \cap E)$
 $= 68 - 48$
 $= 20$

গ) $n(B \cap E) = 48$
 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
এবং $n(B \cap E) = 15 = 3 \times 5$
48 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট $A = \{2, 3\}$
এবং 15 " " " " $C = \{3, 5\}$
 $\therefore A \cup C = \{2, 3\} \cup \{3, 5\}$
 $= \{2, 3, 5\}$
অতএব, নির্ণেয় সেট $\{2, 3, 5\}$ ।

□ অনুশীলনী- ২.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১ : যদি $C = \{2, 5, 6\}$, $D = \{4, 5\}$ এবং C ও D
এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x \leq y$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে,
তবে অন্তর্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা- ৩২]

সমাধান: দেওয়া আছে,

$C = \{2, 5, 6\}$ এবং $D = \{4, 5\}$

প্রশ্নানুসারে,

অন্তর্য, $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ এবং } x \leq y\}$

এখানে, $C \times D = \{2, 5, 6\} \times \{4, 5\}$

$= \{(2, 4), (2, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 4), (6, 5)\}$

\therefore প্রদত্ত সম্পর্ক অনুসারে নির্ণেয় অন্তর্য,

$R = \{(2, 4), (2, 5), (5, 5)\}$

□ কাজ-২: $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$ হলে, S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-৩৩]

সমাধান: দেওয়া আছে, $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

এখানে, S অন্তর্যে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ -3, -2, -1, 0, 1, 2.

S অন্তর্যে ক্রমজোড়গুলোর দ্বিতীয় উপাদানসমূহ, 8, 3, 0, -1, 0, 3

\therefore ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 3, 8\}$ (Ans.)

□ কাজ-৩: $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y - x = 1\}$,
যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ । ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয়
কর। [পৃষ্ঠা- ৩৩]

সমাধান: দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y - x = 1\}$,
যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ ।

এখানে, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y - x = 1$ বা, $y = x + 1$
এর মান নির্ণয় করি।

x	-3	-2	-1	0
y	-2	-1	0	1

যেহেতু, $1 \notin A$, কাজেই $(0, 1) \notin S$

$\therefore S = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0)\}$

\therefore ডোম $S = \{-3, -2, -1\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0\}$
(Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

২.২

১। ৪ এর গুণনীয়ক সেট কোনটি?

- ক) {৪, ১৬, ২৪,} খ) {১, ২, ৩, ৪, ৮}
গ) {২, ৪, ৮} ঘ) {১, ২}

Ans: {৪, ১৬, ২৪,}

২। সেট C হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে নিচের কোনটি সঠিক?

- ক) $R \subset C$ খ) $R \subset B$
গ) $R \subseteq C \times B$ ঘ) $C \times B \subseteq R$

Ans: $R \subseteq C \times B$ ৩। $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ হলে, নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

i. A সেটের গঠন পদ্ধতি কোনটি?

- ক) $\{x \in N : 6 < x < 13\}$ খ) $\{x \in N : 6 \leq x < 13\}$
গ) $\{x \in N : 6 \leq x \leq 13\}$ ঘ) $\{x \in N : 6 < x \leq 13\}$

Ans: $\{x \in N : 6 \leq x \leq 13\}$

ii. মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট কোনটি?

- ক) {৬, ৮, ১০, ১২} খ) {৭, ৯, ১১, ১৩}
গ) {৭, ১১, ১৩} ঘ) A = {৯, ১২}

Ans: A = {৭, ১১, ১৩}

iii. ৩ এর গুণিতকগুলোর সেট কোনটি?

- ক) {৬, ৯} খ) {৬, ১১}
গ) {৯, ১২} ঘ) {৬, ৯, ১২}

Ans: {৬, ৯, ১২}

iv. বৃহত্তম জোড় সংখ্যার গুণনীয়কের সেট কোনটি?

- ক) {১, ১৩} খ) {১, ২, ৩, ৬}
গ) {১, ২, ৯} ঘ) {১, ২, ৩, ৪, ৬, ১২}

Ans: {১, ২, ৩, ৪, ৬, ১২}

৪। যদি $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x < y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে রিলেশনটি নির্ণয় কর।সমাধান: দেয়া আছে, $A = \{3, 4\}$ এবং $B = \{2, 4\}$ প্রশ্নানুসারে, অম্বর $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ এবং } x > y\}$ এখানে, $A \times B = \{3, 4\} \times \{2, 4\}$ $= \{(3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ $\therefore R = \{(3, 2), (4, 2)\}$ \therefore নির্ণেয় রিলেশন, $\{(3, 2), (4, 2)\}$ ৫। যদি $C = \{2, 5\}$, $D = \{4, 6\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x + 1 < y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেয়া আছে, $C = \{2, 5\}$ এবং $D = \{4, 6\}$ প্রশ্নানুসারে অম্বর, $R = \{(x, y) : x \in C, y \in D \text{ এবং } x + 1 < y\}$ এখন, $C \times D = \{2, 5\} \times \{4, 6\}$ $= \{(2, 4), (2, 6), (5, 4), (5, 6)\}$ $\therefore R = \{(2, 4), (2, 6)\}$ \therefore নির্ণেয় রিলেশন $\{(2, 4), (2, 6)\}$ ৬। $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1)$, $f(2)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেয়া আছে, $f(x) = x^4 + 5x - 3$
 $\therefore f(-1) = (-1)^4 + 5(-1) - 3$
 $= 1 - 5 - 3$
 $= -7$ $\therefore f(2) = (2)^4 + 5 \times 2 - 3$
 $= 16 + 10 - 3$
 $= 26 - 3$
 $= 23$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 3$ $= \frac{1}{16} + \frac{5}{2} - 3$ $= \frac{1 + 40 - 48}{16}$ $= \frac{41 - 48}{16}$ $= \frac{-7}{16}$ \therefore নির্ণেয় মান = $-7, 23, \frac{-7}{16}$ ৭। যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?

সমাধান:

দেয়া আছে, $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ $\therefore f(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 4(-2) - 8$
 $= -8 + 4k + 8 - 8$
 $= 4k - 8$ কিন্তু $f(-2) = 0$ $\therefore 4k - 8 = 0$ বা, $4k = 8$ বা, $k = \frac{8}{4}$ $\therefore k = 2$ \therefore k এর ২ মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে৮। $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

সমাধান:

দেয়া আছে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ যেহেতু $f(x) = 0$ $\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ বা, $x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 = 0$ বা, $x^2(x - 3) - 3x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$ বা, $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 0$ বা, $(x - 3)(x^2 - 2x - x + 2) = 0$ বা, $(x - 3)\{x(x - 2) - 1(x - 2)\} = 0$ বা, $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 0$ হর $x - 3 = 0$ | $x - 2 = 0$ | $x - 1 = 0$ $\therefore x = 3$ $x = 2$ $\therefore x = 1$ $\therefore x = 1$ অথবা 2 অথবা 3 হলে $f(x) = 0$ হবে।

৯। যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\frac{f(\frac{1}{x^2})+1}{f(\frac{1}{x^2})-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{2 \cdot \frac{1}{x^2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{x^2} - 1} \\ &= \frac{\frac{2}{x^2} + 1}{\frac{2}{x^2} - 1} \\ &= \frac{\frac{2+x^2}{x^2}}{\frac{2-x^2}{x^2}} \\ &= \frac{2+x^2}{2-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} &= \frac{\frac{2+x^2}{2-x^2}+1}{\frac{2+x^2}{2-x^2}-1} \\ &= \frac{\frac{2+x^2+2-x^2}{2-x^2}}{\frac{2+x^2-2+x^2}{2-x^2}} \\ &= \frac{4}{2-x^2} \times \frac{2-x^2}{2x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় মান, $\frac{2}{x^2}$

১০। $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2)$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ, } g\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^4}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}} \\ &= \frac{x^8+x^4+1}{x^8} \\ &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+x^4+x^8}{x^8} \times \frac{x^4}{1} \\ &= \frac{1+x^4+x^8}{x^4} \end{aligned}$$

$$\text{ডানপক্ষ, } g(x^2) = \frac{1+(x^2)^2+(x^2)^4}{(x^2)^2} = \frac{1+x^4+x^8}{x^4}$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2) \text{ (দেখানো হলো)}$$

১১। নিচের অষ্টয়গুলো থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর :

ক) $R = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

খ) $S = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

গ) $F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, $R = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

R অষ্টয়ে ক্রমোঙ্জোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ ২, ২, ২ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ ১, ২, ৩.

\therefore ডোম $R = \{2\}$

এবং রেঞ্জ $R = \{1, 2, 3\}$

খ) দেওয়া আছে, $S = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

S অষ্টয়ে ক্রমোঙ্জোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ -২, -১, ০, ১, ২ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ ৪, ১, ০, ১, ৪

\therefore ডোম $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

রেঞ্জ $S = \{0, 1, 4\}$

গ) দেওয়া আছে,

$$F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$$

F অষ্টয়ে ক্রমোঙ্জোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ ০, ১, -১, ২, -২.

$$\therefore \text{ডোম } F = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

$$\text{এবং রেঞ্জ } F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

১২। নিচের অষ্টয়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর :

ক) $R = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$

খ) $F = \{(x,y) : x \in C, y \in C \text{ এবং } x = 2y\}$, যেখানে $C = \{-1, 0, 1, 1, 3\}$

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং $R = \{(x,y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } x+y=1\}$

R এর বর্ণিত শর্ত হতে পাই, $x+y=1$

$$\therefore y = 1-x$$

এখন, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = 1-x$ এর মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	0	-1

যেহেতু $x \notin A$, কাজেই $(-2,3) \notin R$

$$\therefore R = \{(-1,2), (0,1), (1,0), (2,-1)\}$$

$$\therefore \text{ডোম } R = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{এবং রেঞ্জ } R = \{1, 0, -1\}$$

খ) দেওয়া আছে,

$$C = \{-1, 0, 1, 1, 3\}$$

$$\text{এক } F = \{(x, y) : x \in C, y \in C \text{ এবং } x = 2y\}$$

F এর বর্ণিত শর্ত থেকে $y = 2x$ এর মান নির্ণয় করি

x	-1	0	1	1	3
y	-2	0	2	2	6

\therefore কিন্তু $6 \in C$ কাজেই $(3, 6) \notin F$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী $F = \{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$

\therefore ডোম $F = \{-1, 0, 1\}$

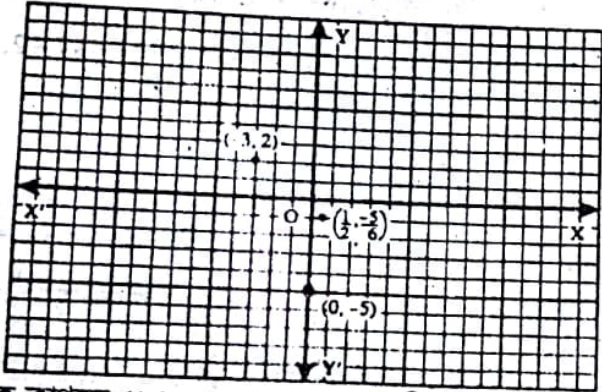
এবং রেঞ্জ $F = \{-2, 0, 2\}$

১৩। ছক কাগজে $(-3, 2), (0, -5), (\frac{1}{2}, -\frac{5}{6})$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর।

সমাধান:

মনে করি XOX' ও YOY' যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ।
O মূলবিন্দু। উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। $(-3, 2)$ বিন্দুর ভূজ = -3 এবং কোটি = 2 কাজেই x অক্ষের দিকে কমে -3 একক গিয়ে y অক্ষের ওপরের দিকে 2 একক যাওয়ার পর যে বিন্দুটি পাওয়া যাবে সেটিই হবে $(-3, 2)$ বিন্দু অবস্থান।

অনুরূপভাবে, $(0, -5)$ এবং $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6})$ বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করি।

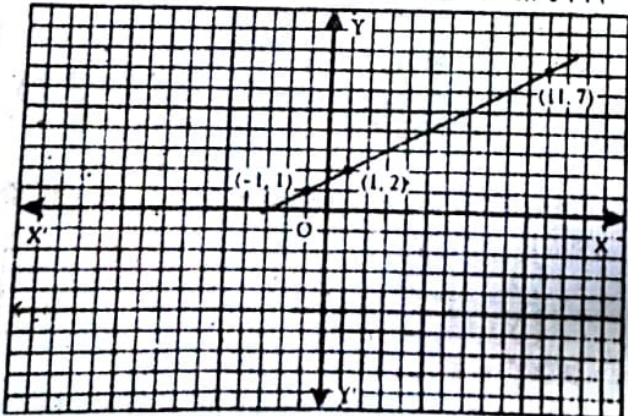


১৪। ছক কাগজে $(1, 2), (-1, 1), (11, 7)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান:

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ।
O মূলবিন্দু।

ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(1, 2), (-1, 1), (11, 7)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দু তিনটি যোগ করে একটি সরলরেখা AB পাওয়া গেল।



সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N \text{ এবং } x \text{ বিজোড় সংখ্যা}\}$

$$A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$$

$$B = \{x \in N : 3 < x < 6\}$$

$$C = \{x \in N : x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 < 130\}$$

ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. A' এবং $C - B$ নির্ণয় কর।

গ. $B \times C$ এবং $P(A \cap C)$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেয়া আছে, $U = \{x : x \in N \text{ এবং } x \text{ বিজোড় সংখ্যা}\}$

এখানে, $N =$ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

বিজোড় সংখ্যা সেট $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

$$\therefore U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{x \in N : 3 < x < 6\}$$

$$= \{4, 5\}$$

$$C = \{x \in N : x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 < 130\}$$

$$= \{3, 4, 5\}$$

ক) দেয়া আছে, $A = \{x \in N : 2 \leq x \leq 7\}$

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

x এর মান 2 এর সমান বা 2 থেকে বড়

এবং 7 এর সমান বা 7 থেকে ছোট হবে।

$$\therefore \text{নির্ণয় সেট } A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{খ) } A' = U - A$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$- \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{1, 9, 11, \dots\}$$

$$\text{এবং } C - B = \{3, 4, 5\} - \{4, 5\}$$

$$= \{3\}$$

$$\text{গ) } B \times C = \{4, 5\} \times \{3, 4, 5\}$$

$$= \{(4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

$$\text{এবং } P(A \cap C)$$

$$\therefore A \cap C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 4, 5\}$$

$$= \{3, 4, 5\} \text{ (Ans.)}$$

$$P(A \cap C) = P\{3, 4, 5\}$$

$$= \{\{3, 4, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\},$$

$$\{4, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \phi\}$$

(Ans.)

I



MyMahbub

I ♥ MyMahbub

যা মনে রাখতে হবে...

❖ বর্গের সূত্রাবলি :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 $= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
- $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
- $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$
- $a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$

■ $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$

■ $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

■ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

❖ ঘন সম্পর্কিত সূত্রাবলি :

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

❖ রাশি : এক বা একাধিক চলক ও ধ্রুবককে $+$, $-$, \times , \div ক্রিয়াসূচক চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হলে তার বিন্যাসকে (বীজগাণিতিক) রাশি বলে। যেমন : $ax^2 + bx + c$

❖ চল বা চলক : যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের যে কোনো উপাদানকে বোঝায়, তাকে চল বলে। যেমন –

$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ এক্ষেত্রে x একটি চল। x এর মান 1 হতে 3 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা।

❖ ঘাত : a^n কে a এর n তম ঘাত বলে যেখানে, $n \in \mathbb{N}$.

❖ সূত্র : সূত্র হলো চলক সম্বলিত সমীকরণ যা সর্বশ্রুট চলকের যেকোনো মানের জন্য সত্য। অন্যভাবে সূত্র হল প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত সাধারণ নিয়ম।

❖ উৎপাদক : যদি একটি রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হয়, তাহলে শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলে।

যেমন— $a^2 + a - 6 = (a + 3)(a - 2)$

এখানে, $(a + 3)$ ও $(a - 2)$, $a^2 + a - 6$ এর দুটি উৎপাদক।

❖ উৎপাদকে বিশ্লেষণ : কোনো বীজগাণিতীয় রাশির সবগুলো সম্ভাব্য উৎপাদক বের করে একে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়।

❖ উৎপাদক নির্ণয় করার পদ্ধতি :

(i) প্রথমে প্রদত্ত রাশিমালাটিকে পর্যবেক্ষণ করে দেখতে হবে সবগুলো পদে কোনো সাধারণ উৎপাদক অর্থাৎ এক জাতীয় রাশি আছে কিনা। যদি থাকে তবে তা Common নিতে হবে। যেমন—

$2ax^2 - 2ay^2$ রাশিটিতে সাধারণ উৎপাদক $2a$ । সুতরাং $2a$, Common নিয়ে রাশিটিকে লেখা যায়, $2ax^2 - 2ay^2 = 2a(x^2 - y^2)$

(ii) সাধারণ উৎপাদক Common নেয়ার পর প্রাপ্ত রাশিটিকে সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হলে তা করতে হবে। যেমন—

ওপরের উদাহরণে $2ax^2 - 2ay^2 = 2a(x^2 - y^2)$

$= 2a(x + y)(x - y)$

(iii) $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশির জন্য – Middle term break up (মধ্যপদী বিশ্লেষণ) পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে।

❖ ফাংশন : যদি দুটি চলরাশি x ও y এরূপভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, x এর যে কোনো মানের জন্য y এর অনুরূপ একটি মান পাওয়া যায়, তবে y -কে x -এর ফাংশন বলে। যেমন : $y = 2x^2 + 5$

এখানে, x স্বাধীন চলক এবং y অধীন চলক।

ফাংশনকে সাধারণত f , F , g , h ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন, $y = f(x) = 2x^2 + 5$

❖ **ভাগশেষ উপপাদ্য :** কোনো বহুপদী ফাংশন $f(x)$ -কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সুত্রই হল ভাগশেষ উপপাদ্য।

যদি কোনো বহুপদী ফাংশন $f(x)$ এর মান x এর কোনো একটি নির্দিষ্ট মান a এর জন্য শূন্য অর্থাৎ $f(a) = 0$ হয়, তবে $(x - a)$ হবে এর একটি উৎপাদক। যেমন,
 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখানে, $x = -1$ বসালে,

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 \\ &= -1 + 6 - 11 + 6 \\ &= 12 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $x - (-1)$ অর্থাৎ $x + 1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

❖ **উৎপাদক উপপাদ্য :** কোনো বহুপদী $f(x)$, $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়।

□ অনুশীলনী- ৩.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ **কাজ :-** সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

[পৃষ্ঠা-৪১]

১। $3xy + 2ax$

সমাধান : $3xy + 2ax$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (3xy + 2ax)^2 \\ &= (3xy)^2 + 2 \cdot 3xy \cdot 2ax + (2ax)^2 \\ &= 9x^2y^2 + 12ax^2y + 4a^2x^2 \\ &= x^2(9y^2 + 12ay + 4a^2) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

২। $4x - 3y$

সমাধান : $4x - 3y$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (4x - 3y)^2 \\ &= (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 \\ &= 16x^2 - 24xy + 9y^2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৩। $x - 5y + 2z$

সমাধান : $x - 5y + 2z$ এর বর্গ $= (x - 5y + 2z)^2$

$$\begin{aligned} &= (x - 5y)^2 + 2(x - 5y) \cdot 2z + (2z)^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 + 4xz - 20yz + 4z^2 \\ &= x^2 - 10xy + 25y^2 + 4xz - 20yz + 4z^2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

 অথবা, $x - 5y + 2z$ এর বর্গ $= (x - 5y + 2z)^2$

$$\begin{aligned} &= x^2 + (-5y)^2 + (2z)^2 + 2 \cdot x \cdot (-5y) + 2 \cdot (-5y) \cdot 2z + 2 \cdot x \cdot 2z \\ &= x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 10xy - 20yz + 4xz \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

□ **কাজ**

১। সরল কর : $(4x + 3y)^2 + 2(4x + 3y)(4x - 3y) + 94x - 3y^2$

[পৃষ্ঠা-৮৬]

সমাধান : ধরি, $4x + 3y = a$

এবং $4x - 3y = b$

∴ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned} &= (a + b)^2 \\ &= (4x + 3y + 4x - 3y)^2 \text{ [a ও b এর মান বসিয়ে]} \\ &= (8x)^2 \\ &= 64x^2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

২। $x + y + z = 12$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ হলে, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y + z = 12$

বা, $(x + y + z)^2 = (12)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 144$

বা, $50 + 2(xy + yz + zx) = 144$

বা, $2(xy + yz + zx) = 144 - 50$

বা, $xy + yz + zx = \frac{94}{2}$

∴ $xy + yz + zx = 47$

∴ প্রদত্ত রাশি $= (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$

$$\begin{aligned} &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \\ &= 2 \times 50 - 2 \times 47 \text{ [মান বসিয়ে]} \\ &= 100 - 94 = 6 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ৪১। $a + b + c + d$ এর বর্গ কত?

সমাধান : $a + b + c + d$ এর বর্গ $(a + b + c + d)^2 = \{(a + b) + (c + d)\}^2$

$$\begin{aligned} &= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + ad + bc + bd) + c^2 + 2cd + d^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

উদাহরণ- ৫১। সরল কর : $(5x + 7y + 3z)^2 + 2(7x - 7y - 3z)(5x + 7y + 3z)$

$$(5x + 7y + 3z)^2 + 2(7x - 7y - 3z)(5x + 7y + 3z)$$

সমাধান : ধরি, $5x + 7y + 3z = a$ এবং $7x - 7y - 3z = b$

∴ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 2 \cdot b \cdot a + b^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$= (a + b)^2$

$= \{(5x + 7y + 3z) + (7x - 7y - 3z)\}^2$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$= (5x + 7y + 3z + 7x - 7y - 3z)^2$

$= (12x)^2$

$= 144x^2 \text{ (Ans.)}$

উদাহরণ- ৬১। $x - y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x - y = 2$ এবং $xy = 24$

এখন, $x + y$ এর মান বের করতে হবে।

আমরা জানি, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (2)^2 + 4 \times 24 = 4 + 96 = 100$

∴ $x + y = \pm \sqrt{100} = \pm 10 \text{ (Ans.)}$

উদাহরণ- ৭১ যদি $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হলে, তবে $a^2 + b^2$ এর মান কত?

সমাধান: $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হলে $a^2 + b^2$ এর মান বের করতে হবে।

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) \\ &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\therefore 3 = 3(a^2 - ab + b^2) \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } a^2 - ab + b^2 = \frac{3}{3} = 1$$

এখন, $a^2 + ab + b^2 = 3$ এবং $a^2 - ab + b^2 = 1$ যোগ করে পাই, $2(a^2 + b^2) = 4$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2 \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৮১ প্রমাণ কর যে, $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

সমাধান: প্রমাণ করতে হবে যে, $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned} (a+b)^4 - (a-b)^4 &= \{(a+b)^2\}^2 - \{(a-b)^2\}^2 \\ &= \{(a+b)^2 + (a-b)^2\} \{(a+b)^2 - (a-b)^2\} \\ &= 2(a^2 + b^2) \times 4ab \\ [\because (a+b)^2 + (a-b)^2 &= 2(a^2 + b^2) \\ \text{এবং } (a+b)^2 - (a-b)^2 &= 4ab] \\ &= 8ab(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\therefore (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2) \text{ (প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ- ৯১ $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান কত?

সমাধান: $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ca$ এর মান বের করতে হবে।

$$\begin{aligned} \text{এখানে, } 2(ab + bc + ca) &= (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= (15)^2 - 83 \\ &= 225 - 83 \text{ [মান বসিয়ে]} \\ &= 142 \end{aligned}$$

$$\therefore ab + bc + ca = \frac{142}{2} = 71 \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প পদ্ধতি:

আমরা জানি, $(a+b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$

$$\text{বা, } (15)^2 = 83 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{বা, } 225 - 83 = 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{বা, } 2(ab + bc + ca) = 142$$

$$\therefore ab + bc + ca = \frac{142}{2} = 71 \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ১০১ $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ca = 1$ হলে, $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ এর মান কত?

সমাধান: $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ca = 1$ হলে, $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ এর মান বের করতে হবে।

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি, } (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + c^2 + 2ca + a^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= (a+b+c)^2 + \{(a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca)\} \\ &= 4 + 4 - 2 = 8 - 2 = 6 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

উদাহরণ- ১১১ $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করতে হবে।

$$\text{ধরি, } 2x + 3y = a \text{ এবং } 4x - 5y = b$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = ab$$

$$\text{আমরা জানি, } ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore (2x + 3y)(4x - 5y) &= \left(\frac{2x + 3y + 4x - 5y}{2}\right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{2x + 3y - 4x + 5y}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$$= \left(\frac{2(3x - y)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2(4y - x)}{2}\right)^2$$

$$= (3x - y)^2 - (4y - x)^2$$

$$\therefore (2x + 3y)(4x - 5y) = (3x - y)^2 - (4y - x)^2 \text{ (প্রকাশিতরূপ)}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৩.১

১। সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর।

ক) $2a + 3b$ এর বর্গ কত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } (2a + 3b)^2 &= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 \\ &= 4a^2 + 12ab + 9b^2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ) $2ab + 3bc$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } (2ab + 3bc)^2 &= (2ab)^2 + 2 \cdot 2ab \cdot 3bc + (3bc)^2 \\ &= 4a^2b^2 + 12ab^2c + 9b^2c^2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ) $x^2 + \frac{2}{y^2}$

$$\text{সমাধান: } \left(x^2 + \frac{2}{y^2}\right)^2$$

$$= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{2}{y^2} + \left(\frac{2}{y^2}\right)^2$$

$$= x^4 + 4 \cdot \frac{x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4}$$

$$= x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4} \text{ (Ans.)}$$

ঘ) $a + \frac{1}{a}$

$$\text{সমাধান: } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

$$= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \text{ (Ans.)}$$

৬) $4y - 5x$

সমাধান : $(4y - 5x)^2$
 $= (4y)^2 - 2 \cdot 4y \cdot 5x + (5x)^2$
 $= 16y^2 - 40xy + 25x^2$ (Ans.)

৭) $ab - c$

সমাধান : $(ab - c)^2$
 $= (ab)^2 - 2 \cdot ab \cdot c + c^2$
 $= a^2b^2 - 2abc + c^2$ (Ans.)

৮) $5x^2 - y$

সমাধান : $(5x^2 - y)^2$
 $= (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot y + y^2$
 $= 25x^4 - 10x^2y + y^2$ (Ans.)

৯) $x + 2y + 4z$

সমাধান : $(x + 2y + 4z)^2$
 $= \{(x + 2y) + 4z\}^2$
 $= (x + 2y)^2 + 2 \cdot (x + 2y) \cdot 4z + (4z)^2$
 $= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 4y^2 + 8z(x + 2y) + 16z^2$
 $= x^2 + 4xy + 4y^2 + 8xz + 16yz + 16z^2$
 $= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 8xz + 16yz$ (Ans.)

১০) $3p + 4q - 5r$

সমাধান : $(3p + 4q - 5r)^2$
 $= \{(3p + 4q) - 5r\}^2$
 $= (3p + 4q)^2 - 2 \cdot (3p + 4q) \cdot 5r + (5r)^2$
 $= (3p)^2 + 2 \cdot 3p \cdot 4q + (4q)^2 - 10r(3p + 4q) + 25r^2$
 $= 9p^2 + 24pq + 16q^2 - 30pr - 40qr + 25r^2$
 $= 9p^2 + 16q^2 + 25r^2 + 24pq - 30pr - 40qr$ (Ans.)

১১) $3b - 5c - 2a$

সমাধান : $(3b - 5c - 2a)^2$
 $= \{(3b - 5c) - 2a\}^2$
 $= (3b - 5c)^2 - 2 \cdot (3b - 5c) \cdot 2a + (2a)^2$
 $= (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 5c + (5c)^2 - 4a(3b - 5c) + 4a^2$
 $= 9b^2 - 30bc + 25c^2 - 12ab + 20ac + 4a^2$
 $= 4a^2 + 9b^2 + 25c^2 - 12ab - 30bc + 20ca$ (Ans.)

১২) $ax - by - cz$

সমাধান : $(ax - by - cz)^2$
 $= \{(ax - by) - cz\}^2$
 $= (ax - by)^2 - 2 \cdot (ax - by) \cdot cz + (cz)^2$
 $= (ax)^2 - 2ax \cdot by + (by)^2 - 2cz(ax - by) + c^2z^2$
 $= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2cz \cdot ax + 2cz \cdot by + c^2z^2$
 $= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy - 2acxz + 2bcyz$ (Ans.)

১৩) $a - b + c - d$

সমাধান : $(a - b + c - d)^2$
 $= \{(a - b) + (c - d)\}^2$
 $= (a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd + c^2 - 2cd + d^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$
(Ans.)

১৪) $2a + 3x - 2y - 5z$

সমাধান : $2a + 3x - 2y - 5z$
 $= \{(2a + 3x) - (2y + 5z)\}^2$
 $= (2a + 3x)^2 - 2 \cdot (2a + 3x) \cdot (2y + 5z) + (2y + 5z)^2$
 $= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3x + (3x)^2 - 2$
 $\{4ay + 10az + 6xy + 15xz\} + (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot 5z + (5z)^2$
 $= 4a^2 + 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12ax - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 20yz$
(Ans.)

১৫) 101

সমাধান : $(101)^2$
 $= (100 + 1)^2$
 $= (100)^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2$
 $= 10,000 + 200 + 1$
 $= 10201$ (Ans.)

১৬) 997

সমাধান : $(997)^2$
 $= (1000 - 3)^2$
 $= (1000)^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 3 + 3^2$
 $= 1000000 - 6000 + 9$
 $= 1000009 - 6000$
 $= 994009$ (Ans.)

১৭) 1007

সমাধান : $(1007)^2$
 $= (1000 + 7)^2$
 $= (1000)^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 7 + (7)^2$
 $= 1000000 + 14000 + 49$
 $= 1014049$ (Ans.)

২। সরল কর :

ক) $(2a + 7)^2 + 2(2a + 7)(2a - 7) + (2a - 7)^2$

সমাধান : মনে করি, $2a + 7 = a$
এবং $2a - 7 = b$

প্রদত্ত রাশি,

$a^2 + 2ab + b^2$
 $= (a + b)^2$
 $= \{(2a + 7) + (2a - 7)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
 $= (2a + 7 + 2a - 7)^2$
 $= (4a)^2$
 $= 16a^2$ (Ans.)

খ) $(3x + 2y)^2 + 2(3x + 2y)(3x - 2y) + (3x - 2y)^2$

সমাধান : মনে করি, $(3x + 2y) = a$
এবং $3x - 2y = b$

প্রদত্ত রাশি,

$= (a)^2 + 2 \cdot a \cdot b + (b)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2$
 $= (a + b)^2$
 $= \{(3x + 2y) + (3x - 2y)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
 $= (3x + 2y + 3x - 2y)^2$
 $= (6x)^2$
 $= 36x^2$ (Ans.)

গ) $(7p + 3r - 5x)^2 - 2(7p + 3r - 5x)(8p - 4r - 5x) + (8p - 4r - 5x)^2$

সমাধান : মনে করি, $7p + 3r - 5x = a$
 $8p - 4r - 5x = b$

প্রদত্ত রাশি,

$= (a)^2 - 2 \cdot a \cdot b + (b)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2$
 $= (a - b)^2$
 $= \{(7p + 3r - 5x) - (8p - 4r - 5x)\}^2$
 $= (7p + 3r - 5x - 8p + 4r + 5x)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]
 $= (-p + 7r)^2$
 $= (7r - p)^2$
 $= (7r)^2 - 2 \cdot 7r \cdot p + (p)^2$
 $= 49r^2 - 14rp + p^2$
 $= p^2 + 49r^2 - 14rp$ (Ans.)

৬) $(2m + 3n - p)^2 + (2m - 3n + p)^2 - 2(2m + 3n - p)(2m - 3n + p)$

সমাধান: মনে করি, $2m + 3n - p = a$
 $2m - 3n + p = b$

প্রদত্ত রাশি,

$$= (a)^2 + (b)^2 - 2.a.b$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$= (a - b)^2$$

$$= \{(2m + 3n - p) - (2m - 3n + p)\}^2 \text{ [a, b এর মান বসিয়ে]}$$

$$= (2m + 3n - p - 2m + 3n - p)^2$$

$$= (6n - 2p)^2$$

$$= (6n)^2 - 2.6n.2p + (2p)^2$$

$$= 36n^2 - 24np + 4p^2 \text{ (Ans.)}$$

৭) $6.35 \times 6.35 + 2 \times 6.35 \times 3.65 + 3.65 \times 3.65$

সমাধান: মনে করি, $6.35 = a$
 $3.65 = b$

∴ প্রদত্ত রাশি,

$$= a \times a + 2 \times a \times b + b \times b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (a + b)^2$$

$$= (6.35 + 3.65)^2$$

$$= (10)^2$$

$$= 100 \text{ (Ans.)}$$

৮) $5874 \times 5874 + 3774 \times 3774 - 7548 \times 5874$

সমাধান: মনে করি, $5874 = a$
 $3774 = b$

প্রদত্ত রাশি,

$$5874 \times 5874 + 3774 \times 3774 - 7548 \times 5874$$

$$= a \times a + b \times b - 2 \times b \times a$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$= (a - b)^2$$

$$= (5874 - 3774)^2$$

$$= (2100)^2$$

$$= 4410000 \text{ (Ans.)}$$

৯) $\frac{7529 \times 7529 - 7519 \times 7519}{7529 + 7519}$

সমাধান: মনে করি, $7529 = a$
 $7519 = b$

$$\therefore \frac{a \times a - b \times b}{a + b}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

$$= \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)}$$

$$= (a - b)$$

$$= (7529 - 7519) \text{ [a ও b এর মান বসিয়ে]}$$

$$= 10 \text{ (Ans.)}$$

১০) $\frac{2345 \times 2345 - 759 \times 759}{2345 - 759}$

সমাধান: মনে করি, $2345 = a$
 $759 = b$

$$\therefore \frac{a \times a - b \times b}{a - b}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{(a - b)}$$

$$= \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)}$$

$$= (a + b)$$

$$= (2345 + 759) \text{ [a ও b এর মান বসিয়ে]}$$

$$= 3104 \text{ (Ans.)}$$

১১) $a - b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে $a + b$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a - b = 4$

$$\text{এবং } ab = 60$$

$$\therefore a + b = ?$$

$$\text{আমরা জানি, } (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$= (4)^2 + 4.60$$

$$= 16 + 240$$

$$= 256$$

$$\therefore a + b = \pm \sqrt{256}$$

$$= \pm 16 \text{ (Ans.)}$$

১২) $a + b = 7$ এবং $ab = 12$ হলে $a - b$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b = 7$

$$\text{এবং } ab = 12$$

$$\therefore a - b = ?$$

$$\text{আমরা জানি, } (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= (7)^2 - 4 \times 12$$

$$= 49 - 48$$

$$= 1$$

$$\therefore a - b = \pm \sqrt{1}$$

$$= \pm 1 \text{ (Ans.)}$$

১৩) $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$ হলে $a - b$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b = 9m$

$$\text{এবং } ab = 18m^2$$

$$\therefore a - b = ?$$

$$\text{আমরা জানি, } (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= (9m)^2 - 4 \times 18m^2$$

$$= 81m^2 - 72m^2$$

$$= 9m^2$$

$$\therefore a - b = \pm \sqrt{9m^2}$$

$$= \pm 3m \text{ (Ans.)}$$

১৪) $x - y = 2$ এবং $xy = 63$ হলে, $x^2 + y^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $x - y = 2$

$$\text{এবং } xy = 63$$

$$\therefore x^2 + y^2 = ?$$

$$\text{আমরা জানি, } x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$= (2)^2 + 2 \times 63$$

$$= 4 + 126$$

$$= 130 \text{ (Ans.)}$$

১৫) $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 - \frac{1}{x^4} = 322$.

সমাধান: দেয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 4$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (4)^2 \text{ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 - 2 \times x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 16$$

$$\text{বা, } (x)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 16 + 2$$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$

বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (18)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x^2)^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 324$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 324 - 2$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ (প্রমাণিত)

৮। $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $2x + \frac{2}{x} = 3$

বা, $\left(2x + \frac{2}{x}\right)^2 = (3)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 9$

বা, $4x^2 + 8 + \frac{4}{x^2} = 9$

বা, $4x^2 + \frac{4}{x^2} = 9 - 8$

বা, $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

\therefore নির্ণেয় মান $= \frac{1}{4}$

৯। $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = (2)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 4$

বা, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 - 2$

$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

আবার, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

বা, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = (2)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(a^2)^2 + 2a^2 \cdot \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = 4$

বা, $a^4 + \frac{1}{a^4} = 4 - 2$

$\therefore a^4 + \frac{1}{a^4} = 2$

অতএব, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$ [দেখানো হলো]

১০। $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে,
 $8ab(a^2 + b^2) = 24$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$

$a - b = \sqrt{5}$

এখন, বামপক্ষ $= 8ab(a^2 + b^2)$

$= 4ab \times 2(a^2 + b^2)$

$= \{(a+b)^2 - (a-b)^2\} \times \{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

$= \{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2\} \times \{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2\}$

$= (7 - 5) \times (7 + 5)$

$= 2 \times 12$

$= 24$

$=$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b + c = 9$

এবং $ab + bc + ca = 31$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= (9)^2 - 2 \times 31$

$= 81 - 62$

$= 19$ (Ans.)

১২। $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

এবং $ab + bc + ca = 8$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

বা, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$= 9 + 2 \times 8$ [মান বসিয়ে]

$= 9 + 16$

$= 25$ (Ans.)

১৩। $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b + c = 6$

এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

এখন, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$

[$\because a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$]

$= 2 \times 14 + 14 - (6)^2$

$= 28 + 14 - 36$

$= 42 - 36$

$= 6$ (Ans.)

১৪। $x + y + z = 10$ এবং $xy + yz + zx = 31$ হলে, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $x + y + z = 10$

$$xy + yz + zx = 31$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2zx + x^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \\ &= 2\{(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)\} + 2(xy + yz + zx) \\ &= 2(x + y + z)^2 - 4(xy + yz + zx) + 2(xy + yz + zx) \\ &= 2 \times (10)^2 - 4 \times 31 + 2 \times 31 \\ &= 2 \times 100 - 124 + 62 \\ &= 200 - 124 + 62 \\ &= 262 - 124 \\ &= 138 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১৫। $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেয়া আছে, $x = 3$

$$y = 4$$

$$\text{এবং } z = 5$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } 9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx &= 9 \times (3)^2 + 16(4)^2 + 4(5)^2 - 24 \times 3 \times 4 - 16 \times 4 \times 5 \\ &\quad + 12 \times 5 \times 3 \\ &= 9 \times 9 + 16 \times 16 + 4 \times 25 - 288 - 320 + 180 \\ &= 81 + 256 + 100 - 288 - 320 + 180 \\ &= 617 - 608 \\ &= 9 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১৬। প্রমাণ কর যে,

$$\left\{ \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \right\}^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^2$$

সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = \left\{ \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{4} \right\}^2$$

$$= \left(\frac{4xy}{4} \right)^2$$

$$= x^2 y^2$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^2$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{4} - \frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{4}$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{4}$$

$$= \frac{4x^2y^2}{4}$$

$$= x^2 y^2$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১৭। $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, $a + 2b = x$
 $3a + 2c = y$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (a + 2b)(3a + 2c)$$

$$= xy$$

$$= \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{a+2b+3a+2c}{2} \right)^2 - \left(\frac{a+2b-3a-2c}{2} \right)^2$$

[x ও y এর মান বসিয়ে]

$$= \left(\frac{4a+2b+2c}{2} \right)^2 - \left(\frac{2b-2a-2c}{2} \right)^2$$

$$= \left\{ \frac{2(2a+b+c)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{2(b-a-c)}{2} \right\}^2$$

$$= (2a+b+c)^2 - (b-a-c)^2$$

এটিই দুইটি বর্গের বিয়োগফল।

$$\therefore (a + 2b)(3a + 2c) = (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2 \text{ (Ans.)}$$

১৮। $(x + 7)(x - 9)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, $x + 7 = a$
 $x - 9 = b$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (x + 7)(x - 9)$$

$$= ab$$

$$= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{x+7+x-9}{2} \right)^2 - \left(\frac{x+7-x+9}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2x-2}{2} \right)^2 - \left(\frac{16}{2} \right)^2$$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$$= \left\{ \frac{2(x-1)}{2} \right\}^2 - (8)^2$$

$$= (x-1)^2 - (8)^2$$

এটি-ই দুইটি বর্গের বিয়োগফল

$$\therefore (x + 7)(x - 9) = (x - 1)^2 - (8)^2 \text{ (Ans.)}$$

১৯। $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: এখানে, $x^2 + 10x + 24$

$$= x^2 + 6x + 4x + 24$$

$$= x(x + 6) + 4(x + 6)$$

$$= (x + 6)(x + 4)$$

মনে করি, $x + 6 = a$

$$x + 4 = b$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = (x + 6)(x + 4)$$

$$= ab$$

$$= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{x+6+x+4}{2} \right)^2 - \left(\frac{x+6-x-4}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2x+10}{2} \right)^2 - \left(\frac{2}{2} \right)^2$$

$$= \left\{ \frac{2(x+5)}{2} \right\}^2 - (1)^2$$

$$= (x+5)^2 - (1)^2$$

এটিই দুইটি বর্গের বিয়োগফল।

$$\therefore (x + 6)(x + 4) = (x + 5)^2 - (1)^2 \text{ (Ans.)}$$

২০। $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে, (i) $a^2 + b^2$ (ii) ab এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$

বা, $(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 8$

$[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

বা, $4(a^2 - ab + b^2) = 8$ $[\because a^2 + b^2 + ab = 4]$

বা, $a^2 - ab + b^2 = 2$

$\therefore a^2 - ab + b^2 = 2$ (i)

এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ (ii)

(i) + (ii) নং হতে, $a^2 + ab + b^2 = 4$

$\frac{a^2 - ab + b^2 = 2}{2(a^2 + b^2) = 6}$

$\therefore a^2 + b^2 = \frac{6}{2}$

$\therefore a^2 + b^2 = 3$

\therefore নির্ণেয় মান, $a^2 + b^2 = 3$

আবার (i) - (ii) নং হতে, $a^2 + ab + b^2 = 4$

$\frac{a^2 - ab + b^2 = 2}{2ab = 2}$

বা, $ab = \frac{2}{2}$
 $= 1$

\therefore নির্ণেয় মান, $ab = 1$

□ অনুশীলনী- ৩.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ:- সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

[পৃষ্ঠা-৪৬]

১। $3x + 2y$

সমাধান: $3x + 2y$

এখানে, $(3x + 2y)$ এর ঘন

$(3x + 2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 + (2y)^3$
 $= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$ (Ans.)

২। $3x - 4y$

সমাধান: $3x - 4y$

এখানে, $(3x - 4y)$ এর ঘন

$(3x - 4y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 4y + 3 \cdot 3x \cdot (4y)^2 - (4y)^3$
 $= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$ (Ans.)

৩। 397

সমাধান: 397

এখানে, 397 এর ঘন

$(397)^3 = (400 - 3)^3$
 $= (400)^3 - 3(400)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 400 \cdot 3^2 - (3)^3$
 $= 64000000 - 1440000 + 10800 - 27$
 $= 64010800 - 140027$
 $= 62570773$ (Ans.)

□ কাজ:-

[পৃষ্ঠা-৪৮]

১। $x = -2$ হলে, $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ এর মান কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = -2$

$\therefore 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
 $= (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - (2)^3$
 $= (3x - 2)^3$
 $= \{3(-2) - 2\}^3$ [মান বসিয়ে]
 $= (-6 - 2)^3$
 $= (-8)^3$
 $= -512$ (Ans.)

২। $a + b = 5$ এবং $ab = 6$ হলে, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $a + b = 5$ এবং $ab = 6$

এখন, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^3$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $a^3 + b^3 + 4(a - b)^3$
 $= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 4\{(a + b)^2 - 4ab\}$
 $= (5)^3 - 3 \cdot 6 \cdot 5 + 4\{(5)^2 - 4 \cdot 6\}$
 $= 125 - 90 + 4(25 - 24)$
 $= 125 - 90 + 4$
 $= 129 - 90$
 $= 39$ (Ans.)

৩। $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$= 2.2361 + 1.7321$
 $= 3.9682$

$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
 $= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$
 $= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \frac{2.2361 - 1.7321}{2} = 0.252$

$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = (3.9682)^3 + (0.252)^3$
 $= 62.4857 + 0.0160$
 $= 62.5017$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৩.২

১। সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

ক) $(2x + 5)$ এর ঘন**সমাধান :** $(2x + 5)^3$

$$= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot (5)^2 + (5)^3$$

$$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 25 + 125$$

$$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 \text{ (Ans.)}$$

গ) $(4a - 5x^2)$ এর ঘন**সমাধান :** $(4a - 5x^2)^3$

$$= (4a)^3 - 3(4a)^2 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 4a \cdot (5x^2)^2 - (5x^2)^3$$

$$= 64a^3 - 3 \cdot 16a^2 \cdot 5x^2 + 3 \cdot 4a \cdot 25x^4 - 125x^6$$

$$= 64a^3 - 240a^2x^2 + 300ax^4 - 125x^6 \text{ (Ans.)}$$

ঙ) 403 এর ঘন

সমাধান : $(403)^3$

$$= (400 + 3)^3$$

$$= (400)^3 + 3(400)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 400(3)^2 + (3)^3$$

$$= 64000000 + 3 \cdot 160000 \cdot 3 + 3 \cdot 400 \cdot 9 + 27$$

$$= 64000000 + 1440000 + 10800 + 27$$

$$= 65450827 \text{ (Ans.)}$$

ছ) $(2a - b - 3c)$ এর ঘন**সমাধান :** $(2a - b - 3c)^3$

$$= \{(2a - b) - 3c\}^3$$

$$= (2a - b)^3 - 3(2a - b)^2 \cdot 3c + 3(2a - b) \cdot (3c)^2 - (3c)^3$$

$$= (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a(b)^2 - (b)^3 - 3(4a^2 - 4ab + b^2) \cdot 3c + 3(2a - b) \cdot 9c^2 - 27c^3$$

$$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 - 9c(4a^2 - 4ab + b^2) + 27c^2(2a - b) - 27c^3$$

$$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 - 36a^2c + 36abc - 9b^2c + 54ac^2 - 27bc^2 - 27c^3$$

$$= 8a^3 - b^3 - 27c^3 - 12a^2b + 6ab^2 - 36a^2c - 9b^2c + 54ac^2 - 27bc^2 + 36abc \text{ (Ans.)}$$

জ) $(2x + 3y + z)$ এর ঘন**সমাধান :** $(2x + 3y + z)^3$

$$= [(2x + 3y) + z]^3$$

$$= (2x + 3y)^3 + 3(2x + 3y)^2 \cdot z + 3(2x + 3y) \cdot z^2 + z^3$$

$$= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x(3y)^2 + (3y)^3 + 3z(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 \cdot z + 3z^2(2x + 3y) + z^3$$

$$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot 9y^2 + 27y^3 + 3z(4x^2 + 12xy + 9y^2) + 6xz^2 + 9yz^2 + z^3$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 + 12x^2z + 36xyz + 27y^2z + 6xz^2 + 9yz^2 + z^3$$

$$= 8x^3 + 27y^3 + z^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 12x^2z + 27y^2z + 6xz^2 + 9yz^2 + 36xyz \text{ (Ans.)}$$

২। সরল কর :

ক) $(4a - 3b)^3 - 3(4a - 3b)^2(2a - 3b) + 3(4a - 3b)(2a - 3b)^2 - (2a - 3b)^3$ **সমাধান :**মনে করি, $(4a - 3b) = x$ এবং $(2a - 3b) = y$ প্রদত্ত রাশি = $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$= (x - y)^3$$

$$= \{(4a - 3b) - (2a - 3b)\}$$

$$= (4a - 3b - 2a + 3b)^3 \text{ [x ও y এর মান বসিয়ে]}$$

$$= (2a)^3$$

$$= 8a^3 \text{ (Ans.)}$$

খ) $(2x + y)^3 + 3(2x + y)^2(2x - y) + 3(2x + y)(2x - y)^2 + (2x - y)^3$ **সমাধান :**মনে করি, $2x + y = a$ এবং $2x - y = b$ প্রদত্ত রাশি = $a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= (a + b)^3$$

$$= \{(2x + y) + (2x - y)\}^3 \text{ [a ও b এর মান বসিয়ে]}$$

$$= (2x + y + 2x - y)^3$$

$$= (4x)^3$$

$$= 64x^3 \text{ (Ans.)}$$

গ) $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 6x(7x + 3b)(5x + 3b)$
সমাধান: $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 3 \cdot 2x(7x + 3b)$
 মনে করি,

$$7x + 3b = a$$

$$\text{এবং } 5x + 3b = b$$

$$(-) \text{ করে } 2x = a - b$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = a^3 - b^3 - 3(a - b)ab$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$= (a - b)^3$$

$$= \{(7x + 3b) - (5x + 3b)\}^3$$

$$= \{7x + 3b - 5x - 3b\}^3$$

$$= (2x)^3$$

$$= 8x^3. (\text{Ans.})$$

ঘ) $(x - 15)^3 + (16 - x)^3 + 3(x - 15)(16 - x)$
সমাধান: $(x - 15)^3 + (16 - x)^3 + 3 \cdot 1(x - 15)(16 - x)$
 মনে করি,

$$x - 15 = a$$

$$16 - x = b$$

$$(+) \text{ করে } 16 - 15 = a + b$$

$$\therefore a + b = 1$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = a^3 + b^3 + 3(a + b)ab$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)^3$$

$$= \{(x - 15) + (16 - x)\}^3$$

$$= (x - 15 + 16 - x)^3$$

$$= (1)^3 = 1 (\text{Ans.})$$

ঙ) $(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$

সমাধান:

$$(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$$

$$= (a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 3 \cdot 2(b + c)\{(a^2 - (b + c)^2)\}$$

মনে করি,

$$a + b + c = x$$

$$a - b - c = y$$

$$(-) \text{ করে } 2(b + c) = x - y$$

$$\text{আবার, } xy = (a + b + c)(a - b - c)$$

$$= \{a + (b + c)\} \{a - (b + c)\}$$

$$= \{a^2 - (b + c)^2\}$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = x^3 - y^3 - 3(x - y)xy$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$= (x - y)^3$$

$$= \{2(b + c)\}^3 [x - y \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= 8(b + c)^3 (\text{Ans.})$$

চ) $(m + n)^6 - (m - n)^6 - 12mn(m^2 - n^2)^2$

সমাধান: $(m + n)^6 - (m - n)^6 - 12mn(m^2 - n^2)^2$

$$= (m + n)^2 - \{(m - n)^2\}^3 - 3(m^2 - n^2)^2 \cdot 4mn.$$

মনে করি, $(m + n)^2 = x$

$$(m - n)^2 = y$$

$$\therefore x - y = (m + n)^2 - (m - n)^2$$

$$= m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2)$$

$$= 4mn.$$

$$\text{আবার, } xy = (m + n)^2 (m - n)^2$$

$$= (m^2 - n^2)^2$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$= (x - y)^3$$

$$= (4mn)^3$$

$$= 64m^3n^3 (\text{Ans.})$$

[x - y এর মান বসিয়ে]

ছ) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)$

$$(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$$

সমাধান: $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)$
 $(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$
 $= (x^3 + y^3) + (y^3 + z^3) + (z^3 + x^3)$
 $= x^3 + y^3 + y^3 + z^3 + z^3 + x^3$
 $= 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$
 $= 2(x^3 + y^3 + z^3) (\text{Ans.})$

জ) $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$

সমাধান: $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 +$
 $12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$
 $= (2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 3(4x^2 - (3y - 4z)^2) \cdot 4x$

মনে করি,

$$2x + 3y - 4z = a$$

$$\text{এবং } 2x - 3y + 4z = b$$

$$\therefore a + b = 2x + 3y - 4z + 2x - 3y + 4z$$

$$= 4x.$$

$$\text{আবার, } ab = (2x + 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)$$

$$= \{2x + (3y - 4z)\} \{2x - (3y - 4z)\}$$

$$= \{(2x)^2 - (3y - 4z)^2\}$$

$$= \{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)^3$$

$$= (4x)^3$$

$$= 64x^3 (\text{Ans.})$$

৩। $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে, $a^3 - b^3$ এর মান কত?

সমাধান:

দেয়া আছে, $a - b = 5$

এবং $ab = 36$

$$\therefore a^3 - b^3 = ?$$

আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

$$= (5)^3 + 3 \cdot 36 \cdot 5$$

$$= 125 + 540$$

$$= 665$$

$$\therefore \text{নির্ণয় মান} = 665.$$

৪। যদি $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$ হয়, তবে ab এর মান কত?

সমাধান:

দেয়া আছে, $a^3 - b^3 = 513$

এবং $a - b = 3$

$$\therefore ab = ?$$

আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

$$\text{বা, } 513 = (3)^3 + 3ab \cdot 3$$

$$\text{বা, } 513 = 27 + 9ab$$

$$\text{বা, } 9ab = 513 - 27$$

$$\text{বা, } 9ab = 486$$

$$\text{বা, } ab = \frac{486}{9}$$

$$\text{বা, } ab = 54.$$

$$\therefore \text{নির্ণয় মান} = 54.$$

৫। $x = 19$ এবং $y = -12$ হলে, $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেয়া আছে, $x = 19$

এবং $y = -12$

$\therefore ab = ?$

$$\begin{aligned} & \text{প্রদত্ত রাশি, } 8x^3 + 36x^2y + 54x^2y + 27y^3 \\ &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 \\ &= (2x + 3y)^3 \\ &= \{2(19) + 3(-12)\}^3 \\ &= (38 - 36)^3 \\ &= (2)^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় মান = 8.

৬। যদি $a = 15$ হয়, তবে $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$ এর মান কত?

সমাধান : $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$

$$\begin{aligned} &= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2a \cdot (5)^2 + (5)^3 + 5 \\ &= (2a + 5)^3 + 5 \\ &= (2 \cdot 15 + 5)^3 + 5 \quad [a \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= (30 + 5)^3 + 5 \\ &= (35)^3 + 5 \\ &= 42875 + 5 \\ &= 42880 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৭। $a = 7$ এবং $b = -5$ হলে, $(3a - 5b)^3 + (4b - 2a)^3 + 3(a - b)(3a - 5b)(4b - 2a)$ এর মান কত।

সমাধান :

দেয়া আছে, $a = 7$

এবং $b = -5$

মনে করি,

$$3a - 5b = x$$

$$2x - 3y = y$$

$$(+)\text{ করে } a - b = x + y$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (3a - 5b)^3 + (4b - 2a)^3 + 3(a - b)(3a - 5b)(4b - 2a)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 + y^3 + 3(x+y)xy \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) \\ &= (x+y)^3 \\ &= \{(3a - 5b) + (4b - 2a)\}^3 \\ &= (3a - 5b + 4b - 2a)^3 \\ &= (a - b)^3 \\ &= \{7 - (-5)\}^3 \\ &= (7 + 5)^3 \\ &= (12)^3 \\ &= 1728 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৮। যদি $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.

সমাধান :

দেয়া আছে, $a + b = m$

$$a^2 + b^2 = n$$

$$\text{এবং } a^3 + b^3 = p^3$$

$$\text{বামপক্ষ} = m^3 + 2p^3$$

$$\begin{aligned} &= (a + b)^3 + 2(a^3 + b^3) \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= (a + b)(a + b)^2 + 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a + b)\{(a + b)^2 + 2(a^2 - ab + b^2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2 - 2ab + 2b^2) \\ &= (a + b)(3a^2 + 3b^2) \\ &= (a + b)3(a^2 + b^2) \\ &= 3(a + b)(a^2 + b^2) \\ &= 3mn. \\ &= \text{ডানপক্ষ।} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

৯। যদি $x + y = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 - xy = (x - y)^2$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y = 1$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= x^3 + y^3 - xy \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy \\ &[\because x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \text{ মান বসিয়ে}] \\ &= 1 \cdot (x^2 + y^2 - xy - xy) \\ &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= (x - y)^2 \\ &= \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১০। $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে,

(ক) $a^2 - ab + b^2$ এবং

(খ) $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = 3$

$$\text{এবং } ab = 2$$

$$\begin{aligned} \text{(খ) আমরা জানি, } a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= (3)^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 27 - 18 \\ &= 9 \end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় মান = 9

(ক) আবার,

$$\text{আমরা জানি, } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{বা, } 9 = 3 \cdot (a^2 - ab + b^2) \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } (a^2 - ab + b^2) = \frac{9}{3}$$

$$\therefore a^2 - ab + b^2 = 3$$

\therefore নির্ণেয় মান = 3.

১১। $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে,

(ক) $a^2 + ab + b^2$ এবং

(খ) $a^3 - b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a - b = 5$

$$\text{এবং } ab = 36$$

$$\begin{aligned} \text{(খ) আমরা জানি, } a^3 - b^3 &= (a - b)^3 - 3ab(a - b) \\ &= (5)^3 + 3 \cdot 36 \cdot 5 \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 125 + 540 \\ &= 665 \end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় মান = 665

(ক) আবার, আমরা জানি, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\text{বা, } 665 = 5(a^2 - ab + b^2)$$

[মান বসিয়ে]

$$\text{বা, } (a^2 - ab + b^2) = \frac{665}{5}$$

$$\therefore a^2 - ab + b^2 = 133$$

\therefore নির্ণেয় মান = 133.

১২। $m + \frac{1}{m} = a$ হলে, $m^3 + \frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $m + \frac{1}{m} = a$

$$\begin{aligned} \therefore m^3 + \frac{1}{m^3} &= \left(m + \frac{1}{m}\right)^3 - 3m \cdot \frac{1}{m} \left(m + \frac{1}{m}\right) \\ &= (a)^3 - 3a \quad \left[\text{যেহেতু } m + \frac{1}{m} = a\right] \\ &= a^3 - 3a \\ \therefore \text{নির্ণেয় মান} &= a^3 - 3a. \end{aligned}$$

১৩। $x - \frac{1}{x} = p$ হলে, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = p$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= p^3 + 3p \\ \therefore \text{নির্ণেয় মান} &= p^3 + 3p. \end{aligned}$$

১৪। $a - \frac{1}{a} = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - \frac{1}{a^3} = 4$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a - \frac{1}{a} = 1$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &: a^3 - \frac{1}{a^3} \\ &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3a \cdot \frac{1}{a} \left(a - \frac{1}{a}\right) \\ &= (1)^3 + 3 \cdot 1 = 4 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৫। যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

ক) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$

বা, $a + b = -c$

বা, $(a + b)^3 = (-c)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$

বা, $a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3$ [$\because a + b = -c$]

বা, $a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$

বা, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (দেখানো হলো)

খ) $\frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ac} + \frac{(a+b)^2}{3ab} = 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$

$\therefore a + b = -c$

এবং $b + c = -a$

$\therefore c + a = -b$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab} \\ &= \frac{a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2}{3abc} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{3abc}$$

$$\left[\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= \\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{0+3abc}{3abc} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ। (দেখানো হলো)

১৬। $p - q = r$ হলে, দেখাও যে, $p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$

সমাধান: দেওয়া আছে, $p - q = r$
বা, $(p - q)^3 = (r)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]
বা, $p^3 - q^3 - 3pq(p - q) = r^3$
বা, $p^3 - q^3 - 3pqr = r^3$ [$\because p - q = r$]
বা, $p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$ (দেখানো হলো)

১৭। $2x - \frac{2}{x} = 3$ হলে, দেখাও যে, $8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 63$

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x - \frac{2}{x} = 3$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= 8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \\ &= 8x^3 - \frac{8}{x^3} \\ &= (2x)^3 - \left(\frac{2}{x}\right)^3 \\ &= \left(2x - \frac{2}{x}\right)^3 + 3 \cdot 2x \cdot \frac{2}{x} \left(2x - \frac{2}{x}\right) \\ &= (3)^3 + 12 \cdot 3 \\ &= 27 + 36 \\ &= 63 \\ &= \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৮। $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6 - 1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

[লব ও হরকে $(\sqrt{6} - \sqrt{5})$ দ্বারা গুণ করে।]

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\text{এখন, } a - \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - (\sqrt{6} - \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{a^6 - 1}{a^3} = \frac{a^6 - 1}{a^3}$$

$$= a^3 - \frac{1}{a^3}$$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3a \cdot \frac{1}{a} \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$= (2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$= 8(\sqrt{5})^3 + 6(\sqrt{5})^3$$

$$= 8 \cdot 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$= 46\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

১৯। $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, দেখাও যে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

বা, $\frac{x^6 + 1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

বা, $x^6 - 18\sqrt{3}x^3 + 1 = 0$

বা, $(x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 9\sqrt{3} + (9\sqrt{3})^2 - 242 = 0$

বা, $(x^3 - 9\sqrt{3})^2 = 242$

বা, $x^3 - 9\sqrt{3} = \sqrt{(11)^2 \times 2}$

বা, $x^3 - 9\sqrt{3} = 11\sqrt{2}$

বা, $x^3 = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$= (\sqrt{3})^3 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3$

$= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$ [$\because (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

২০। $a^4 - a^2 + 1 = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + \frac{1}{a} = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^4 - a^2 + 1 = 0$

বা, $\frac{a^4}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 1$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} = 1$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{3}$

এখন, বামপক্ষ = $a^3 + \frac{1}{a^3}$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 0 = \text{ডানপক্ষ}$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

□ অনুশীলনী- ৩.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $abx^2 + acx^3 + adx^4$

সমাধান: $abx^2 + acx^3 + adx^4$
 $= ax^2(b + cx + dx^2)$ (Ans.)

২। $xa^2 - 144xb^2$

সমাধান: $xa^2 - 144xb^2$
 $= x(a^2 - 144b^2)$
 $= x\{(a)^2 - (12b)^2\}$
 $= x(a + 12b)(a - 12b)$ (Ans.)

৩। $x^2 - 2xy - 4y - 4$

সমাধান: $x^2 - 2xy - 4y - 4$
 $= x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 4y - 4$
 $= (x - y)^2 - (y^2 + 4y + 4)$
 $= (x - y)^2 - (y + 2)^2$
 $= (x - y + y + 2)(x - y - y - 2)$
 $= (x + 2)(x - 2y - 2)$ (Ans.)

□ কাজ:- উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

১। $x^2 + x - 56$

সমাধান: $x^2 + x - 56$
 $= (x^2 + 8x - 7x - 56) \cdot x(x + 8) - 7(x + 8)$
 $= x(x + 8) - 7(x + 8)$
 $= (x + 8)(x - 7)$ (Ans.)

[পৃষ্ঠা-৫০]

২। $16x^3 - 46x^2 + 15x$

সমাধান: $16x^3 - 46x^2 + 15x$
 $= x(16x^2 - 40x + 15)$
 $= x(16x^2 - 40x - 6x + 15)$
 $= x\{8x(2x - 5) - 3(2x - 5)\}$
 $= x(2x - 5)(8x - 3)$ (Ans.)

৩। $12x^2 + 17x + 6$

সমাধান: $12x^2 + 17x + 6$
 $= 12x^2 + 9x + 8x + 6$
 $= 3x(4x + 3) + 2(4x + 3)$
 $= (4x + 3)(3x + 2)$ (Ans.)

□ কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

[পৃষ্ঠা-৫৩]

১। $2x^4 + 16x$

সমাধান: $2x^4 + 16x$
 $= 2x(x^3 + 8)$
 $= 2x\{(x)^3 + (2)^3\}$
 $= 2x(x + 2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2)$
 $= 2x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ (Ans.)

২। $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

সমাধান: $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$
 $= 8 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$
 $= (2)^3 - (a - b)^3$
 $= \{2 - (a - b)\} \{(2)^2 + 2(a - b) + (a - b)^2\}$
 $= (2 - a + b)(4 + 2a - 2b + a^2 - 2ab + b^2)$
 $= (2 - a + b)(a^2 + b^2 - 2ab + 2a - 2b + 4)$ (Ans.)

[পৃষ্ঠা-৫২]

৩। $(a+b)^3 + (a-b)^3$

সমাধান: $(a+b)^3 + (a-b)^3$

$$= \{(a+b) + (a-b)\} \{(a+b)^2 - (a+b)(a-b) + (a-b)^2\}$$

$$= (a+b+a-b) \{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - b^2) + a^2 - 2ab + b^2\}$$

$$= 2a(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2a(a^2 + 3b^2) \text{ (Ans.)}$$

□ কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

[পৃষ্ঠা-৫৩]

১। $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}$

সমাধান: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{6}(3x^2 + 7x + 2)$$

$$= \frac{1}{6}(3x^2 + 6x + x + 2)$$

$$= \frac{1}{6}\{3x(x+2) + 1(x+2)\}$$

$$= \frac{1}{6}(x+2)(3x+1) \text{ (Ans.)}$$

২। $a^3 + \frac{1}{8}$

সমাধান: $a^3 + \frac{1}{8}$

$$= (a)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right) \left\{a^2 - a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right) \text{ (Ans.)}$$

৩। $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$

সমাধান: $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$

$$= (4x)^2 - (5y)^2 - 2z(4x - 5y)$$

$$= (4x + 5y)(4x - 5y) - 2z(4x - 5y)$$

$$= (4x - 5y)(4x + 5y - 2z) \text{ (Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ১। $4x^2 + 12x + 9$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $4x^2 + 12x + 9$

$$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + (3)^2$$

$$= (2x + 3)^2$$

$$= (2x + 3)(2x + 3) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ২। $9x^2 - 30xy + 25y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $9x^2 - 30xy + 25y^2$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$$

$$= (3x - 5y)^2$$

$$= (3x - 5y)(3x - 5y) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৩। $a^2 - 1 + 2b - b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $a^2 - 1 + 2b - b^2$

$$= a^2 - (b^2 - 2b + 1)$$

$$= a^2 - (b - 1)^2$$

$$= \{a + (b - 1)\} \{a - (b - 1)\}$$

$$= (a + b - 1)(a - b + 1) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৪। $a^4 + 64b^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $a^4 + 64b^4$

$$= (a^2)^2 + (8b^2)^2$$

$$= (a^2)^2 + 2 \times a^2 \times 8b^2 + (8b^2)^2 - 16a^2b^2$$

$$= (a^2 + 8b^2)^2 - (4ab)^2$$

$$= (a^2 + 8b^2 + 4ab)(a^2 + 8b^2 - 4ab)$$

$$= (a^2 + 4ab + 8b^2)(a^2 + 4ab - 8b^2) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৫। $x^2 + 12x + 35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2 + 12x + 35$

$$= x^2 + (5+7)x + 5 \times 7$$

$$= x^2 + 5x + 7x + 5 \times 7$$

$$= x(x+5) + 7(x+5)$$

$$= (x+5)(x+7) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৬। $x^2 - 5x + 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2 - 5x + 6$

$$= x^2 - 2x - 3x + 6$$

$$= x(x-2) - 3(x-2)$$

$$= (x-2)(x-3) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৭। $x^2 - 2x - 35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2 - 2x - 35$

$$= x^2 - 7x + 5x - 35$$

$$= x(x-7) + 5(x-7)$$

$$= (x-7)(x+5) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৮। $x^2 + x - 20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $x^2 + x - 20$

$$= x^2 + 5x - 4x - 20$$

$$= x(x+5) - 4(x+5)$$

$$= (x+5)(x-4) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ৯। $12x^2 + 35x + 18$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $12x^2 + 35x + 18$

$$= 12x^2 + 27x + 8x + 18$$

$$= 3x(4x+9) + 2(4x+9)$$

$$= (4x+9)(3x+2) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ১০। $3x^2 - x - 14$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $3x^2 - x - 14$

$$= 3x^2 - 7x + 6x - 14$$

$$= x(3x-7) + 2(3x-7)$$

$$= (3x-7)(x+2) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ১১। $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

$$= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 3y + 3 \times 2x \times (3y)^2 + (3y)^3$$

$$= (2x+3y)^3$$

$$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y) \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ১২। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

i) $8a^3 + 27b^3$

ii) $a^6 - 64$

সমাধান:

$$\begin{aligned} \text{i) } 8a^3 + 27b^3 &= (2a)^3 + (3b)^3 \\ &= (2a + 3b) \{(2a)^2 - 2a \times 3b + (3b)^2\} \\ &= (2a + 3b) (4a^2 - 6ab + 9b^2) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } a^6 - 64 &= (a^3)^2 - (8)^2 \\ &= (a^3 + 8) (a^3 - 8) \\ &= (a^3 + 2^3) (a^3 - 2^3) \\ &= (a + 2) (a^2 - 2a + 4) \times (a - 2) (a^2 + 2a + 4) \\ &= (a + 2) (a - 2) (a^2 + 2a + 4) \times (a^2 - 2a + 4) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

উদাহরণ- ১৩। $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3 \\ &= (x^3 + 3x^2 \cdot 2y + 3x(2y)^2 + (2y)^3) - xy^3 - 2y^3 \\ &= (x + 2y)^3 - y^3 (x + 2y) \\ &= (x + 2y) \{(x + 2y)^2 - y^2\} \\ &= (x + 2y) (x + 2y + y) (x + 2y - y) \\ &= (x + 2y) (x + 3y) (x + y) \\ &= (x + y) (x + 2y) (x + 3y) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৩.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (১ - ৪৩) :

১। $a^2 + ab + ac + bc$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } a^2 + ab + ac + bc \\ &= a(a + b) + c(a + b) \\ &= (a + b) (a + c) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

২। $ab + a - b - 1$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } ab + a - b - 1 \\ &= ab - b + a - 1 \\ &= b(a - 1) + 1(a - 1) \\ &= (a - 1) (b + 1) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৩। $(x - y) (x + y) + (x - y) (y - z) + (x - y) (z + x)$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } (x - y) (x + y) + (x - y) (y - z) + (x - y) (z + x) \\ &= (x - y) (x + y + y - z + z + x) \\ &= (x - y) (2x + 2y + 2z) \\ &= 2(x - y) (x + y + z) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৪। $ab(x - y) - bc(x - y)$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } ab(x - y) - bc(x - y) \\ &= (x - y) \{ab - bc\} \\ &= (x - y) \{b(a - c)\} \\ &= b(x - y) (a - c) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৫। $9x^2 + 24x + 16$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } 9x^2 + 24x + 16 \\ &= 9x^2 + 12x + 12x + 16 \\ &= 3x(3x + 4) + 4(3x + 4) \\ &= (3x + 4) (3x + 4) \\ &= (3x + 4)^2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৬। $a^4 - 27a^2 + 1$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } a^4 - 27a^2 + 1 \\ &= (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1 - 25a^2 \\ &= (a^2 - 1)^2 - 25a^2 \\ &= (a^2 - 1)^2 - (5a)^2 \\ &= (a^2 - 1 + 5a) (a^2 - 1 - 5a) \\ &= (a^2 + 5a - 1) (a^2 - 5a - 1) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৭। $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + (y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 - y^2 + 2xy) (x^2 - y^2 - 2xy) \\ &= (x^2 + 2xy - y^2) (x^2 - 2xy - y^2) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৮। $(a^2 - b^2) (x^2 - y^2) + 4abxy$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } (a^2 - b^2) (x^2 - y^2) + 4abxy \\ &= a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2abxy \\ &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - a^2y^2 - 2abxy - b^2x^2 \\ &= (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) - (a^2y^2 - 2abxy - b^2x^2) \\ &= \{(ax)^2 + 2 \cdot ax \cdot by + (by)^2\} - \{(ay)^2 - 2 \cdot ay \cdot bx + (bx)^2\} \\ &= (ax + by)^2 - (ay - bx)^2 \\ &= \{(ax + by) + (ay - bx)\} \{(ax + by) - (ay - bx)\} \\ &= (ax + by + ay - bx) (ax + by - ay + bx) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৯। $4x^2 - 12ab + 9b^2 - 4c^2$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } 4x^2 - 12ab + 9b^2 - 4c^2 \\ &= \{(2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2\} - 4c^2 \\ &= (2a - 3b)^2 - (2c)^2 \\ &= \{(2a - 3b) + (2c)\} \{(2a - 3b) - (2c)\} \\ &= (2a - 3b + 2c) (2a - 3b - 2c) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১০। $9x^4 - 45a^2x^2 + 36a^4$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } 9x^4 - 45a^2x^2 + 36a^4 \\ &= 9(x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4) \\ &= 9(x^4 - 4a^2x^2 - a^2x^2 + 4a^4) \\ &= 9\{x^2(x^2 - 4a^2) - a^2(x^2 - 4a^2)\} \\ &= 9(x^2 - 4a^2)(x^2 - a^2) \\ &= 9\{(x)^2 - (2a)^2\} \{(x + a)(x - a)\} \\ &= 9(x + a)(x - a)(x + 2a)(x - 2a) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১১। $a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y \\ &= a^2 + 6a + 9 - y^2 + 2y - 1 \\ &= \{(a^2) + 2 \cdot a \cdot 3 + (3)^2\} - \{y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2\} \\ &= (a + 3)^2 - (y - 1)^2 \\ &= \{(a + 3) + (y - 1)\} \{(a + 3) - (y - 1)\} \\ &= (a + 3 + y - 1) (a + 3 - y + 1) \\ &= (a + y + 2) (a - y + 4) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১২। $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } 16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz \\ &= \{(4x)^2 - (5y)^2\} - 2z(4x - 5y) \\ &= (4x + 5y) (4x - 5y) - 2z(4x - 5y) \\ &= 4x - 5y \{(4x + 5y) - 2z\} \\ &= (4x - 5y) (4x + 5y - 2z) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১৩। $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= 4b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\ &= 4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2) \\ &= (2bc)^2 - \{(a^2)^2 + (-b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2 \cdot (a^2) \cdot (-b^2) + 2 \cdot (-b^2) \cdot (-c^2) + 2 \cdot (-c^2) \cdot a^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2bc)^2 - \{(a^2) + (-b^2) + (-c^2)\}^2 \\
 &= (2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2) \\
 &= (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= \{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\} \{b^2 + 2bc + c^2 - a^2\} \\
 &= \{(a^2) - (b - c)^2\} \{(b + c)^2 - (a)^2\} \\
 &= (a + b - c)(a - b + c)(b + c + a)(b + c - a) \\
 &= (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$১৪। x^2 + 13x + 36$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &x^2 + 13x + 36 \\
 &= x^2 + 4x + 9x + 36 \\
 &= x(x + 4) + 9(x + 4) \\
 &= (x + 4)(x + 9) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$১৫। x^4 + x^2 - 20$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &x^4 + x^2 - 20 \\
 &= x^4 + 5x^2 - 4x^2 - 20 \\
 &= x^2(x^2 + 5) - 4(x^2 + 5) \\
 &= (x^2 + 5)(x^2 - 4) \\
 &= (x^2 + 5)\{(x)^2 - (2)^2\} \\
 &= (x^2 + 5)(x + 2)(x - 2) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$১৬। a^2 - 30a + 216$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &a^2 - 30a + 216 \\
 &= a^2 - 12a - 18a + 216 \\
 &= a(a - 12) - 18(a - 12) \\
 &= (a - 12)(a - 18) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$১৭। x^6y^6 - x^3y^3 - 6$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &x^6y^6 - x^3y^3 - 6 \\
 &= x^6y^6 - 3x^3y^3 + 2x^3y^3 - 6 \\
 &= x^3y^3(x^3y^3 - 3) + 2(x^3y^3 - 3) \\
 &= x^3y^3(x^3y^3 - 3) + 2(x^3y^3 - 3) \\
 &= (x^3y^3 - 3)(x^3y^3 + 2) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$১৮। a^8 - a^4 - 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &a^8 - a^4 - 2 \\
 &= a^8 - 2a^4 + a^4 - 2 \\
 &= a^4(a^4 - 2) + 1(a^4 - 2) \\
 &= (a^4 - 2)(a^4 + 1) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$১৯। a^2b^2 - 8ab - 105$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &a^2b^2 - 8ab - 105 \\
 &= a^2b^2 - 15ab + 7ab - 105 \\
 &= ab(ab - 15) + 7(ab - 15) \\
 &= (ab - 15)(ab + 7) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২০। x^2 - 37x - 650$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &x^2 - 37x - 650 \\
 &= x^2 - 50x + 13x - 650 \\
 &= x(x - 50) + 13(x - 50) \\
 &= (x - 50)(x + 13) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২১। 4x^4 - 25x^2 + 36$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &4x^4 - 25x^2 + 36 \\
 &= 4x^4 - 16x^2 - 9x^2 + 36 \\
 &= 4x^2(x^2 - 4) - 9(x^2 - 4) \\
 &= (x^2 - 4)(4x^2 - 9) \\
 &= \{(x)^2 - (2)^2\} \{(2x)^2 - (3)^2\} \\
 &= \{(x + 2)(x - 2)\} \{(2x + 3)(2x - 3)\} \\
 &= (x + 2)(x - 2)(2x + 3)(2x - 3) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২২। 12x^2 - 38x + 20$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &12x^2 - 38x + 20 \\
 &= 2(6x^2 - 19x + 10) \\
 &= 2(6x^2 - 15x - 4x + 10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\{3x(2x - 5) - 2(2x - 5)\} \\
 &= 2(2x - 5)(3x - 2) \\
 &= (2x - 5)(6x - 4) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ২৩। &9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2 \\
 \text{সমাধান: } &9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2 \\
 &= y^2(9x^2 - 5x - 14) \\
 &= y^2\{9x^2 + 9x - 14x - 14\} \\
 &= y^2\{9x(x + 1) - 14(x + 1)\} \\
 &= y^2(x + 1)(9x - 14) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২৪। 4x^4 - 27x^2 - 81$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &4x^4 - 27x^2 - 81 \\
 &= 4x^4 - 36x^2 + 9x^2 - 81 \\
 &= 4x^2(x^2 - 9) + 9(x^2 - 9) \\
 &= (4x^2 + 9)(x^2 - 9) \\
 &= (4x^2 + 9)\{(x)^2 - (3)^2\} \\
 &= (4x^2 + 9)(x + 3)(x - 3) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২৫। ax^2 + (a^2 + 1)x + a$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &ax^2 + (a^2 + 1)x + a \\
 &= ax^2 + a^2x + x + a \\
 &= ax(x + a) + 1(x + a) \\
 &= (x + a)(ax + 1) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২৬। 3(a^2 + 2a)^2 - 22(a^2 + 2a) + 40$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } &\text{মনে করি, } a^2 + 2a = x \\
 \text{প্রদত্ত রাশি, } &3x^2 - 22x + 40 \\
 &= 3x^2 - 12x - 10x + 40 \\
 &= 3x(x - 4) - 10(x - 4) \\
 &= (x - 4)(3x - 10) \\
 &= (a^2 + 2a - 4)\{3(a^2 + 2a) - 10\} \\
 &= (a^2 + 2a - 4)(3a^2 + 6a - 10) \\
 &= (a^2 + 2a - 4)(3a^2 + 6a - 10) \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$২৭। 14(x + z)^2 - 29(x + z)(x + 1) - 15(x + 1)^2$$

$$\text{সমাধান: মনে করি,}$$

$$x + z = a$$

$$x + 1 = b$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 14a^2 - 29ab - 15b^2$$

$$= 14a^2 - 35ab + 6ab - 15b^2$$

$$= 7a(2a - 5b) + 3b(2a - 5b)$$

$$= (2a - 5b)(7a + 3b)$$

$$= \{2(x + z) - 5(x + 1)\} \{7(x + z) + 3(x + 1)\}$$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$$= (2x + 2z - 5x - 5)(7x + 7z + 3x + 3)$$

$$= (2z - 3x - 5)(10x + 7z + 3) \text{ (Ans.)}$$

$$২৮। (4a - 3b)^2 - 2(4a - 3b)(a + 2b) - 35(a + 2b)^2$$

$$\text{সমাধান: মনে করি,}$$

$$4a - 3b = x$$

$$a + 2b = y$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^2 - 2xy - 35y^2$$

$$= x^2 - 7xy + 5xy - 35y^2$$

$$= x(x - 7y) + 5y(x - 7y)$$

$$= (x - 7y)(x + 5y)$$

$$= \{(4a - 3b) - 7(a + 2b)\} \{(4a - 3b) + 5(a + 2b)\}$$

$$= (4a - 3b - 7a - 14b)(4a - 3b + 5a + 10b)$$

$$= (-3a - 17b)(9a + 7b)$$

$$= -(3a + 17b)(9a + 7b) \text{ (Ans.)}$$

$$২৯। (a - 1)x^2 + a^2xy + (a + 1)y^2$$

$$\text{সমাধান:}$$

$$\text{মনে করি, } a - 1 = p$$

$$\text{এবং } a + 1 = q$$

$$(\text{গুণ করে}) a^2 - 1 = pq$$

$$\text{বা, } a^2 = pq + 1$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = px^2 + (pq + 1)xy + qy^2$$

$$= px^2 + pqxy + xy + qy^2$$

$$= px(x + 2y) + y(x + 2y)$$

$$= (x + 2y)(px + y)$$

$$= \{x + (a + 1)y\} \{(a - 1)x + y\} \quad [p \text{ ও } q \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= (x + ay + y)(ax - x + y)$$

$$= (x + ay + y)(ax - x + y) \text{ (Ans.)}$$

$$৩০ \mid 24x^4 - 3x$$

$$\text{সমাধান: } 24x^4 - 3x$$

$$= 3x(8x^3 - 1)$$

$$= 3x\{(2x)^3 - (1)^3\}$$

$$= 3x\{(2x - 1)\{(2x)^2 + 2x \cdot 1 + (1)^2\}\}$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)]$$

$$= 3x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \text{ (Ans.)}$$

$$৩১ \mid (a^2 + b^2)^3 + 8a^3b^3$$

$$\text{সমাধান: } (a^2 + b^2)^3 + 8a^3b^3$$

$$= (a^2 + b^2)^3 + (2ab)^3$$

$$= (a^2 + b^2 + 2ab)\{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 + b^2) \cdot 2ab + (2ab)^2\}$$

$$= (a + b)^2\{(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - 2a^3b - 2ab^3 + 4a^2b^2\}$$

$$= (a + b)^2\{(a^2)^2 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^3b - 2ab^3 + 4a^2b^2\}$$

$$= (a + b)^2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 2a^3b - 2ab^3) \text{ (Ans.)}$$

$$৩২ \mid x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$\text{সমাধান: } x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1$$

$$= (x)^3 + 3 \cdot (x)^2 \cdot 1 + 3x \cdot (1)^2 + (1)^3 + 1$$

$$= (x + 1)^3 + (1)^3$$

$$= (x + 1 + 1)\{(x + 1)^2 - (x + 1) \cdot 1 + (1)^2\}$$

$$= (x + 2)(x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1)$$

$$= (x + 2)(x^2 + x + 1) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৩ \mid a^3 - 6a^2 + 12a - 9$$

$$\text{সমাধান: } a^3 - 6a^2 + 12a - 9$$

$$= a^3 - 3a^2 - 3a^2 + 9a + 3a - 9$$

$$= a^2(a - 3) - 3a(a - 3) + 3(a - 3)$$

$$= (a - 3)(a^2 - 3a + 3) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৪ \mid a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$$

$$\text{সমাধান: } a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$$

$$= a^3 - 8b^3 - b^3 + (a + b)^3$$

$$= a^3 - b^3 + (a + b)^3 - 2b^3$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b - 2b)$$

$$\{a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2\}$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a^2 + 4ab + 7b^2)$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$$

$$= (a - b)(2a^2 + 5ab + 8b^2) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৫ \mid 8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$$

$$\text{সমাধান: } 8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$$

$$= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 - 64$$

$$= (2x + 1)^3 - (4)^3$$

$$= (2x + 1 - 4)\{(2x + 1)^2 + (2x + 1) \cdot 4 + (4)^2\}$$

$$= (2x - 3)(4x^2 + 4x + 1 + 8x + 4 + 16)$$

$$= (2x - 3)(4x^2 + 12x + 21) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৬ \mid 8a^3 + \frac{b^3}{27}$$

$$\text{সমাধান: } 8a^3 + \frac{b^3}{27}$$

$$= (2a)^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

$$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left\{(2a)^2 - 2a \cdot \frac{b}{3} + \left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}$$

$$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left(4a^2 - \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{6a + b}{3}\right)\left(\frac{36a^2 - 6ab + b^2}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{27}(6a + b)(36a^2 - 6ab + b^2) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৭ \mid a^3 - \frac{1}{8}$$

$$\text{সমাধান: } a^3 - \frac{1}{8}$$

$$= (a)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)\left\{(a)^2 + a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{2a - 1}{2}\right)\left(\frac{4a^2 + 2a + 1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৮ \mid \frac{a^6}{27} - b^6$$

$$\text{সমাধান: } \frac{a^6}{27} - b^6$$

$$= \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 - (b^2)^3$$

$$= \left(\frac{a^2}{3} - b^2\right)\left\{\left(\frac{a^2}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} \cdot b^2 + (b^2)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{a^2}{3} - b^2\right)\left(\frac{a^4}{9} + \frac{a^2b^2}{3} + b^4\right) \text{ (Ans.)}$$

$$৩৯ \mid 4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$$

$$\text{সমাধান: } 4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$$

$$= 4a^2 - 2 + \frac{1}{4a^2} + 4a - \frac{1}{a}$$

$$= (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2a} + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + 2\left(2a - \frac{1}{2a}\right)$$

$$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)^2 + 2\left(2a - \frac{1}{2a}\right)$$

$$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)\left(2a - \frac{1}{2a} + 2\right) \text{ (Ans.)}$$

$$80 \mid (3a+1)^3 - (2a-3)^3$$

$$\text{সমাধান: } (3a+1)^3 - (2a-3)^3$$

$$= \{(3a+1) - (2a-3)\} \{(3a+1)^2 + (3a+1)(2a-3) + (2a-3)^2\}$$

$$= (3a+1-2a+3) \{(3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 1 + 1^2 + (6a^2 - 9a + 2a - 3) + (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + (3)^2\}$$

$$= (a+4) \{9a^2 + 6a + 1 + 6a^2 - 7a - 3 + 4a^2 - 12a + 9\}$$

$$= (a+4) (19a^2 - 13a + 7) \text{ (Ans.)}$$

$$81 \mid (x+5)(x-9) - 15$$

$$\text{সমাধান: } (x+5)(x-9) - 15$$

$$= x^2 - 9x + 5x - 45 - 15$$

$$= x^2 - 4x - 60$$

$$= x^2 - 10x + 6x - 60$$

$$= x(x-10) + 6(x-10)$$

$$= (x-10)(x+6) \text{ (Ans.)}$$

$$82 \mid (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 48$$

$$\text{সমাধান: } (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 48$$

$$= (x+2)(x+5)(x+3)(x+4) - 48$$

$$= (x^2 + 5x + 2x + 10)(x^2 + 4x + 3x + 12)$$

$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 48$$

$$\text{মনে করি, } x^2 + 7x = x$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি, } (x+10)(x+12) - 48$$

$$= x^2 + 12x + 10x + 120 - 48$$

$$= x^2 + 22x + 72$$

$$= x^2 + 18x + 4x + 72$$

$$= x(x+18) + 4(x+18)$$

$$= (x+18)(x+4)$$

$$= (x^2 + 7x + 18)(x^2 + 7x + 4)$$

[$\because x$ এর মান বসিয়ে]

$$= (x^2 + 7x + 18)(x^2 + 7x + 4) \text{ (Ans.)}$$

$$83 \mid (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) - 65$$

$$\text{সমাধান: } (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) - 65$$

$$= (x-1)(x-7)(x-3)(x-5) - 65$$

$$= (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) - 65$$

$$\text{মনে করি, } x^2 - 8x = 1$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি: } (a+7)(a+15) - 65$$

$$= a^2 + 22a + 105 - 65$$

$$= a^2 + 22a + 40$$

$$= a^2 + 20a + 2a + 40$$

$$= a(a+20) + 2(a+20)$$

$$= (a+20)(a+2)$$

$$= (x^2 - 8 + 20)(x^2 - 8 + 2) [a \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

(Ans.)

$$88 \mid \text{দেখাও যে, } x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = (x+2)(x+3)(x+4)$$

$$\text{সমাধান:}$$

$$\text{বামপক্ষ} = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$$

$$= x^3 + 2x^2 + 26x + 24$$

$$= x^2(x+2) + 7x(x+2) + 12(x+2)$$

$$= (x+2)(x^2 + 7x + 12)$$

$$= (x+2)(x^2 + 3x + 4x + 12)$$

$$= (x+2)\{x(x+3) + 4(x+3)\}$$

$$= (x+2)(x+3)(x+4)$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হলো)}$$

$$89 \mid \text{দেখাও যে, } (x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)$$

$$= (3x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$$

$$\text{সমাধান:}$$

$$\text{বামপক্ষ} = (x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)$$

$$= (x+1)(3x-1)(x+2)(3x-4)$$

$$= (3x^2 - x + 3x - 1)(3x^2 - 4x + 6x - 8)$$

$$= (3x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$$

$$= (3x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হলো)}$$

□ অনুশীলনী- ৩.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$১ \mid x^3 - 21x - 20$$

$$\text{সমাধান: } x^3 - 21x - 20$$

$$\text{ধরি, } f(x) = x^3 - 21x - 20$$

$$\text{তাহলে } f(-1) = (-1)^3 - 21(-1) - 20$$

$$= -1 + 21 - 20$$

$$= -20 + 20 = 0$$

$$\therefore (x+1), f(x) \text{ এর একটি উৎপাদক}$$

$$\text{এখন, } x^3 - 21x - 20$$

$$= x^3 + x^2 - x^2 - x - 20x - 20$$

$$= x^2(x+1) - x(x+1) - 20(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2 - x - 20)$$

$$= (x+1)(x^2 - 5x + 4x - 20)$$

$$= (x+1)\{x(x-5) + 4(x-5)\}$$

$$= (x+1)(x-5)(x+4) \text{ (Ans.)}$$

$$২ \mid 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{সমাধান: } 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{ধরি, } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{তাহলে, } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1$$

$$= \frac{1 - 3 + 6 - 4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\therefore (2x-1), f(x) \text{ এর একটি উৎপাদক}$$

$$\text{এখন, } 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

[পৃষ্ঠা-৫৮]

$$= 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1$$

$$= x^2(2x - 1) - x(2x - 1) + 1(2x - 1)$$

$$= (2x - 1)(x^2 - x + 1) \text{ (Ans.)}$$

৩। $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

সমাধান: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

ধরি, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

তাহলে, $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$
 $= -1 + 6 - 11 + 6$

$\therefore (x + 1), f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$

$(x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$(x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x + 1)(x(x + 3) + 2(x + 3))$

$= (x + 1)(x + 3)(x + 2) \text{ (Ans.)}$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ১। $x^3 - x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: এখানে, $f(x) = x^3 - x - 6$ একটি বহুপদী। এর

ধ্রুবপদ - 6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ এবং ± 6 ।

এখন, $x = 1, -1$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না।

কিন্তু $x = 2$ বসিয়ে দেখি, $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $f(2) = 2^3 - 2 - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$

সুতরাং, $x - 2, f(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।

$\therefore f(x) = x^3 - x - 6$

$= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 2x + 2x - 6$

$= x^2(x - 2) + 2x(x - 2) - 6(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 2x - 6)$

উদাহরণ- ২। $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।

প্রদত্ত রাশিকে x -এর বহুপদী বিবেচনা করে

ধরি, $f(x) = x^3 - 3xy^2 + 2y^3$

তাহলে, $f(y) = y^3 - 3y.y^2 + 2y^3$
 $= y^3 - 3y^3 + 2y^3 = 0$

$\therefore (x - y), f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$

$= x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 - 2xy^2 + 2y^3$

$= x^2(x - y) + xy(x - y) - 2y^2(x - y)$

$= (x - y)(x^2 + xy - 2y^2)$

আবার,

ধরি, $g(y) = x^2 + xy - 2y^2$

$\therefore g(y) = y^2 + y^2 - 2y^2 = 0$

$\therefore (x - y), g(x)$ এর একটি উৎপাদক

$\therefore x^2 + xy - 2y^2$

$= x^2 - xy + 2xy - 2y^2$

$= x(x - y) + 2y(x - y)$

$= (x - y)(x + 2y)$

$\therefore x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = (x - y)^2(x + 2y) \text{ (Ans.)}$

উদাহরণ- ৩। $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$ কে উৎপাদকে

সমাধান: ধরি, $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

তাহলে, $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = 54\left(-\frac{1}{2}a\right)^4 + 27a\left(-\frac{1}{2}a\right)^3 -$

$16\left(-\frac{1}{2}a\right) - 8a = \frac{27}{8}a^4 - \frac{27}{8}a^4 + 8a - 8a = 0$

$\therefore x - \left(-\frac{1}{2}a\right) = x + \frac{a}{2}$

অর্থাৎ, $2x + a, f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$= 27x^3(2x + a) - 8(2x + a)$

$= (2x + a)(27x^3 - 8)$

$= (2x + a)\{(3x)^3 - (2)^3\}$

$= (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4) \text{ (Ans.)}$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৩.৪

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $6x^2 - 7x + 1$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= 6x^2 - 7x + 1$

মনে করি, $f(x) = 6x^2 - 7x + 1$ একটি বহুপদী

এখানে, $x = 1$ বসালে, $f(1) = 6.1^2 - 7.1 + 1$

$= 6 - 7 + 1$

$= 0$

সুতরাং $(x - 1), f(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।

এখন, $6x^2 - 7x + 1$

$= 6x^2 - 6x - x + 1$

$= 6x(x - 1) - 1(x - 1)$

$= (x - 1)(6x - 1)$

অতএব, নির্ণেয় উৎপাদক $= (x - 1)(6x - 1)$

২। $3a^3 + 2a + 5$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= 3a^3 + 2a + 5$

মনে করি, $f(a) = 3a^3 + 2a + 5$

এখানে, $a = -1$ বসালে, $f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1) + 5$

$= -3 - 2 + 5$

$= -5 + 5$

$= 0$

সুতরাং $(x + 1), f(a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক।

এখন, $3a^3 + 2a + 5$

$= 3a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 3a + 5a + 5$

$= 3a^2(a + 1) - 3a(a + 1) + 5(a + 1)$

$= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)$

অতএব, নির্ণেয় উৎপাদক $= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)$

৩। $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

মনে করি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

এখানে,

$x = -y$ বসালে, $f(-y) = (-y)^3 - 7(-y).y^2 - 6y^3$

$= -y^3 + 7y^3 - 6y^3$

$= 7y^3 - 6y^3$

$= y^3$

∴ $(x+y)$, $f(x)$ বহুপদটির একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

$$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$$

$$= x^2(x+y) - xy(x+y) - 6y^2(x+y)$$

$$= (x+y)(x^2 - xy - 6y^2)$$

$$= (x+y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2)$$

$$= (x+y)\{x(x-3y) + 2y(x-3y)\}$$

$$= (x+y)(x-3y)(x+2y)$$

অতএব, নির্ণেয় উৎপাদক $= (x+y)(x-3y)(x+2y)$

৪। $x^2 - 5x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^2 - 5x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^2 - 5x - 6$

এখানে, $x = 6$ বসালে, $f(6) = (6)^2 - 5(6) - 6$

$$= 36 - 30 - 6$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

∴ $(x-6)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^2 - 5x - 6$

$$= x^2 - 6x + x - 6$$

$$= x(x-6) + 1(x-6)$$

$$= (x-6)(x+1)$$

∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x-6)(x+1)$

৫। $2x^2 - x - 3$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= 2x^2 - x - 3$

মনে করি, $f(x) = 2x^2 - x - 3$

এখানে, $x = -1$ বসালে,

$$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 3$$

$$= 2 + 1 - 3$$

$$= 3 - 3$$

$$= 0$$

∴ $(x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$∴ x^2 - x - 3$$

$$= 2x^2 + 2x - 3x - 3$$

$$= 2x(x+1) - 3(x+1)$$

$$= (x+1)(2x-3)$$

∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x+1)(2x-3)$

৬। $3x^2 - 7x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= 3x^2 - 7x - 6$

মনে করি, $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$

এখানে, $x = 3$ বসালে, $f(3) = 3(3)^2 - 7(3) - 6$

$$= 27 - 21 - 6$$

$$= 0$$

∴ $(x-3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $3x^2 - 7x - 6$

$$= 3x^2 - 9x + 2x - 6$$

$$= 3x(x-3) + 2(x-3)$$

$$= (x-3)(3x+2)$$

∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x-3)(3x+2)$

৭। $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

এখানে, $x = 2$ বসালে, $f(2) = 2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6$

$$= 8 + 8 - 10 - 6$$

$$= 16 - 16$$

$$= 0$$

∴ $(x-2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$$= x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6$$

$$= x^2(x-2) + 4x(x-2) + 3(x-2)$$

$$= (x-2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$= (x-2)(x^2 + 3x + x + 3)$$

$$= (x-2)\{x(x+3) + 1(x+3)\}$$

$$= (x-2)(x+3)(x+1)$$

$$= (x-2)(x+3)(x+1)$$

$$∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x-2)(x+1)(x+3)$$$

$$৮। x^3 + 4x^2 + x - 6$$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 4x^2 + x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

এখানে, $x = 1$ বসালে, $f(1) = 1^3 + 4(1)^2 + 1 - 6$

$$= 1 + 4 + 1 - 6$$

$$= 6 - 6$$

$$= 0$$

∴ $(x-1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$$= x^3 - x^2 + 5x^2 - 5x + 6x - 6$$

$$= x^2(x-1) + 5x(x-1) + 6(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$= (x-1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$$

$$= (x-1)\{x(x+3) + 2(x+3)\}$$

$$= (x-1)(x+3)(x+2)$$

∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x-1)(x+3)(x+2)$

৯। $a^3 + 3a + 36$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= a^3 + 3a + 36$

মনে করি, $f(a) = a^3 + 3a + 36$

এখানে, $a = -3$ বসালে,

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) + 36$$

$$= -27 - 9 + 36$$

$$= -36 + 36$$

$$= 0$$

∴ $(a+3)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 + 3a + 36$

$$= a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 12a + 36$$

$$= a^2(a+3) - 3a(a+3) + 12(a+3)$$

$$= (a+3)(a^2 - 3a + 12)$$

∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (a+3)(a^2 - 3a + 12)$

১০। $a^4 - 4a + 3$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= a^4 - 4a + 3$

মনে করি, $f(a) = a^4 - 4a + 3$

এখানে, $a = 1$ বসালে, $f(1) = (1)^4 - 4(1) + 3$

$$= 1 - 4 + 3$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

∴ $(a-1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^4 - 4a + 3$

$$= a^4 - a^3 + a^2 - a^2 + a^2 - a - 3a + 3$$

$$= a^3(a-1) + a^2(a-1) + a(a-1) - 3(a-1)$$

$$= (a-1)(a^3 + a^2 + a - 3)$$

আবার, মনে করি, $f'(a) = a^3 + a^2 + a - 3$

এখানে, $a = 1$ বসালে, $f'(a) = (1)^3 + 1^2 + 1 - 3$

$$= 0$$

∴ $(a-1)$, $f'(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 + a^2 + a - 3$

$$= a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a + 3a - 3$$

$$= a^2(a-1) + 2a(a-1) + 3(a-1)$$

$$= (a-1)(a^2 + 2a + 3)$$

∴ নির্ণেয় উৎপাদক $= (a-1)(a-1)(a^2 + 2a + 3)$

১১। $a^3 - a^2 - 10a - 8$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= a^3 - a^2 - 10a - 8$

মনে করি, $f(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

এখানে, $a = -1$ বসালে,

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8 \\ &= -1 - 1 + 10 - 8 \\ &= 10 - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $(a+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$$= a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 8a - 8$$

$$= a^2(a+1) - 2a(a+1) - 8(a+1)$$

$$= (a+1)(a^2 - 2a - 8)$$

$$= (a+1)(a^2 - 2a - 8)$$

$$= (a+1)(a^2 - 4a + 2a - 8)$$

$$= (a+1)\{a(a-4) + 2(a-4)\}$$

$$= (a+1)(a-4)(a+2)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (a+1)(a-4)(a+2)$$

১২। $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

মনে করি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

এখানে, $x = 2$ বসালে, $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 \cdot 2 - 4$

$$= 8 - 12 + 8 - 4$$

$$= 16 - 16$$

$$= 0$$

∴ $(x-2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

$$= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4$$

$$= x^2(x-2) - x(x-2) + 2(x-2)$$

$$= (x-2)(x^2 - x + 2)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (x-2)(x^2 - x + 2)$$

১৩। $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

মনে করি, $f(a) = a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

এখানে, $a = b$ বসালে $f(b) = b^3 - 7b^3 + 7b^3 - b^3$

$$= 8b^3 - 8b^3$$

$$= 0$$

∴ $(a-b)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

$$= a^3 - a^2b - 6a^2b + 6a^2b^2 + ab^2 - b^3$$

$$= a^2(a-b) - 6ab(a-b) + b^2(a-b)$$

$$= (a-b)(a^2 - 6ab + b^2)$$

$$= (a-b)(a^2 - 6ab + b^2)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (a-b)(a^2 - 6ab + b^2)$$

১৪। $x^3 - x - 24$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 - x - 24$

মনে করি, $f(x) = x^3 - x - 24$

এখানে, $x = 3$ বসালে, $f(3) = (3)^3 - 3 - 24$

$$= 27 - 27$$

$$= 0$$

∴ $(x-3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - x - 24$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 8x - 24$$

$$= x^2(x-3) + 3x(x-3) + 8(x-3)$$

$$= (x-3)(x^2 + 3x + 8)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (x-3)(x^2 + 3x + 8)$$

১৫। $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

এখানে, $x = -y$ বসালে,

$$f(-y) = (-y)^3 - 6(-y)^2 \cdot y + 11(-y) \cdot y^2 + 6y^3$$

$$= -y^3 + 6y^3 - 11y^3 + 6y^3$$

$$= 12y^3 - 12y^3$$

$$= 0$$

∴ $(x+y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

$$= x^3 + x^2y + 5x^2y + 5xy^2 + 6xy^2 + 6y^3$$

$$= x^2(x+y) + 5xy(x+y) + 6xy^2(x+y)$$

$$= (x+y)(x^2 + 5xy + 6y^2)$$

$$= (x+y)(x^2 + 2xy + 3xy + 6y^2)$$

$$= (x+y)\{x(x+2y) + 3y(x+2y)\}$$

$$= (x+y)(x+2y)(x+3y)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (x+y)(x+2y)(x+3y)$$

১৬। $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

মনে করি, $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

এখানে, $x = 2$ বসালে, $f(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 - 2$

$$= 32 - 24 - 6 - 2$$

$$= 32 - 32$$

$$= 0$$

∴ $(x-2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

$$= 2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$$

$$= 2x^3(x-2) + x^2(x-2) + 2x(x-2) + 1(x-2)$$

$$= (x-2)(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x-2)\{x^2(2x+1) + 1(2x+1)\}$$

$$= (x-2)(2x+1)(x^2+1)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (x-2)(2x+1)(x^2+1)$$

১৭। $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

মনে করি, $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

এখানে, $x = -2$ বসালে,

$$f(-2) = 4(-2)^4 + 12(-2)^3 + 7(-2)^2 - 3(-2) - 2$$

$$= 4 \cdot 16 - 12 \cdot 8 + 28 + 6 - 2$$

$$= 64 - 96 + 28 + 6 - 2$$

$$= 98 - 98$$

$$= 0$$

∴ $(x+2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$$= 4x^4 + 8x^3 + 4x^3 + 8x^2 - x^2 - 2x - x - 2$$

$$= 4x^3(x+2) + 4x^2(x+2) - x(x+2) - 1(x+2)$$

$$= (x+2)(4x^3 + 4x^2 - x - 1)$$

$$= (x+2)\{4x^2(x+1) - 1(x+1)\}$$

$$= (x+2)(x+1)(4x^2 - 1)$$

$$= (x+2)(x+1)\{(2x)^2 - 1^2\}$$

$$= (x+2)(x+1)(2x+1)(2x-1)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1)$$

$$১৮। x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি = $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

$$= x(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$= x\{x^4(x-1) + x^2(x-1) + 1(x-1)\}$$

$$= x(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= x(x-1)\{(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + (1)^2 - x^2\}$$

$$= x(x-1)\{(x^2 + 1)^2 - (x)^2\}$$

$$= x(x-1)(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

$$= x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$১৯। 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

সমাধান:

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

$$\text{মনে করি, } f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

$$\text{এখানে } f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{4} - 1$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{64} - 5 \cdot \frac{1}{16} + \frac{5}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$$

$$= \frac{1 - 5 + 20 - 16}{16}$$

$$= \frac{21 - 21}{16}$$

$$= \frac{0}{16} = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{4} = 4x - 1, f(x) \text{ এর একটি উৎপাদক।}$$

$$\therefore 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

$$= 4x^3 - x^2 - 4x^2 + x + 4x - 1$$

$$= x^2(4x - 1) - x(4x - 1) + 1(4x - 1)$$

$$= (4x - 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (4x - 1)(x^2 - x + 1)$$

$$২০। 8x^3 + 15x^2 - x - 2$$

সমাধান:

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 8x^3 + 15x^2 - x - 2$$

$$\text{মনে করি, } f(x) = 8x^3 + 15x^2 - x - 2$$

$$\text{এখানে } f\left(\frac{1}{3}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 2$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{27} + 15 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 2$$

$$= \frac{8}{27} + \frac{15}{9} - \frac{1}{3} - 2$$

$$= \frac{8 + 45 - 9 - 54}{27}$$

$$= \frac{63 - 63}{27}$$

$$= \frac{0}{27} = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{3} = 3x - 1$$

$f(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\therefore 8x^3 + 15x^2 - x - 2$$

$$= 6x^2(3x - 1) + 7x(3x - 1) + 2(3x - 1)$$

$$= (3x - 1)(6x^2 + 7x + 2)$$

$$= (3x - 1)(6x^2 + 4x + 3x + 2)$$

$$= (3x - 1)\{2x(3x + 2) + 1(3x + 2)\} = (3x - 1)(3x + 2)(2x + 1)$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় উৎপাদক} = (3x - 1)(3x + 2)(2x + 1)$$

□ অনুশীলনী- ৩.৫

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

- কাজ-১: এক ব্যক্তি স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ঘণ্টায় ২ কি.মি. বেগে যেতে পারে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় ৩ কি.মি. হলে, স্রোতের অনুকূলে ৩২ কি.মি. যেতে তার কত সময় লাগে? [পৃষ্ঠা- ৬৩]

সমাধান: মনে করি,

দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.

এবং স্রোতের " " y কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে বেগ ঘণ্টায় $(x + y)$ কি.মি.

স্রোতের প্রতিকূলে বেগ ঘণ্টায় $(x - y)$ কি.মি.

দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় = ৩ কি.মি.

অর্থাৎ $y = 3$ কি.মি.

প্রশ্নানুসারে, $x - y = 2$

$$\text{বা, } x - 3 = 2$$

$$\text{বা, } x = 2 + 3$$

$$\therefore x = 5$$

$$\therefore \text{দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় } 5 \text{ কি.মি.}$$

$$\therefore \text{স্রোতের অনুকূলে বেগ ঘণ্টায় } (5 + 3) \text{ কি.মি.}$$

$$\text{বা, } 8 \text{ কি.মি.}$$

মনে করি, স্রোতের অনুকূলে ৩২ কি.মি. যেতে তার d ঘণ্টা সময় লাগবে।

জানা আছে, বেগ \times সময় = দূরত্ব

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } 8 \times d = 32$$

$$\text{বা, } d = \frac{32}{8}$$

$$\therefore d = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সময় } 4 \text{ ঘণ্টা}$$

□ কাজ-২: টাকায় 10টি লেবু বিক্রয় করায় $n\%$ ক্ষতি হয়। $z\%$ লাভ করতে হলে, টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করতে হবে?

[পৃষ্ঠা-৬৫]

সমাধান: মনে করি, 10টি লেবুর ক্রয়মূল্য p টাকা

$n\%$ ক্ষতিতে 10টি লেবুর বিক্রয়মূল্য

$$= (p - p \text{ এর } n\%) \text{ টাকা}$$

$$= \left(p - p \text{ এর } \frac{n}{100}\right) \text{ টাকা}$$

$$= \left(p - \frac{pn}{100}\right) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{100p - pn}{100} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{p(100 - n)}{100} \text{ টাকা}$$

$$\text{প্রশ্নমতে } = \frac{p(100 - n)}{100} = 1$$

$$\therefore p(100 - n) = 100$$

$$\therefore p = \frac{100}{100 - n}$$

$$\therefore 10 \text{টি লেবুর ক্রয়মূল্য } \frac{100}{100 - n} \text{ টাকা}$$

$$\therefore z\% \text{ লাভে } 10 \text{টি লেবুর বিক্রয়মূল্য}$$

$$= \left(\frac{100}{100 - n} + \frac{100}{100 - n} \text{ এর } z\%\right) \text{ টাকা}$$

$$= \left(\frac{100}{100 - n} + \frac{100}{100 - n} \text{ এর } \frac{z}{100}\right) \text{ টাকা}$$

$$= \left(\frac{100}{100 - n} + \frac{z}{100 - n}\right) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{100 + z}{100 - n} \text{ টাকা}$$

$$\frac{100 + z}{100 - n} \text{ টাকায় } 10 \text{টি লেবু বিক্রয় করলে,}$$

$$\text{টাকায় বিক্রয় করতে হবে } \frac{10(100 - n)}{100 + z} \text{ টি লেবু। (Ans.)}$$

বিকল্প সমাধান :

$n\%$ ক্ষতিতে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100 - n)$ টাকা

1 টাকায় বিক্রি করে 10টি লেবু

$$\therefore (100 - n) \text{ " " } 10(100 - n) \text{ টি লেবু}$$

আবার,

$z\%$ লাভে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100 + z)$

$\therefore z\%$ লাভ করতে হলে,

$(100 + z)$ টাকায় বিক্রি করতে হবে 10 $(100 - n)$ টি লেবু

$$1 \text{ " " " " } \frac{10(100 - n)}{100 + z} \text{ টি লেবু}$$

$$\text{সুতরাং টাকায় } \frac{10(100 - n)}{100 + z} \text{ টি লেবু বিক্রি করতে হবে।}$$

৩। বার্ষিক শতকরা $6\frac{1}{2}\%$ হার সরল মুনাফার 750 টাকার 4 টাকার সর্বমূল্য কত টাকা হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\text{সরল মুনাফার হার, } r = 6\frac{1}{2}\% = \frac{13}{2}\%$$

$$= \frac{13}{2 \times 100}$$

$$= \frac{13}{200}$$

মূলধন, $p = 750$ টাকা

সময়, $n = 4$ বছর

জানা আছে,

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$\text{সর্বমূল্য, } s = p(1 + nr)$$

$$= 750 \left(1 + 4 \times \frac{13}{200}\right) \text{ টাকা}$$

$$= 750 \left(1 + \frac{13}{50}\right) \text{ টাকা}$$

$$= 750 \times \frac{63}{50} \text{ টাকা}$$

$$945 \text{ টাকা (Ans.)}$$

৪। বার্ষিক 4 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 2000 টাকার 3 বছরের সর্বমূল্য নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\text{মুনাফার হার, } r = 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

মূলধন, $p = 2000$ টাকা।

সময়, $n = 3$ বছর।

জানা আছে,

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

$$\text{সর্বমূল্য, } c = p(1 + r)^n$$

$$= 2000 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^3$$

$$= 2000 \times \left(\frac{26}{25}\right)^3 \text{ টাকা}$$

$$= 2000 \times \frac{16}{25} \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{16 \times 26 \times 26 \times 26}{125} \text{ টাকা}$$

$$= 2249.728 \text{ টাকা (Ans.)}$$

PDF বইয়ের অনলাইন লাইব্রেরী

MyMahbub.Com

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৩.৫

- ১। $x^2 - 7x + 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?
ক) $(x-2)(x-3)$ খ) $(x-1)(x+8)$
গ) $(x-1)(x-6)$ ঘ) $(x+1)(x+6)$
উত্তর: গ) $(x-1)(x-6)$
- ২। $f(x) = x^2 - 4x + 4$ হলে, $f(2)$ এর মান নিচের কোনটি?
ক) 4 খ) 2
গ) 1 ঘ) 0
উত্তর: ঘ) 0
- ৩। $x + y = x - y$ হলে, y এর মান নিচের কোনটি?
ক) -1 খ) 0
গ) 1 ঘ) 2
উত্তর: খ) 0
- ৪। $\frac{x^2 + 3x^3}{x + 3x^2}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ নিচের কোনটি?
ক) x^2 খ) x
গ) 1 ঘ) 0
উত্তর: খ) x
- ৫। $\frac{1-x^2}{1-x}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ নিচের কোনটি?
ক) 1 খ) x
গ) $(1-x)$ ঘ) $(1+x)$
উত্তর: ঘ) $(1+x)$
- ৬। $\frac{1}{2} \left\{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \right\}$ এর মান নিচের কোনটি?
ক) $2(a^2 + b^2)$ খ) $a^2 + b^2$
গ) $2ab$ ঘ) $4ab$
উত্তর: গ) $2ab$
- ৭। $x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^3 + \frac{8}{x^3}$ এর মান কত?
ক) 1 খ) 8
গ) 9 ঘ) 16
উত্তর: গ) 9
- ৮। $p^4 + p^2 + 1$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি?
ক) $(p^2 - p + 1)(p^2 + p - 1)$
খ) $(p^2 - p - 1)(p^2 + p + 1)$
গ) $(p^2 + p + 1)(p^2 + p + 1)$
ঘ) $(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$
উত্তর: ঘ) $(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$
- ৯। $x^2 - 5x + 4$ এর উৎপাদক কত?
ক) $(x-1)(x-4)$ খ) $(x+1)(x-4)$
গ) $(x+2)(x-2)$ ঘ) $(x-5)(x-1)$
উত্তর: ক) $(x-1)(x-4)$
- ১০। $(x-7)(x-5)$ এর মান কত?
ক) $x^2 + 12x + 35$ খ) $x^2 + 12x - 35$
গ) $x^2 - 12x + 35$ ঘ) $x^2 - 12x - 35$
উত্তর: গ) $x^2 - 12x + 35$

- ১১। $\frac{2.9 \times 2.9 - 1.1 \times 1.1}{2.9 - 1.1}$ এর মান কত?
ক) 1.8 খ) 1.9
গ) 2 ঘ) 4
উত্তর: ঘ) 4
- ১২। যদি $x = 2 - \sqrt{3}$ হয়, তবে x^2 এর মান কত?
ক) 1 খ) $7 - 4\sqrt{3}$
গ) $2 + \sqrt{3}$ ঘ) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$
উত্তর: খ) $7 - 4\sqrt{3}$
- ১৩। $f(x) = x^2 - 5x + 6$ এবং $f(x) = 0$ হলে $x =$ কত?
ক) 2, 3 খ) -5, 1
গ) -2, 3 ঘ) 1, -5
উত্তর: ক) 2, 3
- ১৪।
- | | | |
|------|-------|-------|
| | x | $+6$ |
| x | x^2 | $+6x$ |
| -5 | $-5x$ | -30 |
- ওপরের চিত্রের সর্বমোট ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?
ক) $x^2 - 5x + 30$ খ) $x^2 + x - 30$
গ) $x^2 + 6x - 30$ ঘ) $x^2 - x + 30$
উত্তর: খ) $x^2 + x - 30$
- ১৫। ক যে কাজ x দিনে সম্পন্ন করতে পারে, খ সে কাজ 3x দিনে সম্পন্ন করতে পারে। একই সময়ে ক, খ এর কত গুণ কাজ করে?
ক) 2 গুণ খ) $2\frac{1}{2}$ গুণ
গ) 3 গুণ ঘ) 4 গুণ
উত্তর: গ) 3 গুণ
- ১৬। $a + b = -c$ হলে, $a^2 + 2ab + b^2$ এর মান c এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে?
ক) $-c^2$ খ) c^2
গ) bc ঘ) ca
উত্তর: খ) c^2
- ১৭। $x + y = 3, xy = 2$ হলে, $x^3 + y^3$ এর মান কত?
ক) 9 খ) 18
গ) 19 ঘ) 27
উত্তর: ক) 9
- ১৮। $8x^3 + 27y^3$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?
ক) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
খ) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
গ) $(2x - 3y)(4x^2 - 9y^2)$
ঘ) $(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2)$
উত্তর: খ) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- ১৯। $9x^2 + 16y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে?
ক) $6xy$ খ) $12xy$
গ) $24xy$ ঘ) $144xy$
উত্তর: গ) $24xy$

২০। $x - y = 4$ হলে, নিচের কোন উক্তিটি সঠিক?

ক) $x^3 - y^3 - 4xy = 65$ খ) $x^3 - y^3 - 12xy = 12$

গ) $x^3 - y^3 - 3xy = 64$ ঘ) $x^3 - y^3 - 12xy = 64$

উত্তর : ঘ) $x^3 - y^3 - 12xy = 64$

২১। $x^4 - x^2 + 1 = 0$ হয় তবে

১. $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ কত?

ক) 4 খ) 2

গ) 1 ঘ) 0

উত্তর : গ) 1

২. $(x + \frac{1}{x})^3$ এর মান কত?

ক) 4 খ) 3

গ) 2 ঘ) 1

উত্তর : ঘ) 3

৩. $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ কত?

ক) 3 খ) 2

গ) 1 ঘ) 0

উত্তর : ঘ) 0

২২। ক একটি কাজ p দিনে করে এবং খ $2p$ দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?

সমাধান : ধরি, কাজটি সর্বমোট x দিনে শেষ হয়।

\therefore ক ও খ একত্রে কাজ করে $(x - r)$ দিন এবং খ একা করে r দিন।

ক এক দিনে করে কাজটির $\frac{1}{p}$ অংশ কাজ

খ এক দিনে করে কাজটির $\frac{1}{2p}$ অংশ কাজ

ক ও খ একত্রে একদিনে করে কাজটির $(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p})$ অংশ
 $= \frac{3}{2p}$ অংশ

\therefore ক ও খ একত্রে $(x - r)$ দিনে করে কাজটির $\frac{3(x - r)}{2p}$ অংশ

খ একা r দিনে করে কাজটির $\frac{r}{2p}$ অংশ

প্রশ্নমতে, [(ক + খ) এর $(x - r)$ দিনের কাজ]

+ [খ এর r দিনের কাজ] = [সম্পূর্ণ কাজ]

$\therefore \frac{3(x - r)}{2p} + \frac{r}{2p} = 1$

বা, $\frac{3(x - r) + r}{2p} = 1$

বা, $\frac{3x - 3r + r}{2p} = 1$

বা, $3x - 2r = 2p$ [আড় গুণন করে]

বা, $3x = 2p + 2r$

$\therefore x = \frac{2(p + r)}{3}$

$\therefore \frac{2(p + r)}{3}$ দিনে কাজটি শেষ হয়েছিল। (Ans.)

২৩। দৈনিক ৪ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ৫০ জন লোক একটি কাজ ১২ দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করে ৬০ জনে ১৬ দিনে ঐ কাজ করতে পারবে?

সমাধান : ৫০ জন লোকে একটি কাজ ১২ দিনে শেষ করে দৈনিক ৪ ঘণ্টা পরিশ্রম করে

$\therefore 1 \text{ " " " " " } 12 \text{ " " " " " } = 8 \times 50 \text{ " " " " "}$

$\therefore 1 \text{ " " " " " } 1 \text{ " " " " " } = 8 \times 50 \times 12 \text{ " " " " "}$

$\therefore 60 \text{ " " " " " } 16 \text{ " " " " " } = \frac{8 \times 50 \times 12}{80 \times 16} \text{ " " " " "}$

$= 5 \text{ ঘণ্টা পরিশ্রম করে}$

২৪। মিতা একটি কাজ x দিনে করতে পারে। রিতা সে কাজ y দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

সমাধান: মনে করি, সম্পূর্ণ কাজের পরিমাণ = 1

এখন, মিতা x দিনে করে 1টি কাজ

\therefore " 1 " " $\frac{1}{x}$ অংশ কাজ

আবার, রিতা y দিনে করে 1টি কাজ

\therefore " 1 " " $\frac{1}{y}$ অংশ "

(মিতা + রিতা) একত্রে 1 দিনে করে $= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ অংশ কাজ
 $= \frac{x+y}{xy}$ " "

(মিতা + রিতা) একত্রে $\frac{x+y}{xy}$ অংশ কাজ করে 1 দিনে

\therefore " " 1 বা সম্পূর্ণ " " " $= \frac{xy}{x+y}$ " "
 $= \frac{xy}{x+y}$ দিনে

অতএব, তারা $\frac{xy}{x+y}$ দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

২৫। বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কত জন যাত্রী গিয়েছিল।

সমাধান: মনে করি, বনভোজনে যাওয়ার জন্য আগ্রহী যাত্রী সংখ্যা = x

\therefore মাথাপিছু ভাড়া হত $= \frac{5700}{x}$ টাকা

5 জন না আসায় যাত্রী সংখ্যা হল $= x - 5$

\therefore মাথাপিছু ভাড়া হল $= \frac{5700}{x-5}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{5700}{x-5} = \frac{5700}{x} + 3$

বা, $\frac{5700}{x-5} - \frac{5700}{x} = 3$

বা, $5700 \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x} \right) = 3$

বা, $5700 \left(\frac{x - (x-5)}{x(x-5)} \right) = 3$

বা, $5700 \left(\frac{5}{x(x-5)} \right) = 3$

বা, $\frac{5 \times 5700}{x(x-5)} = 3$

বা, $\frac{5 \times 5700}{x^2 - 5x} = 3$

বা, $\frac{1900 \times 5}{x^2 - 5x} = 1$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - 5x = 9500$

বা, $x^2 - 5x - 9500 = 0$

বা, $x^2 - 5x - 9500 = 0$

বা, $x^2 - 100x + 95x - 9500 = 0$

বা, $x(x-100) + 95(x-100) = 0$

বা, $(x-100)(x+95) = 0$

হয়, $x-100 = 0$

$x = 100$

$\therefore x = 100$

$x+95 = 0$

$x = -95$

গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ যাত্রী

সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না

অতএব, বাসে গিয়েছিল $(100 - 5) = 95$ জন যাত্রী।

২৬। একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘন্টায় d কি. মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘন্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

সমাধান: স্রোতের প্রতিকূলে p ঘন্টায় যায় d কি. মি. পথ

\therefore " " 1 " " $= \frac{d}{p}$ " "

আবার, স্রোতের অনুকূলে 2 ঘন্টায় যায় d কি. মি. পথ

\therefore " " 1 " " $= \frac{d}{q}$ " "

মনে করি, স্রোতের বেগ ঘন্টায় $= y$ কি. মি

এবং স্থির পানিতে নৌকার বেগ $= x$ কি. মি

প্রশ্নমতে, $x + y = \frac{d}{q}$ (i)

$x - y = \frac{d}{p}$ (ii)

এখন, সমীকরণ (i ও ii) যোগ করে পাই, $2x = \frac{d}{q} + \frac{d}{p}$

বা, $2x = d \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right)$

$\therefore x = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right)$

আবার, সমীকরণ (i ও ii) বিয়োগ করে পাই,

$2y = \left(\frac{d}{q} - \frac{d}{p} \right)$

বা, $2y = d \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$

$\therefore y = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$

অতএব, নৌকার বেগ ঘন্টায় $\frac{d}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right)$ কি. মি.

এবং স্রোতের বেগ ঘন্টায় $\frac{d}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$ কি. মি.

PDF বইয়ের অনলাইন লাইব্রেরী

MyMahbub.Com

২৭। একজন মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কি.মি. যেতে এক সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কি.মি. যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কি.মি. যায়। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.

নৌকার বেগ ঘণ্টায় y কি.মি.

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{15}{x+y} + \frac{15}{x-y} = 4$$

$$\text{বা, } \frac{15(x-y) + 15(x+y)}{(x+y)(x-y)} = 4$$

$$\text{বা, } 15x - 15y + 15x + 15y = 4(x+y)(x-y)$$

$$\text{বা, } 30x = 4(x^2 - y^2)$$

$$\text{বা, } 15x = 2(x^2 - y^2) \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{আবার, } \frac{5}{x+y} = \frac{3}{x-y}$$

$$\text{বা, } 5x - 5y = 3x + 3y$$

$$\text{বা, } 5x - 3x = 3y + 5y$$

$$\text{বা, } 2x = 8y$$

$$\text{বা, } x = 4y \dots\dots\dots (ii)$$

(ii) নং সমীকরণ থেকে x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$15 \times 4y = 2\{(5y)^2 - y^2\}$$

$$\text{বা, } 60y = 2(16y^2 - y^2)$$

$$\text{বা, } 60y = 2 \times 15y^2$$

$$\text{বা, } 60y = 30y^2$$

$$\text{বা, } 2 = y$$

$$\therefore y = 2$$

এখন, y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসাই,

$$x = 4 \times 2$$

$$= 8$$

\therefore নির্ণয় দাঁড়ের বেগ 8 কি.মি. (ঘণ্টা)

এবং স্রোতের বেগ 2 কি.মি. (ঘণ্টা)।

২৮। একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা t_2 মিনিটে খালি হয়। নল দুটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে? (এখানে $t_1 > t_2$)

সমাধান: ১ম নল দ্বারা, t_1 মিনিটে পূর্ণ হয়। (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

$$\therefore 1 \text{ " " " } \frac{1}{t_1} \text{ " "}$$

আবার, ২য় নল দ্বারা, t_2 মিনিটে খালি হয়। (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

$$\therefore 1 \text{ " " " } \frac{1}{t_2} \text{ " "}$$

দুইটি নল একত্রে খুলে দিলে ১ মিনিটে পূর্ণ হয়

$$= \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right)$$

$$= \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} \text{ ট্যাঙ্ক}$$

দুইটি নল একত্রে খুলে দিলে $\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}$ ট্যাঙ্ক পূর্ণ হয় = 1 মিনিটে

$$\therefore \text{ " " " " " } 1 \text{ বা সম্পূর্ণ " " } = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1}$$

\therefore নির্ণয় ট্যাঙ্কটি $\frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1}$ মিনিটে পূর্ণ হবে।

২৯। একটি নল দ্বারা 12 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। অপর একটি নল দ্বারা 1 মিনিটে তা থেকে 15 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় এবং চৌবাচ্চাটি 48 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

সমাধান: মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ করে এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়।

$$\therefore y = 12x$$

$$\text{বা, } x = \frac{y}{12} \quad \text{--- (i)}$$

আবার, দুইটি নল দ্বারা 48 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়।

$$\therefore y = 48x - 48 \times 15 \quad \text{--- (ii)}$$

x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসাই,

$$y = 48 \times \frac{y}{12} - 720$$

$$\text{বা, } y = 4y - 720$$

$$\text{বা, } 4y - y = 720$$

$$\text{বা, } 3y = 720$$

$$\text{বা, } y = \frac{720}{3} = 240$$

$$\therefore y = 240$$

\therefore চৌবাচ্চাটিতে মোট 240 লিটার পানি ধরে।

৩০। একটি কলম 11 টাকায় বিক্রয় করলে 10% লাভ হয়। কলমটির ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান: 10% লাভে ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য

$$= (100 + 10) \text{ টাকা}$$

$$= 110 \text{ টাকা}$$

$$\text{বিক্রয়মূল্য 110 টাকা হলে ক্রয়মূল্য} = 100 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{ " " 1 " " " " } = \frac{100}{110} \text{ "}$$

$$\therefore \text{ " " 11 " " " " } = \frac{100 \times 11}{110} \text{ টাকা}$$

$$= 10 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় কলমটির ক্রয়মূল্য 10 টাকা।

৩১। একটি খাতা 36 টাকায় বিক্রয় করায় যত ক্ষতি হলো, 72 টাকায় বিক্রয় করলে তার দ্বিগুণ লাভ হতো, খাতাটির ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান: মনে করি, খাতাটির ক্রয়মূল্য $= x$ টাকা

এখন, 36 টাকায় বিক্রয় করলে ক্ষতি হয় $= (x - 36)$ টাকা

$$72 \text{ " " " লাভ হয়} = (72 - x) \text{ "}$$

$$\text{শর্তমতে, } (x - 36) \times 2 = 72 - x$$

$$\text{বা, } 2x - 72 = 72 - x$$

$$\text{বা, } 2x + x = 72 + 72$$

$$\text{বা, } 3x = 144$$

$$\text{বা, } x = \frac{144}{3}$$

$$\therefore x = 48 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় খাতাটির ক্রয়মূল্য 48 টাকা।

৩২। ক, খ ও গ এর মধ্যে 260 টাকা একত্রে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের 2 গুণ, খ এর অংশের 3 গুণ এবং গ এর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

সমাধান: মনে করি, ক এর অংশ $\times 2 =$ খ এর অংশ $\times 3 =$ গ এর অংশ $\times 4 = x$ টাকা

$$\therefore \text{ 'ক' এর অংশ} = \frac{x}{2} \text{ টাকা;}$$

$$\text{ 'খ' এর অংশ} = \frac{x}{3} \text{ টাকা;}$$

$$\text{ 'গ' এর অংশ} = \frac{x}{4} \text{ টাকা;}$$

$$\therefore \text{ প্রশ্নমতে, } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 260$$

$$\text{বা, } \frac{6x + 4x + 3x}{12} = 260$$

$$\text{বা, } \frac{13x}{12} = 260$$

$$\text{বা, } 13x = 260 \times 12$$

$$\text{বা, } x = \frac{260 \times 12}{13}$$

$$\therefore x = 240$$

$$\therefore \text{ 'ক' এর অংশ} = \frac{240}{2} \text{ টাকা} = 120 \text{ টাকা}$$

$$\text{ 'খ' এর অংশ} = \frac{240}{3} \text{ টাকা} = 80 \text{ টাকা}$$

$$\text{ 'গ' এর অংশ} = \frac{240}{4} \text{ টাকা} = 60 \text{ টাকা}$$

উত্তর : 120 টাকা, 80 টাকা, 60 টাকা।

৩৩। একটি দ্রব্য $x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, $3x\%$ লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে $18x$ টাকা বেশি পাওয়া যায়, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ছিল?

সমাধান: মনে করি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য $= 100$ টাকা

তাহলে, $x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $= (100 - x)$ টাকা

আবার, $3x\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $= (100 + 3x) \text{ "}$

\therefore পূর্বাপেক্ষা বিক্রয়মূল্য বেশি

$$= \{(100 + 3x) - (100 - x)\} \text{ টাকা}$$

$$= (100 + 3x - 100 + x)$$

$$= 4x \text{ টাকা}$$

এখন, বিক্রয়মূল্য $4x$ টাকা হলে ক্রয়মূল্য $= 100$ টাকা

$$\text{ " 1 " " " " } = \frac{100}{4x} \text{ টাকা}$$

$$\text{ " 25 " " " " } = \frac{100 \times 25}{4x}$$

$$\text{ " 18x " " " " } = \frac{100 \times 18x}{4x}$$

$$= 450 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 450 টাকা।

৩৪। 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 148 টাকা হলে শতকরা মুনাফার হার কত?

সমাধান : একই হার মুনাফার, 300 টাকার 4 বছরের মুনাফা = 100 টাকার (3×4) বছর বা 12 বছরের মুনাফা
আবার, 400 টাকার 5 " " = 100 টাকার (4×5) " বা 20 বছরের মুনাফা

যেহেতু উভয় টাকার মুনাফা একত্রে 148 দেয়া আছে

\therefore 100 টাকার $(12 + 20)$ বছরের বা 32 বছরের মুনাফা 148 টাকা

অতএব, 100 টাকার 32 বছরের মুনাফা 148 টাকা

$$\therefore 100 \text{ " } 1 \text{ " " } = \frac{148}{32} \\ = 4.625 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় সুদের হার 4.625%

৩৫। 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মূলধন কত?

সমাধান : মনে করি, মূলধন = 100 টাকা

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে আমরা জানি, $I = Pnr$

এখানে, বিনিয়োগ কাল, $n = 2$ বছর

মূলধন = 100 টাকা

মুনাফার হার, $r = 4\% = \frac{4}{100}$

$$\therefore I = 100 \times 2 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ টাকা}$$

চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে C সবৃদ্ধি মূলধন হলে,

$$C = P(1 + r)^n$$

$$= 100 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$$

$$= 100 \left(\frac{100 + 4}{100}\right)^2$$

$$= 100 \left(\frac{104}{100}\right)^2$$

$$= 100 \times (1.04)^2$$

$$= 100 \times 1.04 \times 1.04$$

$$= 108.16 \text{ টাকা}$$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = সবৃদ্ধি মূলধন - মূলধন

$$= (108.16 - 100.00) \text{ টাকা}$$

$$= 8.16 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{মুনাফার পার্থক্য} = (8.16 - 8.00) \text{ টাকা} \\ = 0.16 \text{ টাকা}$$

এখন, মুনাফার পার্থক্য 0.16 টাকা হলে মূলধন = 100 টাকা

$$\text{" " } 1 \text{ " " " } = \frac{100 \times 100}{16}$$

$$= 625 \text{ টাকা}$$

অতএব, নির্ণেয় মূলধন = 625 টাকা।

৩৬। কোনো আসল 3 বছরে সরল মুনাফাসহ 460 টাকা এবং 5 বছরে সরল মুনাফাসহ 600 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?

সমাধান : এখানে, 5 বছরে মুনাফাসহ আসল = 600 টাকা

$$\text{এবং } 3 \text{ " " " } = 460 \text{ "}$$

$$(-) \text{ করে } 2 \text{ বছরে মুনাফা} = 140 \text{ টাকা}$$

$$\therefore 2 \text{ বছরে মুনাফা} = 140 \text{ টাকা}$$

$$\therefore 1 \text{ " " } = \frac{140}{2}$$

$$\therefore 3 \text{ " " } = \frac{140 \times 3}{2}$$

$$= 210 \text{ টাকা}$$

$$3 \text{ বছরের মুনাফাসহ আসল} = 460 \text{ টাকা}$$

$$3 \text{ " " মুনাফা} = 210 \text{ "}$$

$$(-) \text{ করে আসল} = 250 \text{ টাকা}$$

$$\therefore 250 \text{ টাকায় } 3 \text{ বছরের মুনাফা} = 210 \text{ টাকা}$$

$$\therefore 250 \text{ " } 1 \text{ " " } = \frac{210}{3}$$

$$\therefore 1 \text{ " } 1 \text{ " " } = \frac{210}{3 \times 250}$$

$$\therefore 100 \text{ " } 1 \text{ " " } = \frac{210 \times 100}{3 \times 250}$$

$$= \frac{700}{25}$$

$$= 28 \text{ টাকা}$$

\therefore সুতরাং শতকরা মুনাফার হার 28 টাকা বা 28% (Ans.)

৩৭। শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকা 13 বছরে সবৃদ্ধিমূল 985 টাকা হবে?

সমাধান : আমরা জানি, $S = P(1 + nr)$

এখানে, S = সরল মুনাফার সবৃদ্ধিমূল = 985

n = মোট সময় = 13 বছর

r = শতকরা মুনাফার হার = 5 টাকা

$$\therefore r = \frac{S}{100} = \frac{5}{100}$$

$$P = \text{মূলধন} = ?$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 985 = P \left(1 + 13 \times \frac{5}{100}\right)$$

$$\text{বা, } 985 = P \left(\frac{100 + 65}{100}\right)$$

$$\text{বা, } 985 = P \left(\frac{165}{100}\right)$$

$$\text{বা, } 985 = P(1.65)$$

$$\text{বা, } p = \frac{985}{1.65}$$

$$= 596.969$$

$$= 596.97 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় মূলধন = 596.97 টাকা (প্রায়)

৩৮। শতকরা বার্ষিক ৫ টাকা হার মুনাফায় কত টাকা ১২ বছরে সঞ্চয়মূল ১২৪৮ টাকা হবে?

সমাধান: আমরা জানি, $S = p(1 + nr)$

এখানে, S = সরল মুনাফায় সঞ্চয়মূল = ১২৪৮ টাকা

n = মোট সময় = ১২ বছর

s = শতকরা মুনাফার হার = ৫ টাকা

$$\therefore r = \frac{S}{100} = \frac{5}{100}$$

P = মূলধন = ?

$$\therefore \text{প্রশ্নমতে, } 1248 = P \left(1 + 12 \times \frac{5}{100} \right)$$

$$\text{বা, } 1248 = P \left(\frac{100 + 60}{100} \right)$$

$$\text{বা, } 1248 = P \left(\frac{160}{100} \right)$$

$$\text{বা, } 1248 = P (1.60)$$

$$\text{বা, } P = \frac{1248}{1.60}$$

$$= 780 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় মূলধন = ৭৮০ টাকা।

৩৯। ১৫% হার মুনাফায় ৮০০০ টাকার ৩ বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সঞ্চয়মূল, $C = P(1 + r)^n$

এখানে, বিনিয়োগ কাল, $n = 3$ বছর

মূলধন, $P = 8000$ বছর

মুনাফার হার, $r = 5\% = \frac{5}{100}$

$$\therefore C = 8000 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^3$$

$$= 8000 \left(\frac{105}{100} \right)^3$$

$$= 8000(1.05)^3$$

$$= 9261$$

\therefore সঞ্চয়মূল = ৯২৬১ টাকা

\therefore চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = $(9261 - 8000)$ টাকা

$$= 1261 \text{ টাকা।}$$

আবার,

আমরা জানি, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে সুদ, $I = Pnr$

এখানে, P = মূলধন = ৮০০০ টাকা

n = সময় = ৩ বছর

r = মুনাফার হার = ৫%

$$= \frac{5}{100}$$

$$\therefore I = 8000 \times 3 \times \frac{5}{100}$$

$$= 1200 \text{ টাকা}$$

\therefore সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য

$$= (1261 - 1200)$$

$$= 61 \text{ টাকা (Ans.)}$$

৪০। মিষ্টির উপর মূল্য সংযোজন কর (VAT) $x\%$ । একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ P টাকার মিষ্টি বিক্রয় করলে তাকে কত ভ্যাট দিতে হবে? $x = 15$, $P = 2300$ হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত?

সমাধান: এখানে, ১০০ টাকার ভ্যাট = x টাকা

\therefore ভ্যাটসহ বিক্রয়মূল্য = $(100 + x)$ টাকা

এখন, বিক্রয়মূল্য $(100 + x)$ টাকা হলে ভ্যাট দিতে হয় x টাকা

$$\therefore \frac{1}{100 + x} = \frac{x}{100 + x}$$

$$\therefore \frac{P}{100 + x} = \frac{Px}{100 + x}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভ্যাটের পরিমাণ} = \frac{Px}{100 + x} \text{ টাকা}$$

আবার, $x = 15$, $P = 2300$ হলে,

$$\text{ভ্যাটের পরিমাণ} = \frac{Px}{100 + x}$$

$$= \frac{2300 \times 15}{100 + 15}$$

$$= \frac{34500}{115}$$

$$= 300 \text{ টাকা}$$

\therefore নির্ণেয় ভ্যাটের পরিমাণ = ৩০০ টাকা।

৪১। কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি ৩।

ক. সংখ্যাটি x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$

সমাধান: ক. মনে করি, সংখ্যাটি x

সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত রাশি $\frac{1}{x}$

$$\therefore \text{শর্তমতে, } x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{খ. } x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{আমরা জানি, } \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = (3)^2 - 4$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 9 - 4$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

$$= \left(x - \frac{1}{x} \right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$= (\sqrt{5})^3 + 3 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

\therefore নির্ণেয় মান $8\sqrt{5}$

গ. L.H.S = $x + \frac{1}{x} = 3$

এবং $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ ['ক' এবং 'খ' হতে]

$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2}) = (x - \frac{1}{x})^2 = 2 \times \frac{1}{x}$

$= (\sqrt{5})^2 + 2 = 5 + 2 = 7$

$\therefore (x^3 + \frac{1}{x^3}) = (x + \frac{1}{x})^3 - 3 \times x \times \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x})$
 $= 3^3 - 3 \times 3 = 27 - 9 = 18$

$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2}) (x^3 + \frac{1}{x^3}) = 7 \times 18$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 126$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 126 - (x + \frac{1}{x})$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 126 - 3$

$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$ (প্রমাণিত)

৪২। কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার ১০০ গুণ টাকা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু ৪ জন সদস্য টাকা না দেওয়ায় প্রত্যেকের টাকার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে ৫০০ টাকা বেড়ে গেল।

ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং টাকার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. মোট টাকার $\frac{1}{4}$ অংশ ৫% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা ৪% হারে ২ বছরের জন্যে সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান: ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা x

\therefore প্রত্যেক টাকা দেয় $100x$ টাকা

$\therefore A = x \cdot 100x$ টাকা $= 100x^2$ টাকা

খ. ৪ জন সদস্য টাকা না দেওয়ায় টাকার পরিমাণ $(x - 4)$ সদস্যের সংখ্যা $(x - 4)$

প্রত্যেকে টাকা প্রদান করেন $(100x + 500)$ টাকা।

সুতরাং মোট টাকার পরিমাণ $= (x - 4)(100x + 500)$

\therefore প্রথমতে,

$100x^2 = (x - 4)(100x + 500)$

বা, $100x^2 = 100x^2 - 400x + 500x - 2000$

বা, $100x = 2000$

$\therefore x = 20$

অর্থাৎ সমিতির সদস্য সংখ্যা ২০ জন

এবং মোট টাকার পরিমাণ $= 100 \times (20)^2$ টাকা
 $= 40,000$ টাকা

সুতরাং সদস্য সংখ্যা ২০ জন এবং টাকার পরিমাণ ৪০,০০০ টাকা। (Ans.)

গ. 'খ' হতে পাই, সদস্যের মোট টাকার পরিমাণ ৪০,০০০ টাকা।

৪০,০০০ টাকার $\frac{1}{4}$ অংশ $= 40,000 \times \frac{1}{4}$ টাকা
 $= 10,000$ টাকা

বাকি টাকা $= (40,000 - 10,000)$ টাকা
 $= 30,000$ টাকা

এখানে, $P_1 = 10,000$ টাকা

$P_2 = 30,000$ টাকা

$n_1 = 2$ বছর

$n_2 = 2$ বছর

$r_1 = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$

$r_2 = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04$

মোট মুনাফা $= P_1 n_1 r_1 + P_2 n_2 r_2$

$= 10,000 \times 2 \times 0.05 +$

$30,000 \times 2 \times 0.04$ টাকা

$= 1,000 + 2,400 = 3,400$ টাকা

\therefore নির্ণেয় মোট মুনাফা ৩,৪০০ টাকা।



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $5 - 4x - x^2$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]

ক $(x + 2)(x + 3)$ খ $(5 + x)(1 - x)$ (ব)

গ $(5 - x)(1 - x)$ ঘ $(1 - x)(x + 4)$

২. $\frac{1}{2} \{(x + y)^2 + (x - y)^2\}$ এর মান নিচের কোনটি?

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]

ক $2(x^2 + y^2)$ খ $2xy$ (গ)

গ $x^2 + y^2$ ঘ $4xy$

৩. $a^3 - a^2 - 10^3 - 8$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ কোনটি?

[ডা. খান্দের সরকারি বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক $(a + 1)(a - 4)(a + 2)$

খ $(a - 1)(a + 4)(a + 2)$

গ $(a + 1)(a + 4)(a - 2)$

ঘ $(a - 1)(a - 4)(a + 2)$

৪. $9x^2 + 25y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে? [ডা. খান্দের সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক $30xy$ খ $15xy$ (ক)

গ $24xy$ ঘ $12xy$

৫. xy এর সঠিক মান নিচের কোনটি?

[ডা. খান্দের সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ (ঘ)

খ $(x + y)^2 + (x - y)^2$

গ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

ঘ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা-

- মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ধনাত্মক পূর্ণ-সার্থক সূচক, শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ-সার্থক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সূচকের নিয়মাবলি বর্ণনা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- n তম মূল ও মূলদ সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লগারিদমের সূত্রাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সাধারণ ও স্বাভাবিক লগারিদম নির্ণয় করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

সূচক : n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণফল যদি a^n হয় তাহলে n কে a এর সূচক এবং a কে n এর ভিত্তি বলে।

□ প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি :

- $a^n = a \times a \times a \times \dots (n \text{ সংখ্যক } a)$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$
- $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $a^x = a^y$ হলে, $x = y$ [$a \neq 0, 1$]
- $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ [$x \neq 0$]

❖ লগারিদম : যদি কোন সংখ্যাকে অন্য একটি সংখ্যার ভিত্তিতে সূচক বা শক্তিতে উল্লীত করা হয়, তবে সূচকটিকে দ্বিতীয় সংখ্যার ভিত্তিতে প্রথম সংখ্যার লগারিদম সংক্ষেপে লগ বলে। যেমন :

100 কে 10 এর ভিত্তির শক্তিতে উল্লীত করলে দাড়ায়, $100 = 10^2$ । এখানে 2 হল 10 এর ভিত্তিতে 100 এর লগ। একে গাণিতিকভাবে $\log_{10} 100 = 2$ লেখা হয়।

x অঋণাত্মক বা ঋণাত্মক, যাই হোক না কেন, a^x সর্বদাই ধনাত্মক সংখ্যা। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম আছে। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নেই।

$a^x = n$ হলে, $x = \log_a n$ যখন, $a > 0, a \neq 1, n$ ধনাত্মক সংখ্যা।

□ লগারিদমের সূত্র :

- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a x = N$ হলে, $x = a^N$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_a a = 1$

[বিঃ দ্রঃ অনেক ক্ষেত্রে \log এর ভিত্তি উল্লেখ থাকে না। এ ক্ষেত্রে \log এর ভিত্তিকে 10 ধরা হয়ে থাকে। এরূপ লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম বলে। যেমন : $\log x$ বা $\log y$]

❖ সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ : যদি a এর মান 1 এর চেয়ে বড় কিন্তু 10 এর চেয়ে ছোট হয় তবে, অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ এর আকারে প্রকাশ করলে একে বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ বলে। যেমন : 100000 এর আদর্শরূপ 10^5 এবং .00001 এর আদর্শরূপ 10^{-5} (n -এর মান যে কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)।

❖ লগের পূর্ণক ও অংশক : কোন ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম একটি দশমিক যুক্ত সংখ্যা। উক্ত লগারিদমের দশমিক যুক্ত অংশকে অংশক এবং পূর্ণ অংশকে পূর্ণক বলা হয়। যেমন- কোন সংখ্যার লগ 3.2456 হলে এর পূর্ণক 3 এবং অংশক 0.2456। লগারিদমের পূর্ণক ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য হতে পারে।

□ পূর্ণক নির্ণয় পদ্ধতি :

- 1) একের চেয়ে বড় সংখ্যার পূর্ণক নির্ণয়ের জন্য দশমিকের বামের অংক সংখ্যা গণনা করতে হবে। পূর্ণক উক্ত অংক সংখ্যার চেয়ে 1 কম। যেমন : 646.28 এর লগের পূর্ণক = $3 - 1 = 2$
- 2) একের চেয়ে ছোট সংখ্যার দশমিকের বামে শূন্য থাকে। এ ক্ষেত্রে দশমিকের ঠিক পরে যতগুলো শূন্য থাকে তা থেকে পূর্ণক দশমিকের ডানে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি।

যেমন : 0.000301 এর দশমিকের ডানে পর-পর তিনটি শূন্য রয়েছে (3 এর পরের শূন্য ধর্তব্য নয়)।

কাজেই পূর্ণক = $-(3+1) = -4$
-4 কে 4 আকারেও লেখা হয়।

□ অংশক নির্ণয় পদ্ধতি :

অংশক নির্ণয়ে আমাদের লগ সারণীর সাহায্য নিতে হয়। লগারিদমের সারণী ব্যবহারের পূর্বে আমাদের এর সাথে পরিচিত হওয়া দরকার। এ সারণীর সর্ব বামের কলামে 10, 11, 12,99 পর্যন্ত সংখ্যা আছে। আবার এ কলামটির ডানে রয়েছে 10 টি কলামের (0 থেকে 9 পর্যন্ত) মূল লগ সারণী। এর পরে আরো 9 টি কলাম (1 থেকে 9 পর্যন্ত) রয়েছে যার নাম অন্তর সারণী।

উদাহরণ : $\log 995.6$ এর অংশক কত?

- এখানে সংখ্যাটিকে অর্থাৎ 995.6 কে দশমিক বিহীন ধরতে হবে অর্থাৎ তা 9956 হবে।
- 9956 কে তিনটি অংশে ভাগ করে নিতে হবে। যথা : 99, 5 এবং 6।
- এখন লগ সারণীর সর্ব বামের কলামের 99 নং সারির 5 শীর্ষক কলামের মান দেখতে হবে। আমরা এই মান 99739 পাই; এরপর একই সারির (99 নং সারি) অন্তর কলামের 6 শীর্ষক কলামের মান নিতে হবে যা আমরা 26 পাই।
- এখন $99739 + 26 = 99765$ । তাই, $\log 995.6$ এর অংশক হবে 0.99765।

□ অনুশীলনী- ৪.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১ : খালিঘর পূরণ কর :

পৃষ্ঠা- ৭৪

- (i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{\square}$ (ii) $5^{\square} \times 5^3 = 5^5$
(iii) $a^2 \times a^{\square} = a^{-3}$ (iv) $\frac{4}{4^{\square}} = 1$
(v) $(-5)^0 = \square$

সমাধান :

- (i) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ (ii) $5^2 \times 5^3 = 5^5$
(iii) $a^2 \times a^{\square} = a^{-3}$ (iv) $\frac{4}{4^1} = 1$
(v) $(-5)^0 = 1$

□ কাজ-২ : সরল কর :

পৃষ্ঠা- ৭৫

- (i) $\frac{2^4 \cdot 2^2}{32}$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (iii) $8^{\frac{3}{4}} + 8^{\frac{1}{2}}$
সমাধান :
(i) $\frac{2^4 \cdot 2^2}{32} = \frac{2^4 \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{4+2}}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2$ (Ans.)
(ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ (Ans.)
(iii) $8^{\frac{3}{4}} + 8^{\frac{1}{2}} = \frac{8^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{2}}} = 8^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3-2}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ৩৯ দেখাও যে, $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} \cdot (a^r)^{p-q} = 1$

সমাধান : L. H. S = $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} \cdot (a^r)^{p-q}$

= $a^{p(q-r)} \cdot a^{q(r-p)} \cdot a^{r(p-q)}$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

= $a^{pq-pr} \cdot a^{qr-pq} \cdot a^{pr-qr}$

= $a^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$

= $a^0 = 1 = R. H. S$

\therefore L. H. S = R. H. S (Showed)

উদাহরণ- ৫৯ সরল কর :

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$ (খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

সমাধান :

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$

= $\frac{1}{(12)^{\frac{1}{2}}} \times (54)^{\frac{1}{3}}$

$(12)^{\frac{1}{2}}$

= $\frac{1}{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}} \times (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}}$

= $\frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

= $\frac{1}{2^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} \times 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^1} \times \frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}}$

= $\frac{3^{1-\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ (Ans.)

(খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

= $(-3)(-3)(-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

= $-27 \times \frac{1}{4} = -\frac{27}{4}$ (Ans.)



MyMahbub

হলে, $x = y$
2. $a > 0, b > 0, x \neq 0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে, $a = b$

উদাহরণ- ৬। সমাধান কর : $4^{x+1} = 32$

সমাধান : $4^{x+1} = 32$
 বা, $(2^2)^{x+1} = 32$
 বা, $2^{2x+2} = 2^5$
 বা, $2x + 2 = 5$, [$a^x = a^y$ হলে, $x = y$]
 বা, $2x = 5 - 2$
 বা, $2x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$ (Ans.)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৪.১

সরল কর (১ - ১০)

১। $\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^6}$

সমাধান : $\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^6}$
 $= \frac{3^{3+5}}{3^6}$
 $= \frac{3^8}{3^6}$
 $= 3^{8-6}$
 $= 3^2$
 $= 9$ (Ans.)

৩। $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$

সমাধান : $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$
 $= \frac{7^{3-3}}{3^{1-4}}$
 $= \frac{3^0}{3^{-3}}$
 $= \frac{1}{\frac{1}{27}}$
 $= 27$ (Ans.)

৫। $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

সমাধান : $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$
 $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)^{-1}$
 $= \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}$
 $= \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}$
 $= \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$

\therefore নির্ণেয় সরলকৃতমান $\frac{10}{7}$

২। $\frac{5^3 \cdot 8}{2^4 \cdot 125}$

সমাধান : $\frac{5^3 \cdot 8}{2^4 \cdot 125}$
 $= \frac{5^3 \cdot 2^3}{2^4 \cdot 5^3}$
 $= \frac{5^3 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^4}$
 $= 2^{3-4}$
 $= 2^{-1}$
 $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

৪। $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

সমাধান : $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$
 $= \frac{7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{7^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{7^1}{7^{\frac{1}{2}}}$
 $= 7^{1 - \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}}$
 $= \sqrt{7}$ (Ans.)

৬। $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

সমাধান : $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$
 $= \left(2 \cdot \frac{1}{a} + 3 \cdot \frac{1}{b}\right)^{-1}$
 $= \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)^{-1}$
 $= \left(\frac{2b + 3a}{ab}\right)^{-1}$
 $= \frac{1}{\frac{2b + 3a}{ab}}$
 $= \frac{ab}{2b + 3a}$
 $= \frac{ab}{3b + 2b}$

\therefore নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{ab}{3b + 2b}$

৭। $\left(\frac{a^2 b^{-1}}{a^{-2} b}\right)^2$

সমাধান : $\left(\frac{a^2 b^{-1}}{a^{-2} b}\right)^2$
 $= \left(\frac{a^2 \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} \cdot b}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{\frac{b}{a^2}}\right)^2$
 $= \left(\frac{a^2}{b} \times \frac{a^2}{b}\right)^2$
 $= \left(\frac{a^4}{b^2}\right)^2 = \frac{a^8}{b^4}$

\therefore নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{a^8}{b^4}$

৮। $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$, ($x > 0, y > 0, z > 0$)

সমাধান : $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$
 $= \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{z}}$
 $= \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$
 $= \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}$

I ❤️ MyMahbub

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{y}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{\frac{1}{2}} \\
 &= x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
 &= x^0 \times x^0 \times x^0 \\
 &= 1 \times 1 \times 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

অতএব নির্ণেয় সরলকৃত মান ১

৯। $\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

সমাধান: $\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^n \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^n \cdot 2^1}{2^n \cdot 2^2 \div 2^1} \\
 &= \frac{2^n(2^4 - 8)}{2^n \cdot 2^{2-1}} \\
 &= \frac{2^n(16 - 8)}{2^n \cdot 2^1} \\
 &= \frac{16 - 8}{2} = \frac{8}{2} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

∴ নির্ণেয় সরলকৃত মান ৪

১০। $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

সমাধান: $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{(m-1)(m+1)}} \\
 &= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}} \\
 &= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1} \\
 &= 3^{-m^2+2m+1} \div 3^{-m^2+2m+3} \\
 &= 3^{-m^2+2m+1+m^2-2m-3} \\
 &= 3^{-2} \\
 &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

অতএব, নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{1}{9}$

প্রমাণ কর : (১১ - ১৮)

১১। $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$

সমাধান: $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$

L.H.S = $\frac{4^n - 1}{2^n - 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^{2n} - 1}{2^n - 1} \\
 &= \frac{(2^n - 1)(2^n + 1)}{(2^n - 1)(2^n + 1)}
 \end{aligned}$$

[লব ও হরকে $(2^n + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2^{2n} - 1)(2^n + 1)}{(2^n)^2 - (1)^2} \\
 &= \frac{(2^{2n} - 1)(2^n + 1)}{(2^{2n} - 1)} \\
 &= (2^n + 1) \\
 &= \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১২। $\frac{2^{p+1} \cdot 3^{2p-1} \cdot 5^{p+q} \cdot 6^q}{6^p \cdot 10^{q+2} \cdot 15^p} = \frac{1}{50}$

সমাধান: L.H.S = $\frac{2^{p+1} \cdot 3^{2p-1} \cdot 5^{p+q} \cdot 6^q}{6^p \cdot 10^{q+2} \cdot 15^p}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^{p+1} \cdot 3^{2p-1} \cdot 5^{p+q} \cdot (2 \times 3)^q}{(2 \times 3)^p \cdot (2 \times 5)^{q+2} \cdot (3 \times 5)^p} \\
 &= \frac{2^{p+1} \cdot 3^{2p-1} \cdot 5^{p+q} \cdot 2^q \cdot 3^q}{2^p \cdot 3^p \cdot 2^{q+2} \cdot 5^{q+2} \cdot 3^p \cdot 5^p} \\
 &= \frac{2^{p+1+q} \cdot 3^{2p-1+q} \cdot 5^{p+q}}{2^{p+q+2} \cdot 3^{2p+p} \cdot 5^{q+2+p}} \\
 &= \frac{2^{p+1+q-p-q-2} \cdot 3^{2p-p-p} \cdot 3^{p+q-q-2-p}}{2^{-1} \cdot 3^0 \cdot 5^{-2}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^2} \\
 &= \frac{1}{50} = \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৩। $\left(\frac{a'}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^{m'}}{a^n}\right)^l \cdot \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m = 1$

সমাধান: L.H.S = $\left(\frac{a'}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^{m'}}{a^n}\right)^l \cdot \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a'^n}{a^{mn}} \cdot \frac{a^{m'l}}{a^{nl}} \cdot \frac{a^{mn}}{a^{al}} \\
 &= \frac{l(an + m'l + mn)}{a(mn + nl + ml)} = 1 = \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৪। $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{p+p}}{a^{2q}} = 1$

সমাধান: L.H.S = $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{p+p}}{a^{2q}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^{p+q+q+r+r+p}}{a^{2r+2p+2q}} \\
 &= \frac{a^{2p+2q+2r}}{a^{2p+2q+2r}} \\
 &= \frac{a^{2p+2q+2r}}{a^{2p+2q+2r}} \\
 &= 1 = \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৫। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{ab} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{bc} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{ca} = 1$

সমাধান: L.H.S = $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{ab} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{bc} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{ca}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a}{ab} \cdot \frac{b}{bc} \cdot \frac{c}{ca}}{\frac{a}{ab} \cdot \frac{c}{bc} \cdot \frac{a}{ca}} \\
 &= \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}}{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}} \\ &= \frac{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}}{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}} \\ &= \frac{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}}{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}} \\ &= \frac{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}}{\frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} \cdot \frac{1}{x^c}} \\ &= 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৬। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

সমাধান :

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \\ &= (x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a} \\ &= x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2} \\ &= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2} \\ &= x^0 \\ &= 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৭। $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

সমাধান :

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} \\ &= (x^{p-q})^{p+q-r} \times (x^{q-r})^{q+r-p} \times (x^{r-p})^{r+p-q} \\ &= x^{p^2-q^2-rp+qr} \times x^{q^2-r^2-pq+rp} \times x^{r^2-p^2-qr+pr} \\ &= x^{p^2-q^2-rp+qr+q^2-r^2-rq+rp+r^2-p^2-qr+pr} \\ &= x^0 \\ &= 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Proved)

১৮। যদি $a^x = b$, $b^y = c$, এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^x = b$

$$b^y = c$$

$$c^z = a$$

রাশি তিনটি যোগ করে পাই,

$$a^x + b^y + c^z = b + c + a$$

$$\text{বা, } a^x + b^y + c^z = a^1 + b^1 + c^1$$

$$\text{এখানে, } ax = a^1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\text{একইভাবে, } y = 1$$

$$z = 1$$

$$\therefore \text{L.H.S} = xyz$$

$$= 1.1.1$$

$$= 1 = \text{R.H.S}$$

∴ L.H.S = R.H.S (Showed)

সমাধান কর : (১৯ - ২২)

১৯। $4^x = 8$

সমাধান : $4^x = 8$

$$\text{বা, } (2^2)^x = 2 \times 2 \times 2$$

$$\text{বা, } 2^{2x} = 2^3$$

$$\text{বা, } 2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{2}$

২০। $2^{2x+1} = 128$

সমাধান : $2^{2x+1} = 128$

$$\text{বা, } 2^{2x+1} = 2^7$$

$$\text{বা, } 2x+1 = 7$$

$$\text{বা, } 2x = 7-1$$

$$\text{বা, } 2x = 6$$

$$\text{বা, } x = \frac{6}{2}$$

$$\therefore x = 3$$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = 3$

২১। $(\sqrt{3})^{x+1} = (3\sqrt{3})^{2x-1}$

সমাধান : $(\sqrt{3})^{x+1} = (3\sqrt{3})^{2x-1}$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{3^2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^{2x-1}$$

$$\text{বা, } 3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3}$$

$$\text{বা, } 3(x+1) = 2(2x-1)$$

$$\text{বা, } 3x+3 = 4x-2$$

$$\text{বা, } 4x-2 = 3x+3$$

$$\text{বা, } 4x-3x = 3+2$$

$$\therefore x = 5$$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

২২। $2^x + 2^{1-x} = 3$

সমাধান : $2^x + 2^{1-x} = 3$

$$\text{বা, } 2^x + 2^1 \cdot \frac{1}{2^x} = 3$$

$$\text{বা, } 2^x + \frac{1}{2^x} = 3$$

$$\text{বা, } \frac{2^{2x} + 2}{2^x} = 3$$

$$\text{বা, } 2^{2x} + 2 = 3 \cdot 2^x$$

$$\text{বা, } 2^{2x} + 2 - 3 \cdot 2^x = 0$$

$$\text{বা, } (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1^2 - 2^x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (2^x - 1)^2 - 2^x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (2^x - 1)^2 - 1(2^x - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2^x - 1)(2^x - 1 - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2^x - 1)(2^x - 2) = 0$$

$$\therefore 2^x - 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } 2^x - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2^x = 1$$

$$\text{বা, } 2^x = 2$$

$$\text{বা, } 2^x = 2^0$$

$$\text{বা, } 2^x = 2^1$$

$$\text{বা, } x = 0$$

$$\therefore x = 1$$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0, 1$

□ অনুশীলনী- ৪.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১ : লগের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

(i) $10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
(ii) $3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$
(iii) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$
(iv) $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$	$\log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

□ কাজ-২ : কীকা জায়গা পূরণ কর :

সমাধান :	লগের মাধ্যমে
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$e^0 = 1$	$\log_e 1 = 0$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$e^1 = e$	$\log_e e = 1$
	$\log_a a = 1$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ৭১ মান নির্ণয় কর : ক) $\log_{10} 100$ খ) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$ গ) $\log_{\sqrt{3}} 81$

সমাধান :

ক) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10$
 $= 2 \times 1 [\because \log_a a = 1]$
 $= 2 \text{ (Ans.)}$

খ) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2 \log_3 3$
 $[\log_a M^r = r \log_a M]$
 $= -2 \times 1 [\because \log_a a = 1]$
 $= -2 \text{ (Ans.)}$

গ) $\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = \log_{\sqrt{3}} \{(\sqrt{3})^4\} = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8$
 $= 8 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} [\because \log_a M^r = r \log_a M]$
 $= 8 \times 1 [\because \log_a a = 1]$
 $= 8 \text{ (Ans.)}$

উদাহরণ- ৮১ ক) $5\sqrt{5}$ এর ৫ ভিত্তিক লগ কত?

খ) ৪০০ এর লগ ৪; ভিত্তি কত?

সমাধান :

ক) $5\sqrt{5}$ এর ৫ ভিত্তিক লগ
 $= \log_5 5\sqrt{5} = \log_5 (5 \times 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{3}{2} \log_5 5 [\because \log_a M^r = r \log_a M]$
 $= \frac{3}{2} \times 1 [\because \log_a a = 1]$
 $= \frac{3}{2} \text{ (Ans.)}$

খ) ধরি, ভিত্তি a

\therefore প্রশ্নমতে, $\log_a 400 = 4$
 বা, $a^4 = (20)^2$

বা, $a^4 = (4 \times 5)^2$

বা, $a^4 = (2\sqrt{5})^4$

$\therefore a = 2\sqrt{5} [\because a^x = b^x \text{ হলে, } a = b]$

\therefore ভিত্তি $2\sqrt{5}$ (Ans.)

উদাহরণ- ৯১ x এর মান নির্ণয় কর :

ক) $\log_{10} x = -2$

খ) $\log_x 324 = 4$

সমাধান :

ক) $\log_{10} x = -2$

$\therefore x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

বা, $x = \frac{1}{100} = 0.01$

$\therefore x = 0.01$ (Ans.)

খ) $\log_x 324 = 4$

$\therefore x^4 = 324 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$
 $= 3^4 \times 2^2 = 3^4 \times (\sqrt{2})^4$

বা, $x^4 = (3\sqrt{2})^4$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$ (Ans.)

উদাহরণ- ১০১ প্রমাণ কর যে, $3 \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 40$

সমাধান :

বামপক্ষ $= 3 \log_{10} 2 + \log_{10} 5$
 $= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5 [\because \log_a M^r = r \log_a M]$
 $= \log_{10} 8 + \log_{10} 5$
 $= \log_{10} (8 \times 5) [\because \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N]$
 $= \log_{10} 40$
 $= \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$

উদাহরণ- ১১১ সরল কর : $\frac{\log_{10} \sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10} \sqrt{1000}}{\log_{10} 1.2}$

সমাধান :

$\frac{\log_{10} \sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10} \sqrt{1000}}{\log_{10} 1.2}$
 $= \frac{\log_{10} (3^3)^{\frac{1}{2}} + \log_{10} 2^3 - \log_{10} (10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10} \frac{12}{10}}$

$$= \frac{\log_{10} 3^{\frac{3}{2}} + \log_{10} 2^3 - \log_{10} 10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10} 12 - \log_{10} 10}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \log_{10} 3 + 3 \log_{10} 2 - \frac{3}{2} \log_{10} 10}{\log_{10} (3 \times 2^2) - \log_{10} 10}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} (\log_{10} 3 + 2 \log_{10} 2 - 1)}{(\log_{10} 3 + 2 \log_{10} 2 - 1)} \quad [\because \log_{10} 10 = 1]$$

$$= \frac{3}{2} \text{ (Ans.)}$$

\therefore নির্ণেয় সরলকৃত মান $\frac{3}{2}$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৪.২

১। মান নির্ণয় কর :

ক) $\log_3 81$

সমাধান : $\log_3 81$

$$= \log_3 3^4$$

$$= 4 \log_3 3$$

$$[\because \log 3 = 1]$$

$$= 4 \cdot 1$$

$$= 4$$

\therefore নির্ণেয় মান ৪

খ) $\log_5 \sqrt[3]{5}$

সমাধান : $\log_5 \sqrt[3]{5}$

$$= \log_5 5^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \log_5 5$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$[\because \log 5^5 = 1]$$

$$= \frac{1}{3}$$

\therefore নির্ণেয় মান $\frac{1}{3}$

গ) $\log_4 2$

সমাধান : $\log_4 2$

$$= \log_4 \sqrt{4}$$

$$= \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_4 4$$

$$[\because \log 4^4 = 1]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

\therefore নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$

ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400$

সমাধান : $\log_{2\sqrt{5}} 400$

$$= \log_{2\sqrt{5}} 16 \times 25$$

$$= \log_{2\sqrt{5}} 2^4 \cdot 5^2$$

$$= \log_{2\sqrt{5}} 2^4 \cdot (\sqrt{5})^4$$

$$= \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4$$

$$= 4 \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5}$$

$$[\because \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5} = 1]$$

$$= 4 \cdot 1 = 4$$

\therefore নির্ণেয় মান ৪

ঙ) $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

সমাধান : $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

$$= \log_5 \left(5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \log_5 \left(5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \log_5 5^{\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{5}{6} \log_5 5$$

$$= \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

$$[\because \log 5^5 = 1]$$

\therefore নির্ণেয় মান $\frac{5}{6}$

২। x এর মান নির্ণয় কর :

ক) $\log_5 x = 3$

সমাধান : $\log_5 x = 3$

$$\text{বা, } x = 5^3$$

$$\therefore x = 125 \text{ (Ans.)}$$

খ) $\log_x 25 = 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_x 25 = 2$

$$\text{বা, } 25 = x^2$$

$$\text{বা, } 5^2 = x^2$$

$$\therefore x = 5 \text{ (Ans.)}$$

গ) $\log_x \frac{1}{16} = -2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_x \frac{1}{16} = -2$

$$\text{বা, } \frac{1}{16} = x^{-2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{4^2} = x^{-2}$$

$$\text{বা, } 4^{-2} = x^{-2}$$

$$\therefore x = 4 \text{ (Ans.)}$$

৩। দেখাও যে,

$$\text{ক) } 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$$

$$\text{সমাধান: L.H.S} = 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25$$

$$= 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 5^2$$

$$= 5 \log_{10} 5 - 2 \log_{10} 5$$

$$= 3 \log_{10} 5$$

$$= \log_{10} 5^3$$

$$= \log_{10} 125 = \text{R.H.S}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S (Showed)}$$

$$\text{খ) } \log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$$

সমাধান:

$$\text{L.H.S} = \log_{10} \frac{50}{147}$$

$$= \log_{10} 50 - \log_{10} 147$$

$$= \log_{10} (2 \times 5 \times 5) - \log_{10} (3 \times 7 \times 7)$$

$$= \log_{10} (2 \times 5^2) - \log_{10} (3 \times 7^2)$$

$$= (\log_{10} 2 + \log_{10} 5^2) - (\log_{10} 3 + \log_{10} 7^2)$$

$$= \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S. (Showed)}$$

$$\text{গ) } 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$$

সমাধান:

$$\text{L.H.S} = 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5$$

$$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5$$

$$= \log_{10} 8 + \log_{10} 9 + \log_{10} 5$$

$$= \log_{10} (8 \cdot 9 \cdot 5)$$

$$= \log_{10} 360$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S. (Showed)}$$

৪। সরল কর :

$$\text{ক) } 7 \log_{10} \frac{10}{9} - 2 \log_{10} \frac{25}{24} + 3 \log_{10} \frac{81}{80}$$

সমাধান:

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 7 \log_{10} \frac{10}{9} - 2 \log_{10} \frac{25}{24} + 3 \log_{10} \frac{81}{80}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{10}{9} \right)^7 - \log_{10} \left(\frac{25}{24} \right)^2 + \log_{10} \left(\frac{81}{80} \right)^3$$

$$= \log_{10} \left(\frac{10^7}{9^7} \right) + \log_{10} \left(\frac{81^3}{80^3} \right) - \log_{10} \left(\frac{25^2}{24^2} \right)$$

$$= \log_{10} \left(\frac{10^7}{9^7} \times \frac{81^3}{80^3} \right) - \log_{10} \left(\frac{25^2}{24^2} \right)$$

$$= \log_{10} \left\{ \left(\frac{10^7}{9^7} \times \frac{81^3}{80^3} \right) \div \left(\frac{25^2}{24^2} \right) \right\}$$

$$= \log_{10} \left\{ \frac{(5 \cdot 2)^7}{(3 \cdot 3)^7} \times \frac{(3 \times 3 \times 3 \times 3)^3}{(5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^3} \div \frac{(5 \cdot 5)^2}{(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^2} \right\}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{5^7 \cdot 2^7 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3}{3^7 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3} \times \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 5^2} \right)$$

$$= \log_{10} \frac{5^7 \cdot 2^{13} \cdot 3^{14}}{5^9 \cdot 2^{12} \cdot 3^{14}}$$

$$= \log_{10} \frac{2^{13}}{2^{12}}$$

$$= \log_{10} 2^{13-12}$$

$$= \log_{10} 2$$

$$= \log_{10} 2$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সরলমান } \log_{10} 2$$

$$\text{খ) } \log_7 (5\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}) - \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_4 2$$

$$\text{সমাধান: প্রদত্ত রাশি} = \log_7 (5\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}) - \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_4 2$$

$$= \log_7 \left(5 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} \right) - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 2$$

$$= \log_7 7^{\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \log_3 3 + \log_4 2$$

$$= \log_7 \left(7^{\frac{2+5}{10}} \right) - \frac{1}{3} \cdot 1 + \log_4 \sqrt{4}$$

$$= \log_7 7^{\frac{7}{10}} - \frac{1}{3} + \log_4 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{10} \log_7 7 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log_4 4 \quad [\because \log a^a = 1]$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{21 - 10 + 15}{30}$$

$$= \frac{36 - 10}{30}$$

$$= \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সরলমান } \frac{13}{15}$$

$$\text{গ) } \log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - 3 \log_e b^2 c$$

$$\text{সমাধান: প্রদত্ত রাশি} = \log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - 3 \log_e b^2 c$$

$$- 3 \log_e b^2 c$$

$$= \log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - \log_e (b^2 c)^3$$

$$= \log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - \log_e b^6 c^3$$

$$= \log_e \left(\frac{a^3 b^3}{c^3} \times \frac{b^3 c^3}{d^3} \times \frac{c^3 d^3}{a^3} \right) - \log_e b^6 c^3$$

$$= \log_e b^6 c^3 - \log_e b^6 c^3$$

$$= 0$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সরলমান } 0$$

□ অনুশীলনী- ৪.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলোর 10 ভিত্তিক ও e ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর :

[পৃষ্ঠা-৮৫]

সমাধান :

i) 2550

2550 এর 10 ভিত্তিক লগ, $\boxed{AC} \boxed{\log} \boxed{2550} \boxed{=} -3.40654018$

2550 " e " " $\boxed{AC} \boxed{\ln} \boxed{2550} \boxed{=} -7.843848638$

ii) 52.143

52.143 এর 10 ভিত্তিক লগ, $\boxed{AC} \boxed{\log} \boxed{52.143} \boxed{=} 1.717196014$

52.143 " e " " $\boxed{AC} \boxed{\ln} \boxed{52.143} \boxed{=} 3.953989944$

iii) 0.4145

0.4145 এর 10 ভিত্তিক লগ, $\boxed{AC} \boxed{\log} \boxed{0.4145} \boxed{=} -0.382475465$

0.4145 " e " " $\boxed{AC} \boxed{\ln} \boxed{0.4145} \boxed{=} -0.880682404$

iv) 0.0742

0.0742 এর 10 ভিত্তিক লগ, $\boxed{AC} \boxed{\log} \boxed{0.0742} \boxed{=} -1.129596095$

0.0742 " e " " $\boxed{AC} \boxed{\ln} \boxed{0.0742} \boxed{=} -2.600991129$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ১২৯ নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় কর :

i) 5570 ii) 45.70 iii) 0.4305 iv) 0.000435

সমাধান :

i) $5570 = 5.570 \times 1000 = 5.570 \times 10^3$

∴ সংখ্যাটি লগের পূর্ণক 3।

অন্যভাবে, 5570 সংখ্যাটিতে অঙ্কের সংখ্যা 4টি।

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক = $4 - 1 = 3$

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3।

ii) $45.70 = 4.570 \times 10^1$

∴ সংখ্যাটি লগের পূর্ণক 1।

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিকের বামে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে ২টি অঙ্ক আছে।

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক = $2 - 1 = 1$

∴ 45.70 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1।

iii) $0.4305 = 4.305 \times 10^{-1}$

∴ সংখ্যাটির পূর্ণক 1।

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর আগে, পূর্ণ অংশে কোনো সার্থক অঙ্ক নেই, বা শূন্যটি অঙ্ক আছে।

∴ সংখ্যাটির পূর্ণক = $0 - 1 = -1 = \bar{1}$

অন্যভাবে, 0.4305 সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে কোনো 0 (শূন্য) নেই, অর্থাৎ শূন্যটি 0 আছে।

∴ সংখ্যাটির পূর্ণক = $-(0 + 1) = -1 = \bar{1}$

∴ 0.4305 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\bar{1}$

iv) $0.000435 = 4.35 \times 10^{-4}$

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক = $-(3 + 1) = -4$ বা, $\bar{4}$

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী ১ম সার্থক অঙ্ক 4 এর মাঝে 3টি 0 (শূন্য) আছে।

∴ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক = $-(3 + 1) = -4 = \bar{4}$

∴ 0.000435 এর লগের পূর্ণক $\bar{4}$

উদাহরণ- ১৬৯ $\log_e 10$ নির্ণয় কর :

সমাধান : $\log_e 10 = \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} 2.71828} = \frac{1}{0.43429}$

[ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 2.30259$ (প্রায়)

বিকল্প : ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

$\boxed{AC} \boxed{\ln} \boxed{10} \boxed{=} 2.30259$ (প্রায়)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৪.৩

১. কোন শর্তে $a^0 = 1$?ক $a = 0$ গ $a > 0$ উত্তর : ঘ. $a \neq 0$ খ $a \neq 0$ ঘ $a \neq 1$ ২. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5}$ এর মান নিচের কোনটি?ক $\sqrt[6]{5}$ খ $(\sqrt[3]{5})^3$ গ $(\sqrt{5})^3$ ঘ $\sqrt[3]{25}$ উত্তর : ঘ. $\sqrt[3]{25}$ ৩. সঠিক কোন শর্তে $\log_a a = 1$?ক $a > 0$ গ $a > 0, a \neq 1$ উত্তর : গ. $a > 0, a \neq 1$ খ $a \neq 1$ ঘ $a \neq 0, a > 1$ ৪. $\log x^4 = 2$ হলে, x এর মান কত?

ক 2

গ 4

উত্তর : ক. 2

খ ± 2

ঘ 10

৫. একটি সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোনটি?ক $1 < a < 10$ গ $1 \leq a < 10$ উত্তর : গ. $1 \leq a < 10$ খ $1 \leq a \leq 10$ ঘ $1 < a \leq 10$

৬. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. $\log_a (m)^p = p \log_a m$ ii. $2^4 = 14$ এবং $\log_2 16 = 4$ সমার্থকiii. $\log_a (m^n) = \log_a m + \log_a n$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii

গ i ও iii

উত্তর : ক. i ও ii.

খ ii ও iii

ঘ i, ii ও iii

৭. 0.0035 এর সাধারণ লগের পূর্ণক কত?

ক 3

গ 2

উত্তর : ঘ. = 3

খ 1

ঘ 3

৮. 0.0225 সংখ্যাটি বিবেচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

১. সংখ্যাটির (a^n) আকারের সঠিক রূপ কোনটি?ক $(2.5)^2$ গ $(1.5)^2$ উত্তর : ঘ. $(.15)^2$ খ $(0.015)^2$ ঘ $(.15)^2$

২. সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক আকার নিচের কোনটি?

ক 225×10^{-4} গ 2.25×10^{-2} উত্তর : গ. 2.25×10^{-2} খ 22.5×10^{-3} ঘ 225×10^{-1}

৩. সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণক কত?

ক 2

গ 0

উত্তর : ক. 2

খ 1

ঘ 2

৯. বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ কর :

ক. 6530

গ. 0.000245

ঙ. 0.00000014

খ. 60.831

ঘ. 37500000

সমাধান :

ক. 6530 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 6.530 \times 10^3$ খ. 60.831 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 6.0831 \times 10^1$ গ. 0.000245 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 2.45 \times 10^{-4}$ ঘ. 37500000 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 3.75 \times 10^7$ ঙ. 0.00000014 এর বৈজ্ঞানিকরূপ $= 1.4 \times 10^{-7}$

১০. সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ কর :

ক. 10^5 গ. 2.53×10^4 ঙ. 3.12×10^{-5} খ. 10^{-5} ঘ. 9.813×10^{-3}

সমাধান :

ক. $= 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ $= 100000$ (Ans)খ. $10^{-5} = \frac{1}{10^5}$ $= \frac{1}{100000}$ $= 0.00001$ (Ans.)গ. $2.53 \times 10^4 = 2.53 \times 10000$ $= 25300.00$ $= 25300$ (Ans.)ঘ. $9.813 \times 10^{-3} = 9.813 \times \frac{1}{10^3}$ $= 9.813 \times \frac{1}{1000}$ $= \frac{9813}{1000} \times \frac{1}{1000}$ $= \frac{9813}{1000000}$ $= 0.009813$ (Ans.)ঙ. $3.12 \times 10^{-5} = 3.12 \times \frac{1}{10^5}$ $= \frac{312}{100} \times \frac{1}{100000}$ $= \frac{312}{10000000}$ $= 0.0000312$ (Ans.)

১১. নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক বের কর (ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে) :

ক. 4820

গ. 1.734

ঙ. 0.000036

খ. 72.245

ঘ. 0.045

সমাধান :

ক. 4820 কে বৈজ্ঞানিক প্রকাশ করে পাই,

 $4820 = 4.82 \times 10^3$

যেহেতু এখানে 10 এর শক্তি সূচক 3; অতএব 4820 এর লগের পূর্ণক 3 (Ans.)

খ. 72.245 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,

 $72.245 = 7.2245 \times 10^1$ $= 7.2245 \times 10^1$

যেহেতু এখানে 10 এর শক্তিসূচক 1;

অতএব 72.245 এর লগের পূর্ণক 1 (Ans.)

গ. 1.734 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,

$$1.734 = 1.734 \times 10^0$$

যেহেতু এখানে, 10 এর শক্তি সূচক 0; অতএব 1.734 এর লগের পূর্ণক 0 (Ans.)

ঘ. 0.045 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,

$$0.045 = 4.5 \times 10^{-2}$$

এখানে, 10 এর শক্তি সূচক -2; অতএব 0.045 এর লগের পূর্ণক -2 বা 2 (Ans.)

ঙ. 0.000036 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করে পাই,

$$0.000036 = \frac{36}{1000000}$$

$$= \frac{36}{10^6}$$

$$= 36 \times 10^{-6}$$

$$= 3.6 \times 10^{-5}$$

এখানে, 10 এর শক্তি সূচক -5; অতএব 0.000036 এর লগের পূর্ণক -5 বা 5 (Ans.)

১২. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর :

ক. 27

খ. 63.147

গ. 1.405

ঘ. 0.0456

ঙ. 0.000673

সমাধান :

ক. 27.

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

$$[AC] [log] [27] [=] 1.43136 \text{ (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)}$$

∴ লগ 27 এর পূর্ণক 1 এবং অংশক .43136.

খ. 63.147

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

$$[AC] [log] [63.147] [=] 1.80035$$

(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

∴ লগ 63.147 এর পূর্ণক 1 এর অংশক 40035

গ) 1.405

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

$$[AC] [log] [1.405] [=] 0.14767$$

(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

∴ লগ 1.405 এর পূর্ণক 0 এর অংশক .14767

ঘ) 0.0456

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

$$[AC] [log] [0.0456] [=] -1.34103$$

(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

∴ লগ 0.0456 এর পূর্ণক -1 বা 1 এবং অংশক .34103

ঙ) 0.000673

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করি :

$$[AC] [log] [0.000673] [=] -3.17198$$

(পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

∴ লগ 0.000673 এর পূর্ণক -3 বা 3 এবং অংশক .17198

১৩। গুণফলের/ভাগফলের সাধারণ লগ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় কর :

ক. 5.34×8.7

খ. 0.79×0.56

গ. $22.2642 \div 3.42$

ঘ. $0.19926 \div 32.4$

সমাধান :

ক) 5.34×8.7

$$= \log (5.34 \times 8.7)$$

$$= \log (46.458)$$

$$= 1.66706 \text{ (Ans.)}$$

খ) 0.79×0.56

$$= \log (0.79 \times 0.56)$$

$$= \log (0.4424)$$

$$= -0.35418 \text{ (Ans.)}$$

গ) $22.2642 \div 3.42$

$$= \log (22.2642 \div 3.42)$$

$$= \log (6.51)$$

$$= 0.81358 \text{ (Ans.)}$$

ঘ) $0.19926 \div 32.4$

$$= \log (0.19926 \div 32.4)$$

$$= \log (0.00615)$$

$$= -2.21112 \text{ (Ans.)}$$

১৪। যদি $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$ এবং $\log 7 = 0.84510$ হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর :

ক. $\log 9$

খ. $\log 24$

গ. $\log 42$

সমাধান :

ক) $\log 9$

$$\text{দেওয়া আছে, } \log 3 = 0.47712$$

$$\therefore \log 9 = \log (3 \times 3)$$

$$= \log 3 + \log 3$$

$$= 0.47712 + 0.47712 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 0.95424 \text{ (Ans.) (5 দশমিক স্থান পর্যন্ত)}$$

খ) $\log 28$

$$\text{দেওয়া আছে, } \log 2 = 0.30103$$

$$\log 7 = 0.84510$$

$$\therefore \log 28$$

$$= \log (2 \times 2 \times 7)$$

$$= \log 2 + \log 2 + \log 7$$

$$= 0.30103 + 0.30103 + 0.84510$$

$$= 1.44716 \text{ (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) (Ans.)}$$

গ) $\log 42$

$$\text{দেওয়া আছে, } \log 2 = 0.30103$$

$$\log 3 = 0.47712$$

$$\log 7 = 0.84510$$

$$\therefore \log 42 = \log (2 \times 3 \times 7)$$

$$= \log 2 + \log 3 + \log 7$$

$$= 0.30103 + 0.47712 + 0.84510$$

$$= 1.62325 \text{ (Ans.)}$$

১৫। দেওয়া আছে, $x = 1000$ এবং $y = 0.0625$

ক) x ও a^b আকারে প্রকাশ কর। যেখানে a ও b মৌলিক সংখ্যা।

খ) x ও y এর গুণফলকে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ কর।

গ) xy এর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) x কে $a^n b^n$ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$x = 1000$$

$$= 2 \times 500$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 125$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$= 2^3 \times 5^3 \text{ [যেখানে, } a \text{ ও } b \text{ মৌলিক সংখ্যা।]}$$

$$\therefore x = 2^3 5^3 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ) দেওয়া আছে, } x = 1000 \text{ এবং } y = 0.0625$$

$$\therefore x \text{ ও } y \text{ এর গুণফল} = 1000 \times 0.0625$$

$$\therefore xy = 62.5$$

$$62.5 \text{ এর বৈজ্ঞানিকরূপ} = 62.5 \\ = 6.25 \times 10^1 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{গ) } xy = 62.5$$

$$= \log(62.5)$$

$$= 1.79588$$

$$\therefore \text{লগ } 62.5 \text{ এর পূর্ণক 1 এবং এক অংশক .79588 (Ans.)}$$



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $\frac{1-x^2}{1+x}$ এর লঘিষ্ঠ রূপ কত? [ব্র. বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]
ক $1-x$ খ $-1+x$ (ক)
গ $1-x^2$ ঘ $1+x^2$
২. $(5^\circ)^2 \times (5^\circ)^0 \times 5^\circ$ এর মান নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক 0 খ 1 (ঘ)
গ 5 ঘ 25
৩. $\log_a M + \log_a N =$ নিচের কোনটি?
[বি এ এফ শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক $\log_a \left(\frac{M}{N}\right)$ খ $\log_a \left(\frac{N}{M}\right)$ (গ)
গ $\log_a(MN)$ ঘ $\log_a(MN)^a$
৪. e ভিত্তিক লগারিদমের অপর নাম কী?
[খুলনা পাবলিক কলেজ]
ক সাধারণ লগারিদম খ স্বাভাবিক লগারিদম (ক)
গ ব্যবহারিক লগারিদম ঘ ব্রিহস লগারিদম
৫. একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ 0.0000000037 সে.মি. এর বৈজ্ঞানিক রূপ কোনটি? [খুলনা পাবলিক কলেজ]
ক 3.7×10^{-10} খ 3.7×10^{-8} (ঘ)
গ 0.37×10^{-9} ঘ 3.7×10^{-9}
৬. $\log_5 x = 3$ হলে x এর মান কত? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 5 খ 10 (গ)
গ 125 ঘ 25
৭. $\log_4 2$ এর মান কত? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 2 খ $\frac{1}{3}$ (ঘ)
গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{1}{2}$
৮. $\log_a a$ এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 1 খ a (ক)
গ 2 ঘ 3
৯. $\log 1$ এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 0 খ 1 (ক)
গ 2 ঘ 3
১০. $\log 0$ এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 1 খ 2 (ক)
গ -3 ঘ 0

১১. $\log 7 + \log 3$ এর মান কোনটি? [বরগুনা জিলা স্কুল]
ক 21 খ 3×7 (ঘ)
গ $7+3$ ঘ $\log 21$
১২. $\log_2 16$ এর মান নির্ণয় কর। [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক 1 খ 2 (ঘ)
গ 3 ঘ 4
১৩. সঠিক কোন শর্তে $\log_a 1 = 0$? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $a > 0$ খ $a \neq 0$ (গ)
গ $a > 0, a \neq 1$ ঘ $a \neq 0, a > 1$
১৪. $a \neq 0$ হলে, নিচের কোনটি $(a^{-1})^{-1}$ এর সঠিক মান? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক a খ a^{-1} (ক)
গ a^{-2} ঘ a^2
১৫. $2^{x+1} = 32$ হলে, x এর মান কত? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{7}{2}$ (গ)
গ 41 ঘ 9
১৬. $m+n=-2$ হলে, $(-2)^n \times (-2)^m \times (-2)^2$ এর মান কত? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক -2 খ -1 (গ)
গ 1 ঘ 2
১৭. $\log_x 324 = 4$ হলে, $x =$ কত? [ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
ক $3\sqrt{2}$ খ $2\sqrt{3}$ (ক)
গ $\sqrt{2}$ ঘ $\sqrt{3}$
১৮. $\log_4 2 =$ কত? [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক $\log 2 \cdot \log 4$ খ $\log 2 + \log 4$ (ঘ)
গ 2 ঘ $\frac{1}{2}$
১৯. $\log_{10} = -2$ হলে $x =$ কত? [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক 10 খ $\frac{1}{10}$ (ঘ)
গ 100 ঘ $\frac{1}{100}$
২০. $\log_x 25 = 2$ হলে $x =$ কত? [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ]
ক -5 খ 5 (ঘ)
গ ± 5 ঘ -

I ❤️ MyMahbub

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা-

- চলকের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমীকরণ ও অভেদের পার্থক্য ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- একঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার একঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবে ও সমাধান সেট নির্ণয় করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



- ❖ চলক : যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের যে কোন উপাদানকে বুঝায় তাকে চলক বা চল বলে।
যেমন : $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 20\}$ সেটে x হল চলক কেননা এ সেটে x এর মান 2, 3, 4, ..., 19 ইত্যাদির যে কোনটি হতে পারে।
- ❖ গাণিতিক বাক্য : গাণিতিক শব্দাবলি ক্রিয়াপদ দ্বারা যুক্ত হলে তাকে গাণিতিক বাক্য বলে। যেমন : $5 + 8 = 13$, $2 \times 3 > 4$, $10 < 12$ ইত্যাদি হলো গাণিতিক বাক্য। যেখানে '=' (সমান হওয়া), '>' (বড় হওয়া), '<' (ছোট হওয়া) ইত্যাদি ক্রিয়া পদ।
- ❖ গাণিতিক খোলা বাক্য : কোন চলক সম্বলিত গাণিতিক বাক্যকে গাণিতিক খোলা বাক্য বলে।
যেমন : $x + 3 = 7$
- ❖ গাণিতিক উক্তি : কোন গাণিতিক বাক্য সত্য না মিথ্যা নিশ্চিতভাবে বলা সম্ভব হলে, ঐ বাক্যকে গাণিতিক উক্তি বলে। উদা: $2 + 3 = 5$; $2 - 3 = 1$.
- ❖ সমীকরণ : দুইটি বহুপদীকে সমতা চিহ্ন দ্বারা সমীকৃত করলে তাকে সমীকরণ বলে। যেমন : $2x - 4 + x = 6$, $x^2 + y^2 = 5$ ইত্যাদি।
- ❖ অভেদ : সমান চিহ্নের দুই পক্ষে সমান ঘাতবিশিষ্ট দুইটি বহুপদী থাকে। চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সংখ্যার চেয়েও অধিক সংখ্যক মানের জন্য অভেদটি সিদ্ধ হবে। সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের মধ্যে কোন ভেদ নেই বলেই অভেদ।
যেমন : $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = 4a$ একটি অভেদ;
এখানে a এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হবে।
- ❖ সমীকরণের মূল : কোন সমীকরণে চলক বা চলকসমূহের যে বা যেসব মানের জন্য বামপক্ষ ও ডানপক্ষ পরস্পর সমান হয় সে বা সেসব মানকে উক্ত সমীকরণের মূল বলে।

যেমন : $x + 3 = 7$ সমীকরণে x এর মান 4 বসালে বামপক্ষ এবং ডানপক্ষ সমান হয়। কাজেই এই সমীকরণের মূল, $x = 4$.

- ❖ সমীকরণের সমাধান : কোন সমীকরণের মূল বা বীজ নির্ণয় করাকে এর সমাধান বলা হয়।
- ❖ সমীকরণ সমাধানের কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ :
স্বতঃসিদ্ধ ১. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশির সাথে একই রাশি যোগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।
স্বতঃসিদ্ধ ২. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশি থেকে একই রাশি বিয়োগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।
স্বতঃসিদ্ধ ৩. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশিকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।
স্বতঃসিদ্ধ ৪. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশিকে একই রাশি দ্বারা (শূন্য ব্যতীত) ভাগ করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।

যেমন : $x + 2 = 1$ হলে, $\frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}$ হবে।

স্বতঃসিদ্ধ ৫. বামপক্ষের ও ডানপক্ষের রাশিকে একই ঘাতে উন্নীত করলে সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান থাকবে।

যেমন : $x + 2 = 5$ হলে, $(x + 2)^2 = 5^2$ হবে।

- ❖ দ্বিঘাত সমীকরণ : যে সমীকরণকে সমাধান করলে অজ্ঞাত একটি চলকের দু'টি মূল বা বীজ পাওয়া যায়, তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে। দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাত বা শক্তি ২ থাকে। যেমন : $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এর সমাধান,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□ অনুশীলনী- ৫.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১: $(\sqrt{5}+1)x+4=4\sqrt{5}$ হলে দেখাও যে, $x=6-2\sqrt{5}$ [গুণা- ৯১]

সমাধান: $(\sqrt{5}+1)x+4=4\sqrt{5}$

$$\text{বা, } (\sqrt{5}+1)x=4\sqrt{5}-4$$

$$\text{বা, } (\sqrt{5}+1)x=4(\sqrt{5}-1)$$

$$\text{বা, } x=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)}$$

$$\text{বা, } x=\frac{4(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

[লব ও হরকে দ্বারা $(\sqrt{5}-1)$ গুণ করে]

$$\text{বা, } x=\frac{4(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5})^2-1}$$

$$\text{বা, } x=\frac{4\{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1^2\}}{5-1}$$

$$\text{বা, } x=\frac{4(5-2\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$\text{বা, } x=6-2\sqrt{5} \text{ (দেখানো হলো)}$$

২। সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ : $(\sqrt{4x-3})+5=2$

সমাধান: $(\sqrt{4x-3})+5=2$

$$\text{বা, } \sqrt{4x-3}=2-5 \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{4x-3}=-3$$

$$\text{বা, } (\sqrt{4x-3})^2=(-3)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 4x-3=9$$

$$\text{বা, } 4x=9+3$$

$$\text{বা, } 4x=12$$

$$\text{বা, } x=3$$

প্রদত্ত সমীকরণে বর্গমূল চিহ্ন থাকার কারণে শূন্য পরীক্ষা

প্রয়োজন।

প্রদত্ত সমীকরণটিতে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$$\sqrt{4 \times 3 - 3} + 5 = 2$$

$$\text{বা, } \sqrt{12-3}+5=3$$

$$\text{বা, } \sqrt{9}+5=2$$

$$\text{বা, } 3+5=2$$

$$\text{বা, } 8=2, \text{ যা অসম্ভব।}$$

∴ সমীকরণটির কোনো সমাধান নেই।

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{ \}$ বা, ϕ

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-৩৯ সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ :

$$\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-1} = \frac{2x-1}{5}$$

সমাধান: $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-1} = \frac{2x-1}{5}$

$$\text{বা, } \frac{6x+1}{15} - \frac{2x-1}{5} = \frac{2x-4}{7x-1} \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{6x+1-6x+3}{15} = \frac{2x-4}{7x-1}$$

$$\text{বা, } \frac{4}{15} = \frac{2x-4}{7x-1}$$

$$\text{বা, } 15(2x-4) = 4(7x-1) \text{ [আড় গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } 30x-60 = 28x-4$$

$$\text{বা, } 30x-28x = 60-4 \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } 2x = 56$$

$$\text{বা, } x = 28$$

∴ নির্ণেয় সমাধান 28 এবং সমাধান সেট, $S = \{28\}$

উদাহরণ-৪৯ সমাধান কর :

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$$

সমাধান: $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$

$$\text{বা, } \frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)} = \frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$$

$$\text{বা, } \frac{2x-7}{x^2-7x+12} = \frac{2x-7}{x^2-7x+10}$$

প্রাপ্ত সমীকরণের দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুটির মান সমান। আবার, দুই পক্ষের লব সমান, কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে একমাত্র লবের মান শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

$$\therefore 2x-7=0 \text{ বা, } 2x-7$$

$$\therefore x = \frac{7}{2}$$

∴ নির্ণেয় সমাধান $\frac{7}{2}$

উদাহরণ-৬৯ দুই অজ্ঞবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কটি দশক স্থানীয় অঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশি। অজ্ঞবিশিষ্ট স্থান



MyMahbub

I ♥ MyMahbub

বিনিয়োগ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যার বিনয় বা, $x = 60$

সমাধান: মনে করি, একটি স্থানীয় কলকাতা হতে, একক স্থানীয় কলকাতা হতে, \therefore সংখ্যাটি $10x + (x + 2)$ বা, $11x + 2$ অতএব, একক স্থানীয় কলকাতা হতে, \therefore সংখ্যাটি $10(x + 2)$ বা, $10x + 20$

প্রশ্নমতে, $11x + 20 = 2(10x + 2) - 6$
বা, $11x + 20 = 20x + 4 - 6$
বা, $22x - 11x = 20 + 6 - 4$ [পক্ষান্তর করে]
বা, $11x = 22$
বা, $x = 2$

\therefore সংখ্যাটি $11x + 2 = 11 \times 2 + 2 = 24$
 \therefore প্রদত্ত সংখ্যাটি 24

উদাহরণ-81 একটি শ্রেণির প্রতিবেশে 4 জন করে ছাত্র বসলে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতি বেঞ্চে 3 জন করে ছাত্র বসলে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্র সংখ্যা x যেহেতু প্রতিবেশে 4 জন করে বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x}{4} + 3$

আবার, যেহেতু প্রতি বেঞ্চে 3 জন করে বসালে 6 জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x - 6}{3}$

যেহেতু বেঞ্চের সংখ্যা একই থাকবে,

$$\text{সুতরাং, } \frac{x}{4} + 3 = \frac{x - 6}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{x + 12}{4} = \frac{x - 6}{3}$$

$$\text{বা, } 4x - 24 = 3x + 36$$

$$\text{বা, } 4x - 3x = 36 + 24$$

সমাধান কর (১ - ১০) :

$$১। 3(5x - 3) = 2(x + 2)$$

সমাধান: $3(5x - 3) = 2(x + 2)$

$$\text{বা, } 15x - 9 = 2x + 4$$

$$\text{বা, } 15x - 2x = 4 + 9$$

$$\text{বা, } 13x = 13$$

$$\text{বা, } x = \frac{13}{13}$$

$$\therefore x = 1$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = 1$

$$২। \frac{ay}{b} - \frac{by}{a} = a^2 - b^2$$

সমাধান: $\frac{ay}{b} - \frac{by}{a} = a^2 - b^2$

$$\text{বা, } \frac{a^2y - b^2y}{ab} = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } \frac{y(a^2 - b^2)}{ab} = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } \frac{y}{ab} = 1 \quad \text{উভয় পক্ষকে } a^2 - b^2 \text{ দ্বারা ভাগ করে}$$

$$\text{বা, } y = ab$$

$$\therefore y = ab$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $y = ab$

$$৩। (z + 1)(z - 2) = (z - 4)(z + 2)$$

সমাধান: $(z + 1)(z - 2) = (z - 4)(z + 2)$

$$\text{বা, } z^2 - 2z + z - 2 = z^2 + 2z - 4z - 8$$

$$\text{বা, } z^2 - z - 2 = z^2 - 2z - 8$$

$$\text{বা, } z^2 - z - z^2 + 2z = 2 - 8 \quad \text{[পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } z = -6$$

$$\therefore z = -6$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $z = -6$

$$৪। \frac{7x}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2x}{5} - \frac{4}{3}$$

সমাধান: $\frac{7x}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2x}{5} - \frac{4}{3}$

$$\text{বা, } \frac{7x}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2x}{5} - \frac{3}{5} \quad \text{[পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{7x + 4}{3} = \frac{2x - 3}{5}$$

$$\text{বা, } 5(7x + 4) = 3(2x - 3) \quad \text{[বহুগুণ করে]}$$

$$\text{বা, } 35x + 20 = 6x - 9$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৫.১

বা, $35x - 6x = -9 - 20$

বা, $29x = -29$

বা, $x = \frac{-29}{29}$

$\therefore x = -1$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = -1$

৫। $\frac{4}{2x+1} + \frac{9}{3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

সমাধান: $\frac{4}{2x+1} + \frac{9}{3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{4(3x+2) + 9(2x+1)}{(2x+1)(3x+2)} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{12x+8+18x+9}{(2x+1)(3x+2)} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{30x+17}{6x^2+4x+3x+2} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{30x+17}{6x^2+7x+2} = \frac{25}{5x+4}$

বা, $(5x+4)(30x+17) = 25(6x^2+7x+2)$

[বিকল্প গুণ করে]

বা, $150x^2 + 85x + 120x + 68 = 150x^2 + 175x + 50$

বা, $150x^2 + 205x + 68 = 150x^2 + 175x + 50$

বা, $150x^2 + 205x - 150x^2 - 175x = 50 - 68$

[পক্ষান্তর করে]

বা, $30x = -18$

বা, $x = \frac{-18}{30}$

$\therefore x = -\frac{3}{5}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{3}{5}$

৬। $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

সমাধান: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{1(x+3) - 1(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{1(x+2) - 1(x+4)}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{x+3-x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+2-x-4}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{2}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+4)}$

বা, $(x+2)(x+4) = (x+1)(x+3)$

বা, $x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 3x + x + 3$

বা, $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 3$

বা, $x^2 + 6x - x^2 - 4x = 3 - 8$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x = -5$

বা, $x = \frac{-5}{2}$

$\therefore x = -\frac{5}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{5}{2}$

৭। $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

সমাধান: $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a}{x-a-b} + \frac{b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x-a-b} = \frac{b}{x-a-b} - \frac{b}{x-b}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{a(x-a-b) - a(x-a)}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{b(x-b) - b(x-a-b)}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{ax - a^2 - ab - ax + a^2}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{bx - b^2 - bx + ab + b^2}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{-ab}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{ab}{(x-b)(x-a-b)}$ [উভয় পক্ষকে $x-a-b$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{-1}{x-a} = \frac{1}{x-b}$ [উভয় পক্ষকে $x-a-b$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $-1(x-b) = 1(x-a)$

বা, $-x+b = x-a$

বা, $-x-x = -a-b$

বা, $-2x = -(a+b)$

বা, $2x = a+b$

$\therefore x = \frac{a+b}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{a+b}{2}$

৮। $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0$

সমাধান: $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} + 2 - 2 = 0$

বা, $\left(\frac{x-a}{b} - 1\right) + \left(\frac{x-b}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-3a-3b}{a+b} + 2\right) = 0$

বা, $\frac{x-a-b}{b} + \frac{x-b-a}{a} + \frac{x-3a-3b+2a+2b}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x-a-b}{b} + \frac{x-a-b}{a} + \frac{x-a-b}{a+b} = 0$

বা, $(x-a-b) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$

বা, $x-a-b = 0 \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} \neq 0 \text{ যা } x \text{ বর্জিত রাশি}\right]$

$\therefore x = a+b$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = a+b$

৯। $\frac{x-a}{a^2-b^2} = \frac{x-b}{b^2-a^2}$

সমাধান: $\frac{x-a}{a^2-b^2} = \frac{x-b}{b^2-a^2}$

বা, $\frac{x-a}{a^2-b^2} = -\frac{x-b}{(a^2-b^2)}$

বা, $x-a = -(x-b)$ [উভয় পক্ষকে a^2-b^2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x-a = -x+b$

বা, $x+x = a+b$

বা, $2x = a+b$

$\therefore x = \frac{a+b}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{a+b}{2}$

১০। $(3 + \sqrt{3})z + 2 = 5 + 3\sqrt{3}$

সমাধান: $(3 + \sqrt{3})z + 2 = 5 + 3\sqrt{3}$

বা, $(3 + \sqrt{3})z = 5 + 3\sqrt{3} - 2$

বা, $(3 + \sqrt{3})z = 3\sqrt{3} + 3$

বা, $z = \frac{3\sqrt{3} + 3}{3 + \sqrt{3}}$

বা, $z = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$

বা, $z = \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{(3 + \sqrt{3})}$

$\therefore z = \sqrt{3}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $z = \sqrt{3}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর : (১১ - ১৯)

১১। $2x(x + 3) = 2x^2 + 12$

সমাধান: $2x(x + 3) = 2x^2 + 12$

বা, $2x^2 + 6x = 2x^2 + 12$

বা, $2x^2 + 6x - 2x^2 = 12$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $6x = 12$

বা, $x = \frac{12}{6}$

$\therefore x = 2$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট, $x = \{2\}$

১২। $2x + \sqrt{2} = 3x - 4 - 3\sqrt{2}$

সমাধান: $2x + \sqrt{2} = 3x - 4 - 3\sqrt{2}$

বা, $2x - 3x = -4 - 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$

বা, $-x = -4 - 4\sqrt{2}$

বা, $-x = -4(1 + \sqrt{2})$

বা, $x = 4(1 + \sqrt{2})$

প্রদত্ত সমীকরণে বর্গমূলের চিহ্ন থাকার কারণে শূন্য পরীক্ষা প্রয়োজন।

প্রদত্ত সমীকরণটিতে $x = 4(1 + \sqrt{2})$ বসিয়ে পাই,

$2\{4(1 + \sqrt{2})\} + \sqrt{2} = 3\{4(1 + \sqrt{2})\} - 4 - 3\sqrt{2}$

বা, $8(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 12(1 + \sqrt{2}) - 4 - 3\sqrt{2}$

বা, $8 + 8\sqrt{2} + \sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2}$

বা, $8 + 9\sqrt{2} = 8 + 9\sqrt{2}$, যা সত্য

\therefore নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{4(1 + \sqrt{2})\}$

১৩। $\frac{x+a}{x-b} = \frac{x+a}{x+c}$

সমাধান: $\frac{x+a}{x-b} = \frac{x+a}{x+c}$

বা, $(x+a)(x+c) = (x+a)(x-b)$

বা, $x^2 + xc + xa + ac = x^2 - bx + ax - ab$

বা, $x^2 + xc + xa + ac - x^2 + bx - ax + ab = 0$

[পক্ষান্তর করে]

বা, $xc + ac + bx + ab = 0$

বা, $c(x+a) + b(x+a) = 0$

বা, $(x+a)(c+b) = 0$

এখানে, $x+a=0$

$(c+b) \neq 0$

$\therefore x = -a$

কারণ তা x বর্জিত রাশি

\therefore সমাধান, $x = -a$

নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{-a\}$

১৪। $\frac{z-2}{z-1} = 2 - \frac{1}{z-1}$

সমাধান: $\frac{z-2}{z-1} = 2 - \frac{1}{z-1}$

বা, $\frac{z-2}{z-1} + \frac{1}{z-1} = 2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{z-2+1}{(z-1)} = 2$

বা, $z-1 = 2(z-1)$

বা, $z-1 = 2z-2$

বা, $z-2z = -2+1$

বা, $-z = -1$

$\therefore z = 1$

কিন্তু $z = 1$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

\therefore সমীকরণটির কোনো সমাধান নেই।

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \{\}$

১৫। $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

সমাধান: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{2}{x-1}$

$(2x+1)(x-1) = 2(x^2+x)$

বা, $2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 + 2x$

বা, $2x^2 - x - 1 = 2x^2 + 2x$

বা, $x^2 - x - 2x^2 - 2x = 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \{\frac{1}{3}\}$

PDF বইয়ের অনলাইন লাইব্রেরী

MyMahbub.Com



$$১৬। \frac{m}{m-x} + \frac{n}{n-x} = \frac{m+n}{m+n-x}$$

সমাধান: $\frac{m}{m-x} + \frac{n}{n-x} = \frac{m+n}{m+n-x}$

বা, $\frac{m}{m-x} + \frac{n}{n-x} = \frac{m}{m+n-x} + \frac{n}{m+n-x}$

বা, $\frac{m}{m-x} - \frac{m}{m+n-x} = \frac{n}{m+n-x} - \frac{n}{n-x}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{m(m+n-x) - m(m-x)}{(m-x)(m+n-x)} = \frac{n(n-x) - n(m+n-x)}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\frac{m^2 + mn - mx - m^2 + mx}{(m-x)(m+n-x)} = \frac{n^2 - nx - nm - n^2 + nx}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\frac{mn}{(m-x)(m+n-x)} = \frac{-mn}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\frac{1}{(m-x)(m+n-x)} = \frac{-1}{(m+n-x)(n-x)}$ [উভয় পক্ষে mn দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(m+n-x)(n-x) = -\{(m-x)(m+n-x)\}$

বা, $(m+n-x)(n-x) + (m-x)(m+n-x) = 0$

বা, $(m+n-x)(n-x+m-x) = 0$

বা, $(m+n-x)(m+n-2x) = 0$

∴ হয় $m+n-x=0$ অথবা $m+n-2x=0$

কিন্তু $m+n-x=0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের ডানপক্ষের মান $\frac{m}{m-n}$ অর্থাৎ অসীম হয়।

ফলে $m+n-x=0$ গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং $m+n-2x=0$

বা, $m+n=2x$

∴ $x = \frac{m+n}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \left\{ \frac{m+n}{2} \right\}$

$$১৭। \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$$

সমাধান: $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{(x+4) - 1(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \frac{1(x+5) - 1(x+3)}{(x+3)(x+5)}$

বা, $\frac{x+4-x-2}{(x+2)(x+4)} = \frac{x+5-x-3}{(x+3)(x+5)}$

বা, $\frac{2}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+3)(x+5)}$

বা, $\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{(x+3)(x+5)}$

[উভয় পক্ষে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(x+3)(x+5) = (x+2)(x+4)$

বা, $x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 4x + 8$

বা, $x^2 + 8x + 15 = x^2 + 6x + 8$

বা, $x^2 + 8x - 6x - x^2 = 8 - 15$

বা, $2x = -7$

∴ $x = \frac{-7}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \left\{ \frac{-7}{2} \right\}$

$$১৮। \frac{2t-6}{9} + \frac{15-2t}{12-5t} = \frac{4t-15}{18}$$

সমাধান: $\frac{2t-6}{9} + \frac{15-2t}{12-5t} = \frac{4t-15}{18}$

বা, $\frac{2t-6}{9} - \frac{4t-15}{18} = -\left(\frac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\frac{2(2t-6) - (4t-15)}{18} = -\left(\frac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\frac{4t-12-4t+15}{18} = -\left(\frac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\frac{3}{18} = -\left(\frac{15-2t}{12-5t}\right)$

বা, $\frac{1}{6} = -\frac{15-2t}{12-5t}$

বা, $12-5t = -90+12t$

বা, $12+90 = 12t+5t$

বা, $102 = 17t$

বা, $t = \frac{102}{17}$

∴ $t = 6$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \{6\}$

$$১৯। \frac{x+2b^2+c^2}{a+b} + \frac{x+2c^2+a^2}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2}{c+a} = 0$$

$$\text{সমাধান: } = \frac{x+2b^2+c^2}{a+b} + \frac{x+2c^2+a^2}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2}{c+a} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x+2b^2+c^2}{a+b} + \frac{x+2c^2+a^2}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2}{c+a} + (b-c) + (c-a) + (a-b) = 0 \quad [\because (b-c) + (c-a) + (a-b) = 0]$$

$$\text{বা, } \frac{x+2b^2+c^2}{a+b} + (a-b) + \frac{x+2c^2+a^2}{b+c} + (b-c) + \frac{x+2a^2+b^2}{c+a} + (c-a) = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x+2b^2+c^2+(a-b)(a+b)}{a+b} + \frac{x+2c^2+a^2+(b-c)(b+c)}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2+(c-a)(c+a)}{c+a} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x+c^2+2b^2+a^2-b^2}{a+b} + \frac{x+a^2+2c^2+b^2-c^2}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2+c^2-a^2}{c+a} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x+c^2+a^2+b^2}{a+b} + \frac{x+a^2+b^2+c^2}{b+c} + \frac{x+a^2+b^2+c^2}{c+a} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x+a^2+b^2+c^2}{a+b} + \frac{x+a^2+b^2+c^2}{b+c} + \frac{x+a^2+b^2+c^2}{c+a} = 0$$

$$\text{বা, } (x+a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = 0$$

$$\text{কিছু } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \neq 0 \quad [\text{কারণ } x \text{ বর্জিত রাশি}]$$

$$\text{সুতরাং } x+a^2+b^2+c^2=0$$

$$\text{বা, } x = -a^2-b^2-c^2$$

$$\therefore x = -(a^2+b^2+c^2)$$

$$\text{অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট } S = \{-(a^2+b^2+c^2)\}$$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (20-29) :

২০। একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\frac{2}{5}$ গুন। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, একটি সংখ্যা x

$$\therefore \text{অপর সংখ্যাটি} = x \text{ এর } \frac{2}{5} = \frac{2x}{5}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } x + \frac{2x}{5} = 98$$

$$\text{বা, } \frac{5x+2x}{5} = 98$$

$$\text{বা, } 7x = 490$$

$$\text{বা, } x = \frac{490}{7}$$

$$\therefore x = 70$$

এখন, একটি সংখ্যা $x = 70$

$$\therefore \text{অপর সংখ্যাটি} = \frac{2x}{5} = \frac{2 \times 70}{5} = \frac{140}{5} = 28$$

অতএব সংখ্যা দুটি 28, 70

২১। একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\frac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: ভগ্নাংশটি প্রকৃত বলে তার লব হর অপেক্ষা ছোট হবে।

ধরি, ভগ্নাংশটির লব = x তাহলে, ভগ্নাংশটির হর = $x+1$

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি} = \frac{x}{x+1}$$

লব থেকে 2 বিয়োগ এবং হরের সাথে 2 যোগ করলে নতুন

$$\text{ভগ্নাংশটি হয়} = \frac{x-2}{x+1+2} \text{ অর্থাৎ } \frac{x-2}{x+3}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{বা, } 6(x-2) = x+3$$

$$\text{বা, } 6x-12 = x+3$$

$$\text{বা, } 6x-x = 12+3$$

$$\text{বা, } 5x = 15$$

$$\text{বা, } x = \frac{15}{5}$$

$$\therefore x = 3$$

$$\text{অতএব, ভগ্নাংশটি} = \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভগ্নাংশ} = \frac{3}{4}$$

২২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হবে। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: এখানে, অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি = 9

মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অংক = x

তাহলে, দশক স্থানীয় অংক = $9-x$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10 \times \text{দশক স্থানীয় অংক} + \text{একক স্থানীয় অংক}$$

$$= 10 \times (9-x) + x = 90 - 10x + x = 90 - 9x$$

$$\text{আবার, অংক দুইটি স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি}$$

$$= 10 \times x + (9-x) = 9x + 9$$

$$\text{এখন, প্রশ্নমতে, } 9x + 9 = 90 - 9x - 45$$

$$\text{বা, } 9x + 9x = 45 - 9$$

$$\text{বা, } 18x = 36$$

$$\text{বা, } x = \frac{36}{18}$$

$$\therefore x = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{সংখ্যাটি} &= 90 - 9x \\ &= 90 - 9 \times 2 = 90 - 18 = 72 \end{aligned}$$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 72 (Ans.)

২৩। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।

সমাধান: মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x

তাহলে, দশক স্থানীয় অঙ্কটি = $2x$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10 \times 2x + x = 20x + x = 21x$$

$$\text{আবার, অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি} = x + 2x = 3x$$

$$\therefore \text{অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ} = 3x \times 7 = 21x$$

অতএব, সংখ্যাটি = অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ অর্থাৎ $21x$ (Showed)

২৪। একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। বছর শেষে 256 টাকা মুনাফা পেলেন তিন কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন?

সমাধান: দেয়া আছে, মোট টাকা = 5600 টাকা

প্রাপ্ত মুনাফা = 256 টাকা

সুদের হার = 5% ও 4% (সরল সুদ)

ধরি, 5% হারে বিনিয়োগের পরিমাণ = x টাকা

তাহলে, 4% হারে বিনিয়োগের পরিমাণ = $(5600 - x)$ টাকা।

আমরা জানি, সুদ = আসল \times সুদের হার \times বছর

$$\begin{aligned} \therefore 5\% \text{ হারে } x \text{ টাকার 1 বছরের সুদ} &= x \times \frac{5}{100} \times 1 \\ &= \frac{x}{20} \text{ টাকা} \end{aligned}$$

এবং 4% হারে $(5600 - x)$ টাকার 1 বছরের সুদ

$$= (5600 - x) \times \frac{4}{100} \times 1 = \frac{5600 - x}{25} \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{মোট সুদ} = \frac{x}{20} + \frac{5600 - x}{25} \text{ টাকা}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{x}{20} + \frac{5600 - x}{25} = 256$$

$$\text{বা, } \frac{x}{20} + \frac{5600}{25} - \frac{x}{25} = 256$$

$$\text{বা, } \frac{x}{20} + 224 - \frac{x}{25} = 256$$

$$\text{বা, } \frac{x}{20} - \frac{x}{25} = 256 - 224$$

$$\text{বা, } \frac{5x - 4x}{100} = 32$$

$$\text{বা, } \frac{x}{100} = 32$$

$$\text{বা, } x = 3200$$

অতএব, 5% হার সুদে বিনিয়োগের পরিমাণ 3200 টাকা। (Ans.)

২৫। একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47; মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়া দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?

সমাধান: লঞ্চে মোট যাত্রী সংখ্যা = 47

মনে করি, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা = x

$$\therefore \text{ডেকের যাত্রী সংখ্যা} = (47 - x)$$

এখন, ডেকের মাথাপিছু ভাড়া = 30 টাকা

$$\therefore \text{ডেকের মোট ভাড়া} = 30 \times (47 - x) \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া} = 2 \times \text{মাথাপিছু ডেকের ভাড়া} = 2 \times 30 = 60 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{কেবিনের মোট ভাড়া} = 60x \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{লঞ্চে সর্বমোট ভাড়া} = \text{কেবিনের ভাড়া} + \text{ডেকের ভাড়া} = 60x + 30 \times (47 - x)$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 60x + 30(47 - x) = 1680$$

$$\text{বা, } 60x + 1410 - 30x = 1680$$

$$\text{বা, } 30x = 1680 - 1410$$

$$\text{বা, } 30x = 270$$

$$\text{বা, } x = \frac{270}{30}$$

$$\therefore x = 9$$

অতএব, কেবিনের নির্ণেয় যাত্রী সংখ্যা 9 জন

২৬। 120 টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

সমাধান: দেওয়া আছে, পঁচিশ ও পঞ্চাশ পয়সার মোট মুদ্রার সংখ্যা 120 টি।

এবং সর্বমোট মুদ্রার মান 35 টাকা।

ধরি, পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা = x

তাহলে পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা = $(120 - x)$

এখন, পঁচিশ পয়সার মোট মুদ্রার মান = $25x$ পয়সা

এবং পঞ্চাশ " " " " = $50(120 - x)$ পয়সা

$$\therefore \text{সর্বমোট মুদ্রার মান} = 25x + 50(120 - x) \text{ পয়সা}$$

$$= (25x + 6000 - 50x)$$

$$= (6000 - 25x)$$

$$= \frac{6000 - 25x}{100} \text{ টাকা}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{6000 - 25x}{100} = 35$$

$$\text{বা, } 6000 - 25x = 3500$$

$$\text{বা, } -25x = 3500 - 6000$$

$$\text{বা, } -25x = -2500$$

$$\text{বা, } x = \frac{-2500}{-25}$$

$$\therefore x = 100$$

\therefore পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100

এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা = $(120 - 100) = 20$

\therefore নির্ণেয় পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100 টি

এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 20 টি

২৭। একটি গাড়ি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো গাড়িটি মোট 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে?

সমাধান: দেয়া আছে, 5 ঘণ্টায় যায় 240 কি.মি.

১ম অংশ যায় ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে

২য় অংশ যায় ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে

ধরি, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে যায় x কি.মি.

তাহলে, ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে যায় $(240 - x)$ কি.মি.

প্রথম অংশে 60 কি. মি. যায় 1 ঘণ্টায়

∴ " " " " $\frac{1}{60}$ "

∴ " " x " " $\frac{x}{60}$ "

আবার, দ্বিতীয় অংশে 40 কি.মি. যায় 1 ঘণ্টায়

∴ " " " " $\frac{1}{40}$ "

∴ " " (240-x) " " $\frac{240-x}{40}$ "

∴ মোট সময় = $\left(\frac{x}{60} + \frac{240-x}{40}\right)$ ঘণ্টা

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{60} + \frac{240-x}{40} = 5$

$$\text{বা, } \frac{2x + 3(240 - x)}{120} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{2x + 720 - 3x}{120} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{720 - x}{120} = 5$$

$$\text{বা, } 720 - x = 600$$

$$\text{বা, } -x = 600 - 720$$

$$\text{বা, } -x = -120$$

$$\text{বা, } x = 120$$

অতএব, ঐ ব্যক্তি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে 120 কি. মি. পথ অতিক্রম করেছিল। (Ans.)

□ অনুশীলনী- ৫.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

১। $x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে a, b, c এর মান লেখ।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2 - 1 = 0$ (i)

এবং $ax^2 + bx + c = 0$ (ii)

(i) সমীকরণকে লেখা যায়, $x^2 - 0.x - 1 = 0$ (iii)

(ii) নং ও (iii) সমীকরণ তুলনা করে পাই,

∴ a = 2, b = 0, c = -1

২। $(x - 1)^2 = 0$ সমীকরণটির ঘাত কত? এর মূল কয়টি ও কী কী?

সমাধান: দেওয়া আছে, $(x - 1)^2 = 0$

$$\text{বা, } (x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 1$$

প্রদত্ত সমীকরণের ঘাত = 2

∴ সমীকরণের মূল 2টি এবং সেগুলো হলো 1, 1.

□ কাজ-: সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর :

১। একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে ঐ সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল ঠিক পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার নয়গুণের সমান হবে। সংখ্যাটি কত? [পৃষ্ঠা-৯৮]

সমাধান: মনে করি, স্বাভাবিক সংখ্যাটি x

$$\text{প্রশ্নমতে, } x^2 + x = 9(x + 1)$$

$$\text{বা, } x^2 + x = 9x + 9$$

$$\text{বা, } x^2 + x - 9x - 9 = 0 \text{ [পঞ্চান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 9x + x - 9 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 9) + 1(x - 9) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 9)(x + 1) = 0$$

$$\text{বা, } x - 9 = 0$$

$$\text{অথবা, } x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } x = 9$$

$$\text{বা, } x = -1$$

$$\therefore x = 9$$

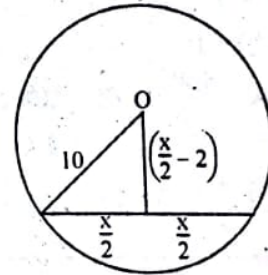
$$\therefore x = -1$$

[ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব নির্ণেয় স্বাভাবিক সংখ্যা = 9

২। 10 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হতে একটি জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বৃত্তটির অর্ধ-জ্যা অপেক্ষা 2 সে.মি. কম। আনুমানিক চিত্র অঙ্কন করে জ্যাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, জ্যাটির দৈর্ঘ্য x সে.মি.

$$\therefore \text{পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী } \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = (10)^2$$

$$\text{বা, } \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 + (2)^2 = 100$$

$$\text{বা, } \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2x + 4 = 100$$

$$\text{বা, } \frac{2x^2}{4} - 2x = 100 - 4$$

$$\text{বা, } \frac{x^2}{2} - 2x = 96$$

$$\text{বা, } x^2 - 4x = 192$$

$$\text{বা, } x^2 - 4x - 192 = 0 \text{ [পঞ্চান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 16)(x + 12) = 0$$

$$\text{বা, } x - 16 = 0$$

$$\text{অথবা } x + 12 = 0$$

$$\text{বা, } x = 16$$

$$\text{বা, } x = -12$$

$$\therefore x = 16$$

$$\therefore x = -12$$

[ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব নির্ণেয় জ্যাটির দৈর্ঘ্য 16 সে.মি.।

২৪০ টাকায় $(x + 1)$ টি কলম পেয়ে তবে প্রতিটি কলমের দাম

গড়তো $\frac{240}{x+1}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x}$

বা, $\frac{240}{x+1} = \frac{240-x}{x}$

বা, $240x = (x+1)(240-x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x+16) - 15(x+16) = 0$

বা, $(x+16)(x-15) = 0$

$\therefore x+16=0$, অথবা $x-15=0$

$x+16=0$ হলে, $x=-16$

$x-15=0$ হলে, $x=15$

কিন্তু কলমের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x \neq -16; \therefore x=15$

\therefore শাহিক ১৫টি কলম কিনেছিল। (Ans.)

উদাহরণ-১৬৯ একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির একটি পরীক্ষায় x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত মোট নম্বর ১৯৫০; একই পরীক্ষায় অন্য একজন নতুন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর ৩৪ যোগ করায় প্রাপ্ত নম্বরের গড়ে ১ কমে গেল।

ক. পৃথকভাবে x জন ছাত্রের এবং নতুন ছাত্রসহ সকলের প্রাপ্ত নম্বরের গড় x এর মাধ্যমে লেখ।

খ. প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করে দেখাও যে, $x^2 + 35x - 1950 = 0$.

গ. x এর মান বের করে দুইক্ষেত্রে নম্বরের গড় কত তা নির্ণয় কর।

I ❤️ MyMahbub

$\frac{1950+34}{x+1} = \frac{1984}{x+1}$

খ. প্রশ্নমতে $\frac{1950}{x} = \frac{1984}{x+1} + 1$

বা, $\frac{1950}{x} - \frac{1984}{x+1} = 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{1950x + 1950 - 1984x}{x(x+1)} = 1$

বা, $x^2 + x = 1950x - 1984x + 1950x$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + x = 1950 - 34x$

$\therefore x^2 + 35x - 1950 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. 'খ' থেকে পাই, $x^2 + 35x - 1950 = 0$

বা, $x^2 + 65x - 30x - 1950 = 0$

বা, $x(x+65) - 30(x+65) = 0$

বা, $(x+65)(x-30) = 0$

$\therefore x+65=0$, অথবা, $x-30=0$

$x+65=0$ হলে, $x=-65$ যা, গ্রহণযোগ্য নয়

আবার, $x-30=0$ হলে, $x=30$

$\therefore x=30$

\therefore প্রথম ক্ষেত্রে গড় $= \frac{1950}{30} = 65$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, গড় $= \frac{1984}{31} = 64$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৫.২

১. x কে চলক ধরে $a^2x + b = 0$ সমীকরণটির ঘাত নিচের কোনটি?

ক ৩ খ ২
গ ১ ঘ ০

(গ)

২. নিচের কোনটি অভেদ?

ক $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 4x$
খ $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$
গ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 2ab$
ঘ $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(খ)

৩. $(x-4)^2 = 0$ সমীকরণের মূল কয়টি?

ক ১টি খ ২টি
গ ৩টি ঘ ৪টি

(খ)

৪. $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি?

ক ৩, ৪ খ ৩, -৪
গ -৩, ৪ ঘ -৩, -৪

(গ)

৫. $3x^2 - x + 5 = 0$ সমীকরণে x এ সহগ কত?

ক ৩ খ ২
গ ১ ঘ -১

(ঘ)

৬. নিচের সমীকরণগুলো লক্ষ কর:

i. $2x + 3 = 9$

ii. $\frac{x}{2} - 2 = -1$

iii. $2x + 1 = 5$

উপরের কোন সমীকরণগুলো পরস্পর সমতুল্য?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

(ঘ)

৭. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ সমীকরণের সমাধান সেট নিচের কোনটি?

ক $\{a, b\}$ খ $\{a, -b\}$
গ $\{-a, b\}$ ঘ $\{-a, -b\}$

(ক)

৮. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। এই তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

১. একক স্থানীয় অঙ্ক x হলে, সংখ্যাটি কত?

ক $2x$ খ $3x$
গ $12x$ ঘ $21x$

(ঘ)

২. অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি কত হবে?

ক $3x$ খ $4x$
গ $12x$ ঘ $21x$

(গ)

৩. $x = 2$ হলে, মূল সংখ্যার সাথে স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যার পার্থক্য কত?

ক ১৮ খ ২০
গ ৩৪ ঘ ৩৬

(ক)

সমাধান কর : (৯ - ১৮)

৯। $(x+2)(x-\sqrt{3})=0$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $(x+2)(x-\sqrt{3})=0$

হয় $x+2=0$

বা, $x=-2$

অথবা, $x-\sqrt{3}=0$

বা, $x=\sqrt{3}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x=-2, \sqrt{3}$

১০। $(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{3}x-2)=0$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{3}x-2)=0$

হয় $\sqrt{2}x+3=0$

বা, $\sqrt{2}x=-3$

বা, $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

বা, $x=-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$\therefore x=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

অথবা, $\sqrt{3}x-2=0$

বা, $\sqrt{3}x=2$

বা, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $x=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$

বা, $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $x=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

১১। $y(y-5)=6$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি

$y(y-5)=6$

বা, $y^2-5y=6$

বা, $y^2-5y-6=0$

বা, $y^2-6y+y-6=0$

বা, $y(y-6)+1(y-6)=0$

বা, $(y-6)(y+1)=0$

হয়, $y-6=0$

বা, $y=6$

অথবা, $y+1=0$

বা, $y=-1$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $y=-1, 6$

১২। $(y+5)(y-5)=24$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $(y+5)(y-5)=24$

বা, $y^2-5^2=24$

বা, $y^2-25=24$

বা, $y^2=24+25$

বা, $y^2=49$

বা, $y=\pm\sqrt{49}$

$\therefore y=\pm 7$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $y=\pm 7$

১৩। $2(z^2-9)+9z=0$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $2(z^2-9)+9z=0$

বা, $2z^2-18+9z=0$

বা, $2z^2+12z-3z-18=0$

বা, $2z(z+6)-3(z+6)=0$

বা, $(z+6)(2z-3)=0$

হয়, $z+6=0$

অথবা, $2z-3=0$

বা, $z=-6$

বা, $2z=3$

$\therefore z=\frac{3}{2}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান, $z=-6, \frac{3}{2}$

১৪। $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

বা, $\frac{3(5z-1)+4(2z+1)}{(2z+1)(5z-1)}=2$

বা, $\frac{15z-3+8z+4}{10z^2-2z+5z-1}=2$

বা, $\frac{23z+1}{10z^2+3z-1}=2$

বা, $23z+1=2(10z^2+3z-1)$

বা, $23z+1=20z^2+6z-2$

বা, $20z^2+6z-2-23z-1=0$

বা, $20z^2-17z-3=0$

বা, $20z^2-20z+3z-3=0$

বা, $20z(z-1)+3(z-1)=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(z-1)(20z+3)=0$

হয় $z-1=0$ অথবা, $20z+3=0$

বা, $z=1$ বা, $20z=-3$

$\therefore z=\frac{-3}{20}$

অতএব নির্ণেয় সমাধান $z=1, \frac{-3}{20}$

১৫। $\frac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$

বা, $\frac{4+(\sqrt{10x-4})^2}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{4+10x-4}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{10x}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $10x=5\sqrt{10x-4}$

বা, $2x=\sqrt{10x-4}$

বা, $(2x)^2=(\sqrt{10x-4})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4x^2=10x-4$

বা, $\frac{4x^2}{2}=\frac{10x-4}{2}$

[উভয়পক্ষকে ২ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $2x^2=\frac{2(5x-2)}{2}$

বা, $2x^2=5x-2$

বা, $2x^2-5x+2=0$

বা, $2x^2-4x-x+2=0$

বা, $2x(x-2)-1(x-2)=0$

বা, $(x-2)(2x-1)=0$

এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ

দুই বা ততোধিক রাশির গুনকনের মান শূন্য হবে এদের অন্তত একটি শূন্য হয়।

$$\therefore \text{হয়, } x-2=0 \quad \text{অথবা, } 2x-1=0$$

$$\therefore x=2 \quad \text{বা, } 2x=1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $x=2, \frac{1}{2}$ (Ans.)

$$১৬। \frac{x-2}{x+2} + \frac{6(x-2)}{x-6} = 1$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x-2}{x+2} + \frac{6(x-2)}{x-6} = 1$

$$\text{বা, } (x-2) \left\{ \frac{1}{x+2} + \frac{6}{x-6} \right\} = 1$$

$$\text{বা, } (x-2) \left\{ \frac{1(x-6) + 6(x+2)}{(x+2)(x-6)} \right\} = 1$$

$$\text{বা, } (x-2) \frac{(x-6+6x+12)}{(x+2)(x-6)} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{(x-2)(7x+6)}{(x+2)(x-6)} = 1$$

$$\text{বা, } (x-2)(7x+6) = (x+2)(x-6)$$

$$\text{বা, } 7x^2 - 14x + 6x - 12 = x^2 + 2x - 6x - 12$$

$$\text{বা, } 7x^2 - 8x - 12 = x^2 - 4x - 12$$

$$\text{বা, } 7x^2 - 8x - 12 - x^2 + 4x + 12 = 0$$

$$\text{বা, } 6x^2 - 4x = 0$$

$$\text{বা, } 2x(3x-2) = 0$$

$$\text{বা, } x(3x-2) = 0 \quad [\text{উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\therefore \text{হয়, } x=0 \quad \text{অথবা, } 3x-2=0$$

$$\text{বা, } 3x=2$$

$$\therefore x=\frac{2}{3}$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $x=0, \frac{2}{3}$

$$১৭। \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$

$$\text{বা, } \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{b}{x} - \frac{a}{x} \quad [\text{পক্ষান্তর করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{bx-ax}{ab} = \frac{b-a}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{x(b-a)}{ab} = \frac{(b-a)}{x}$$

$$\text{বা, } x^2(b-a) = ab(b-a)$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{ab(b-a)}{(b-a)}$$

$$\text{বা, } x^2 = ab$$

$$\text{বা, } x = \pm \sqrt{ab}$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm \sqrt{ab}$

$$১৮। \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\text{সমাধান: } \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\text{বা, } \frac{x-a}{x-b} - \frac{b}{a} + \frac{x-b}{x-a} - \frac{a}{b} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{a(x-a) - b(x-b)}{a(x-b)} + \frac{b(x-b) - a(x-a)}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{ax - a^2 - bx + b^2}{a(x-b)} + \frac{bx - b^2 - ax + a^2}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{(ax - a^2 - bx + b^2)}{a(x-b)} + \frac{-(ax - a^2 - bx + b^2)}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{ax - a^2 - bx + b^2}{a(x-b)} - \frac{ax - a^2 - bx + b^2}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } (ax - a^2 - bx + b^2) \left\{ \frac{1}{a(x-b)} - \frac{1}{b(x-a)} \right\} = 0$$

$$\text{অথবা, } \frac{1}{ax-ab} - \frac{1}{bx-ab} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{ax-ab} = \frac{1}{bx-ab}$$

$$\text{বা, } ax-ab = bx-ab$$

$$\text{বা, } ax-bx = ab-ab$$

$$\text{বা, } ax-bx = ab-ab$$

$$\text{বা, } x(a-b) = 0$$

$$\text{বা, } x = \frac{0}{a-b}$$

$$\text{বা, } x=0$$

$$\therefore \text{হয়, } ax - a^2 - bx + b^2 = 0$$

$$\text{বা, } ax - bx = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } x(a-b) = (a+b)(a-b)$$

$$\therefore x = a+b$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $0, (a+b)$

সমাধান সেট নির্ণয় কর : (১৯ - ২৫)

$$১৯। \frac{3}{x} + \frac{4}{x+1} = 2$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{3}{x} + \frac{4}{x+1} = 2$

$$\text{বা, } \frac{3(x+1) + 4x}{x(x+1)} = 2$$

$$\text{বা, } \frac{3x+3+4x}{x^2+x} = 2 \quad [\text{আড়গুণন করে}]$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 2x = 7x + 3$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 2x - 7x - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 6x + x - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2x(x-3) + 1(x-3) = 0$$

$$\text{বা, } (x-3)(2x+1) = 0$$

$$\text{হয় } x-3=0 \quad \text{অথবা } 2x+1=0$$

$$\therefore x=3$$

$$\text{বা } 2x=-1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান সেট : $\left\{ 3, -\frac{1}{2} \right\}$

২০। $\frac{x+7}{x+1} + \frac{2x+6}{2x+1} = 5$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x+7}{x+1} + \frac{2x+6}{2x+1} = 5$

বা, $\frac{(x+7)(2x+1) + (2x+6)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = 5$

বা, $5(x+1)(2x+1) = (x+7)(2x+1) + (2x+6)(x+1)$

বা, $5(2x^2 + x + 2x + 1) = 2x^2 + x + 14x + 7 + 2x^2 + 2x + 6x + 6$

বা, $10x^2 + 5x + 10x + 5 = 4x^2 + 23x + 13$

বা, $10x^2 + 15x + 5 - 4x^2 - 23x - 13 = 0$

বা, $6x^2 - 8x - 8 = 0$

বা, $3x^2 - 4x - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3x^2 - 6x + 2x - 4 = 0$

বা, $3x(x-2) + 2(x-2) = 0$

বা, $(3x+2)(x-2) = 0$

∴ হয় $3x+2=0$ অথবা, $x-2=0$

বা, $3x=-2$ ∴ $x=-\frac{2}{3}$

∴ $x=-\frac{2}{3}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{-\frac{2}{3}, 2\}$ (Ans.)

২১। $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

বা, $\frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)} = \frac{b+a}{ab}$

বা, $\frac{x-a-b-x}{ax+bx+x^2} = \frac{a+b}{ab}$

বা, $\frac{-(a+b)}{ax+bx+x^2} = \frac{(a+b)}{ab}$

বা, $\frac{-1}{ax+bx+x^2} = \frac{1}{ab}$

বা, $ax+bx+x^2 = -ab$

বা, $x^2+ax+bx+ab=0$

বা, $x(x+a)+b(x+a)=0$

বা, $(x+a)(x+b)=0$

∴ হয়, $x+a=0$ অথবা, $x+b=0$

∴ $x=-a$ ∴ $x=-b$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{-a, -b\}$

২২। $\frac{ax+b}{a+bx} = \frac{cx+d}{c+dx}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{ax+b}{a+bx} = \frac{cx+d}{c+dx}$

বা, $(ax+b)(c+dx) = (cx+d)(a+bx)$

বা, $acx+adx^2+bc+bdx = acx+bcx^2+ad+bdx$

বা, $adx^2+acx+bc+bdx - acx - bcx^2 - ad - bdx = 0$

বা, $adx^2 - bcx^2 - ad + bc = 0$

বা, $x^2(ad-bc) - 1(ad-bc) = 0$

বা, $(ad-bc)(x^2-1) = 0$

বা, $x^2-1=0$ [উভয় পক্ষকে $(ad-bc)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2=1$

∴ $x=\pm 1$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{1, -1\}$

২৩। $x + \frac{1}{x} = 2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 2$

বা, $\frac{x^2+1}{x} = 2$

বা, $x^2+1=2x$

বা, $x^2-2x+1=0$

বা, $(x-1)^2=0$

বা, $x-1=0$

∴ $x=1$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{1\}$

২৪। $2x^2 - 4ax = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x^2 - 4ax = 0$

বা, $2x(x-2a)=0$

∴ হয়, $2x=0$

∴ $x=0$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{0, 2a\}$

২৫। $\frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 - (x-1)^2} = 2$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 - (x-1)^2} = 2$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1 - (x^3-3x^2+3x-1)}{x^2+2x+1 - (x^2-2x+1)} = 2$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1 - x^3+3x^2-3x+1}{x^2+2x+1 - x^2+2x-1} = 2$

বা, $\frac{6x^2+2}{4x} = 2$

বা, $6x^2+2=8x$

বা, $6x^2-8x+2=0$

বা, $3x^2-4x+1=0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3x^2-3x-x+1=0$

বা, $3x(x-1)-1(x-1)=0$

বা, $(3x-1)(x-1)=0$

দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের মান শূন্য হলে এদের অন্তত একটি শূন্য হয়।

হয়, $3x-1=0$ অথবা, $x-1=0$

বা, $3x=1$ ∴ $x=\frac{1}{3}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট $\{\frac{1}{3}, 1\}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (২৬ - ৩১)

২৬। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15

এবং এদের গুণফল 56; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং, এর দশক স্থানীয় অঙ্ক = 15 - x

∴ সংখ্যাটি = $x + 10(15 - x)$

= $x + 150 - 10x$

= $150 - 9x$

প্রশ্নমতে, $x(15 - x) = 56$

$$\text{বা, } 15x - x^2 = 56$$

$$\text{বা, } x^2 - 15x + 56 = 0$$

[(-) দ্বারা গুণ করে পক্ষান্তর করা হলো]

$$\text{বা, } x^2 - 8x - 7x + 56 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 8) - 7(x - 8) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 8)(x - 7) = 0$$

$$\text{বা, } x - 8 = 0 \quad \text{অথবা } x - 7 = 0$$

$$\therefore x = 8 \quad \therefore x = 7$$

$$x = 8 \text{ হলে সংখ্যাটি} = 150 - 9 \times 8$$

$$= 150 - 72$$

$$= 78$$

$$\text{আবার, } x = 7 \text{ হলে সংখ্যাটি} = 150 - 9 \times 7$$

$$= 150 - 63$$

$$= 87$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান 78 বা 87

২৭। একটি আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার কক্ষের প্রস্থ = x মিটার

তাহলে, দৈর্ঘ্য = $\frac{192}{x}$ মিটার

দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য = $\left(\frac{192}{x} - 4\right)$ মিটার

এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে প্রস্থ = $(x + 4)$ মিটার

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = \left(\frac{192}{x} - 4\right)(x + 4) = \left(\frac{192 - 4x}{x}\right)(x + 4)$$

$$= \frac{192x - 4x^2 + 768 - 16x}{x}$$

$$= \frac{176x - 4x^2 + 768}{x} \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{176x - 4x^2 + 768}{x} = 192$$

$$\text{বা, } 176x - 4x^2 + 768 = 192x$$

$$\text{বা, } 4x^2 + 192x - 176x = 768$$

$$\text{বা, } 4x^2 + 16x - 768 = 0$$

$$\text{বা, } 4(x^2 + 4x - 192) = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 4x - 192 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 16x - 12x - 192 = 0$$

$$\text{বা, } x(x + 16) - 12(x + 16) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 12)(x + 16) = 0$$

$$\text{হয়, } (x - 12) = 0$$

$$\therefore x = 12$$

$$\text{অথবা, } (x + 16) = 0$$

$$\therefore x = -16$$

কিন্তু প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং -16 গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\text{অতএব, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য} = \frac{192}{x} = \frac{192}{12} = 16 \text{ মিটার}$$

\therefore নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার

২৮। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে. মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনেকরি, ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = x সে. মি.

অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = $(x + 3)$ সে. মি.

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\text{বা, } x^2 + (x + 3)^2 = 15^2$$

$$\text{বা, } x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 6x + 9 = 225$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 6x + 9 - 225 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 3x - 108 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 12x - 9x - 108 = 0$$

$$\text{বা, } x(x + 12) - 9(x + 12) = 0$$

$$\text{বা, } (x + 12)(x - 9) = 0$$

$$\therefore x + 12 = 0 \text{ অথবা } x - 9 = 0$$

$$\therefore x = -12 \text{ অথবা } x = 9$$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 সে.মি. এবং

অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = $(9 + 3)$ সে. মি. = 12 সে. মি.

২৯। একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সে. মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে এর উচ্চতা কত?

সমাধান:

মনেকরি, ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের উচ্চতা = x সে.মি.

$$\therefore \text{ভূমি} = (2x + 6) \text{ সে.মি.}$$

আমরা জানি,

$$\text{ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{1}{2} \times (2x + 6) \times x = 810$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \times 2(x + 3) \times x = 810$$

$$\text{বা, } (x + 3)x = 810$$

$$\text{বা, } x^2 + 3x = 810$$

$$\text{বা, } x^2 + 3x - 810 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 30x - 27x - 810 = 0$$

$$\text{বা, } x(x + 30) - 27(x + 30) = 0$$

$$\text{বা, } (x + 30)(x - 27) = 0$$

$$\therefore \text{হয়, } x + 30 = 0$$

$$\text{বা, } x = -30$$

উচ্চতা কখনও ঋণাত্মক হতে পারেনা

$$\therefore x = -30 \text{ গ্রহণযোগ্য নয়।}$$

$$\text{অথবা, } x - 27 = 0$$

$$\therefore x = 27$$

অতএব, ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের নির্ণেয় উচ্চতা = 27 সে.মি.

৩০। একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা টাকা দেওয়ার মোট 420 টাকা টাকা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে টাকা দিল?

সমাধান: মনে করি,

শ্রেণিতে ছাত্র/ছাত্রীর সংখ্যা x জন

এবং সহপাঠীর সংখ্যা $x - 1$ জন

\therefore প্রত্যেকে টাকা দেয় $(x - 1)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $x(x - 1) = 420$

বা, $x^2 - x = 420$

বা, $x^2 - x - 420 = 0$

বা, $x^2 - 21x + 20x - 420 = 0$

বা, $x(x - 21) + 20(x - 21) = 0$

বা, $(x - 21)(x + 20) = 0$

হয় $x - 21 = 0$ অথবা, $x + 20 = 0$

$\therefore x = 21$

$\therefore x = -20$ গ্রহণযোগ্য নয়

[কারণ ছাত্র/ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।]

\therefore প্রত্যেকে টাকা দেয় $(21 - 1) = 20$ টাকা

অতএব ঐ শ্রেণিতে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 21 জন এবং প্রত্যেকে টাকা দেয় 20 টাকা। (Ans.)

৩১। একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে টাকা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণি ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা x

প্রত্যেকে টাকা দেয় $(x + 30)$ পয়সা

\therefore মোট টাকা $= x(x + 30)$ পয়সা

দেয়া আছে, মোট উঠানো টাকা $= 70$ টাকা $= 7000$ পয়সা

প্রশ্নমতে, $x(x + 30) = 7000$

বা, $x^2 + 30x = 7000$

বা, $x^2 + 30x - 7000 = 0$

বা, $x^2 + 100x - 70x - 7000 = 0$

বা, $x(x + 100) - 70(x + 100) = 0$

বা, $(x + 100)(x - 70) = 0$

হয় $(x - 70)$ অথবা $x + 100 = 0$

$\therefore x = 70$

$\therefore x = -100$

যেহেতু ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, $x = -100$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore x = 70$

অতএব, নির্ণয় ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 70 জন

৩২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।

ক) চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি ও স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।

খ) সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

গ) প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সেন্টিমিটারে কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক $= x$

তাহলে এর দশক স্থানীয় অঙ্ক $= 7 - x$

\therefore সংখ্যাটি হলো $= x + 10(7 - x)$

$= x + 70 - 10x$

$= 70 - 9x$

এবং স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি হলো $= 10x + 7 - x$
 $= 9x + 7$

খ) প্রশ্নমতে, $9x + 7 = 70 - 9x + 9$

বা, $9x + 7 = 79 - 9x$

বা, $9x + 9x = 79 - 7$

বা, $18x = 72$

বা, $x = \frac{72}{18}$

$\therefore x = 4$

\therefore নির্ণয় সংখ্যাটি $= 70 - 9x$

$= 70 - 9 \cdot 4$

$= 70 - 36$

$= 34$

গ) প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় হলো 3, 4

তাহলে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $a = 4$ সে.মি.

এবং প্রস্থ $b = 3$ সে.মি.

সুতরাং আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{16 + 9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= 5$ সে.মি.

\therefore বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times$ এক বাহুর দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{2} \times 5$

$= 5\sqrt{2}$

অতএব আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং

বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $5\sqrt{2}$ সে.মি.

৩৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে $(x - 1)$ সে.মি. ও x সে.মি. এবং একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির উচ্চতার সমান। আবার, একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $(x + 3)$ সে.মি. ও প্রস্থ x সে.মি.।

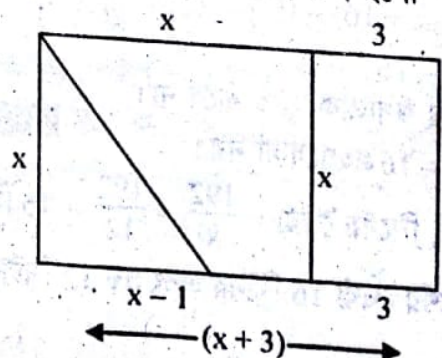
ক) একটি মাত্রাচিত্রের মাধ্যমে তথ্যগুলো দেখাও।

খ) ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 10 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?

গ) ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত বের কর।

সমাধান:

ক) চিত্রের তথ্যগুলোর মাধ্যমে চিত্র হলো—



□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা-

- সমতলীয় জ্যামিতির মৌলিক স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলো প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



ব্যাপ্তিগতভাবে 'জ্যামিতি' বা 'Geometry' শব্দের অর্থ "ভূমি পরিমাপ"। কৃষি ভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে ও ব্যাখ্যাদানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য।

জ্যামিতি গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রীক পণ্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতিমত বিকশিত সূত্রগুলোকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ "Elements" রচনা করেন। তেঁরো খণ্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই "Elements" গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ।

□ অনুশীলনী- ৬.১

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

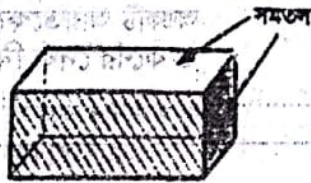
৬.১

১। স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা দাও।

সমাধান : স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়। এগুলো জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা মাত্র। যেমন :

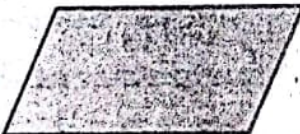
□ স্থান : আমাদের চারপাশে ছোট বড় বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান ধারণার উদ্ভব।

□ তল : ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাজের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের অংশ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাজের পৃষ্ঠতলকে সমতল ও গোলকের উপরিতলকে বক্রতল বলে।



চিত্র : ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণা

□ রেখা : দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি রেখা উৎপন্ন হয়। যেমন, বাজের দুইটি পৃষ্ঠ-তল বাজের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা উৎপন্ন হয়। রেখার শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নেই।



চিত্র : তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণা

□ বিন্দু : দুইটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়, অর্থাৎ দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাজের দুইটি ধার-রেখা বাজের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নেই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দু মাত্র অবশিষ্ট থাকে। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্তা বলে গণ্য করা হয়।

২। ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।

সমাধান : ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য হলো—

- স্বীকার্য ১। একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।
- স্বীকার্য ২। খন্ডিত রেখাকে যথেষ্টভাবে বাড়ানো যায়।
- স্বীকার্য ৩। যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।
- স্বীকার্য ৪। সকল সমকোণ পরস্পর সমান।
- স্বীকার্য ৫। একটি সরলরেখা দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেষ্টভাবে বর্ধিত করলে সেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

৩। পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

সমাধান : আপতন স্বীকার্য : বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। এ সংক্রান্ত ৫টি স্বীকার্যকে আপতন স্বীকার্য বলে।

- স্বীকার্য-১ : স্থান সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।
এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ্য করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন : কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে 'বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত' অথবা, 'সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়' অথবা অনুরূপ অর্থবহ বাক্য দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে 'সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত' অথবা 'সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায়' এরকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার্য করে নেওয়া হয় যে,

- স্বীকার্য-২। দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।
- স্বীকার্য-৩। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।
- স্বীকার্য-৪। কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।
- স্বীকার্য-৫। ক) স্থানে একাধিক সমতল বিদ্যমান।
খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।
গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

৪। দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : দূরত্ব স্বীকার্য : স্বীকার্য-৬ কে দূরত্ব স্বীকার্য বলা হয়। জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এজন্য স্বীকার্য করে নেওয়া হয় যে,

- ক) বিন্দুগুণ (P, Q) একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে যাকে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।
- খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায়, $PQ = 0$ ।
- গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $PQ = QP$ ।
 $PQ = QP$ হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P বিন্দু ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

৫। ঝুলায় স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান : ঝুলায় স্বীকার্য : স্বীকার্য-৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার্য করে নেওয়া হয় যে,

- স্বীকার্য : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এমনভাবে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। এই স্বীকার্যকে ঝুলায় স্বীকার্য বলা হয়।

৬। সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

সমাধান : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যাসেটের মধ্যে এমনভাবে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়, যেমন, রেখাটির মিলকরণের ফলে P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এভাবে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P ও a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়।

৭। বৃত্তের স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

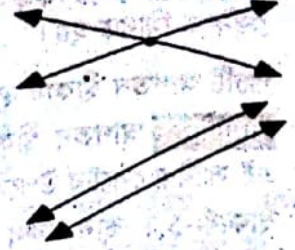
সমাধান : বৃত্তের স্থাপন স্বীকার্য : কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক O এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক I ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এ জন্য স্বীকার্য করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য : যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক O এবং B এর স্থানাঙ্ক I হয়। একে বৃত্তের স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়।

৮। পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

সমাধান : পরস্পরছেদী রেখা : দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে পরস্পরছেদী বলা হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে।

সমান্তরাল রেখা : একই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে সমান্তরাল বলা হয়, যদি তাদের কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে।



□ অনুশীলনী- ৬.২

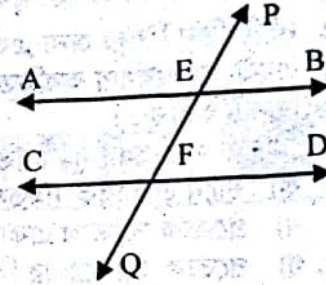
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১: সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞার সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ কর।

[পৃষ্ঠা- ১১২]

সমাধান : সমান্তরাল সরলরেখার বিকল্প সংজ্ঞা : দুইটি সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ জোড়া সমান হলে রেখা দুটি সমান্তরাল। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন প্রত্যেক একান্তর কোণ জোড়া সমান হবে।

মনে করি, $AB \parallel CD$ এবং PQ ছেদক তাদের যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEF =$ একান্তর $\angle EFD$



প্রমাণ :

ধাপসমূহ
 $\angle PEB =$ অনুরূপ $\angle EFD$

$\angle PEB =$ বিপ্রতীপ $\angle AEF$

$\angle AEF = \angle EFD$ (প্রমাণিত)

যথার্থতা

[সমান্তরাল রেখার সংজ্ঞানুসারে অনুরূপ কোণ সমান]

[বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান] [১নং ও ২নং থেকে]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

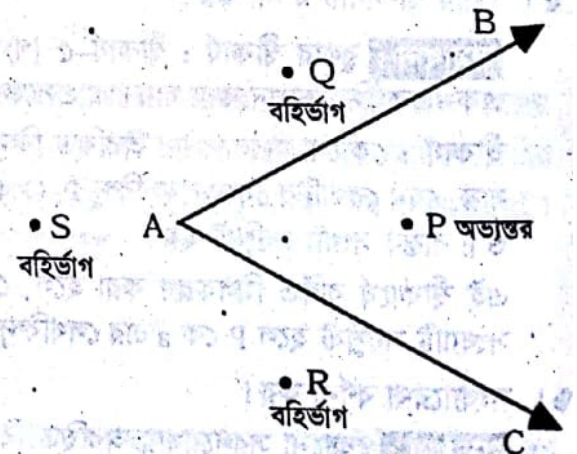
৬.২

১। কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

সমাধান : কোণের অভ্যন্তর : $\angle BAC$ এর অভ্যন্তর হলো $\overset{\times}{AB}$ এর C পার্শ্বে এবং $\overset{\times}{AC}$ এর B পার্শ্বে অবস্থিত সমতলের সকল বিন্দুর সেট।

কোণের বহির্ভাগ : কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় সমতলস্থ এমন সকল বিন্দুর সেটকে তার বহির্ভাগ বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

অর্থাৎ চিত্রে, P বিন্দু $\angle BAC$ এর অভ্যন্তরে এবং Q, S ও R বিন্দুগুলো তার বহির্ভাগে অবস্থিত।



২। যদি একই সরলরেখা দুইটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

সমাধান : চিত্রে উৎপন্ন কোণগুলোর নাম যথাক্রমে : $\angle DBE, \angle ABD, \angle DBC, \angle CBE, \angle EBC, \angle ABE$.

$\angle DBE$ = সরলকোণ

$\angle ABD$ = সমকোণ

$\angle DBC$ = সূক্ষ্মকোণ

$\angle CBE$ = মূলকোণ

$\angle EBC$ = প্রবৃত্ত কোণ

$\angle ABE$ = সমকোণ।

৩। সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

সমাধান : সন্নিহিত কোণ : সমতলস্থ দুইটি কোণের যদি

(১) একই শীর্ষবিন্দু থাকে, (২) একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং

(৩) তাদের অভ্যন্তরদ্বয়ের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে

কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণ বলা হয়।

চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ একে অপরের সন্নিহিত কোণ।

বহিঃস্থ বাহু : সাধারণ বাহু ব্যতীত সন্নিহিত কোণ দুটির অপর দুই বাহুকে তাদের বহিঃস্থ বাহু বলা হয়।

চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের একই শীর্ষবিন্দু O , একটি সাধারণ বাহু OB এবং কোণদ্বয়ের অভ্যন্তরদ্বয়ের কোনো

সাধারণ বিন্দু নাই। OA এবং OC কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু।

৪। চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও : বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং মূলকোণ।

সমাধান : বিপ্রতীপ কোণ : কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয়

যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।

চিত্রে $\angle 1$ এবং $\angle 3$ একযুগল বিপ্রতীপ কোণ যা AB এবং CD এর

ছেদের ফলে উৎপন্ন হয়েছে। একইভাবে চিত্রে $\angle 2$ এবং $\angle 4$ আরেক

যুগল বিপ্রতীপ কোণ একই সরলরেখাদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন।

পূরককোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি এক সমকোণ হলে কোণ

দুইটিকে পরস্পরের পূরককোণ বলা হয়।

চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle BCD$ পূরককোণ।

সম্পূরক কোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে,

কোণ দুইটিকে পরস্পরের সম্পূরক কোণ বলা হয়।

চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle BCD$ সম্পূরক কোণ।

সমকোণ : একটি সরল কোণের সমদ্বিখণ্ডককে লম্ব এবং সংশ্লিষ্ট সন্নিহিত

কোণের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে।

চিত্রে, $\angle AOB$ সমকোণ।

উল্লেখ যে, দুইটি কোণ সমান অর্থ তাদের ডিগ্রি পরিমাপ সমান। লক্ষণীয় যে, ওপরের চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ রৈখিক যুগল

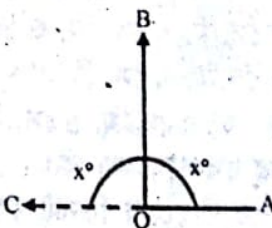
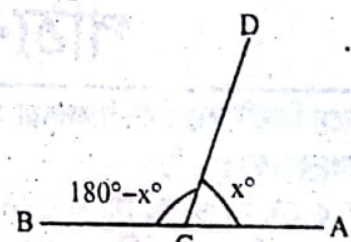
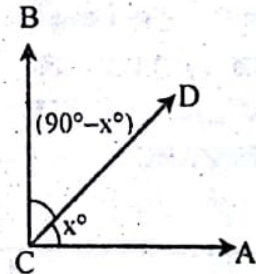
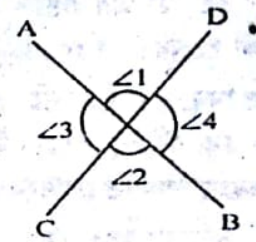
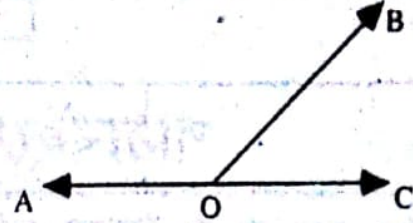
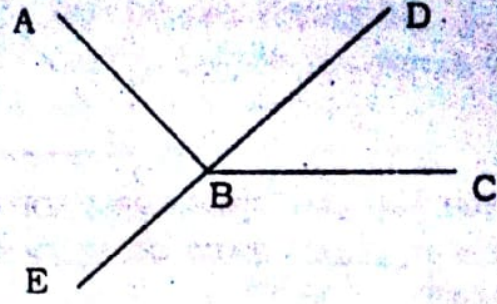
কোণ এবং কোণ যোজন স্বীকার্য অনুযায়ী $\angle AOB + \angle BOC =$ সরলকোণ AOC । সুতরাং $\angle AOB = x$ হলে সরলকোণ স্বীকার্য।

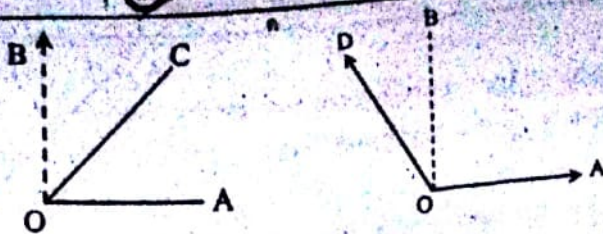
$x + x = 180^\circ$ বা, $x = 90^\circ$ । অতএব দেখা যাচ্ছে যে, সমকোণের ডিগ্রি পরিমাপ 90° । $\angle AOB$ যে সমকোণ তা পাশের চিত্রের

মতো চিহ্নিত করা হয়। এই চিত্রে, OA ও OB পরস্পর লম্ব। (প্রতীক : $OA \perp OB$)।

সূক্ষ্মকোণ ও মূলকোণ : এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট

কোণকে মূলকোণ বলা হয়।





ওপরের চিত্রে, $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AOD$ মূলকোণ।

উল্লেখ্য যে, $\angle AOC < \angle AOB$ এবং $\angle AOD > \angle AOB$ দ্বারা কোণগুলোর ডিগ্রি পরিমাপের তুলনাই বোঝায় এবং $\angle AOB =$ এক সমকোণ।

□ **অনুশীলনী- ৬.৩**

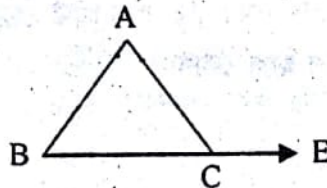
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১: প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা তার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। [পৃষ্ঠা- ১১৪]

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা বহিঃস্থ $\angle ACE$ উৎপন্ন হয়েছে। বহিঃস্থ $\angle ACE$ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয় হলো $\angle BAC$ এবং $\angle ABC$ ।

প্রমাণ করতে হবে যে,
বহিঃস্থ $\angle ACE >$ অন্তঃস্থ
বিপরীত $\angle BAC$ এবং
বহিঃস্থ $\angle ACE >$ অন্তঃস্থ
বিপরীত $\angle ABC$



પ્રમાણ :

$\triangle ABC$ -এর
 $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 2$
 সমকোণ (i)

আবার, AC রশ্মির প্রান্তবিন্দু C তে
অপর একটি সরলরেখা BE মিলিত
হয়েছে। ফলে $\angle ACB$ এবং $\angle ACE$
সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

$\therefore \angle ACB + \angle ACE = 2$ সমকোণ
..... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং তুলনা করে পাই,
 $\angle ACB + \angle ACE = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$

$\therefore \angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$
 $\therefore \angle ACE > \angle ABC$ এবং
 $\angle ACE > \angle BAC$ (প্রমাণিত)

यथार्थता

[∴ ত্রিভুজের
কোণের সমষ্টি দুই
সমকোণ]

[উভয় পক্ষ থেকে
 $\angle ACB$ বাদ দিয়ে]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

५.७

১। নিম্নে তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ
অঙ্কন সম্ভব?

ক) ৫ সে.মি. ৬ সে. মি. ও ৭ সে.মি

খ) ৩ সে.মি. ৪ সে. মি. ও ৭ সে.মি

গ) ৫ সে.মি. ৭ সে. মি. ও ১৪ সে.মি

ঘ) ২ সে.মি. ৪ সে. মি. ও ৮ সে.মি

উত্তর : ক) ৫ সে.মি. ৬ সে. মি. ৩ ৭ সে.মি।

২. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমকোণ তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে

ii. যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সূক্ষ্মকোণ তাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।

iii. যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii

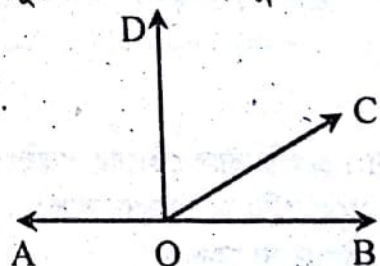
খ i ও iii

ଗ ii ଓ iii

ঘ i, ii ও iii

উত্তর : গ, ii ও iii .

৩। প্রদত্ত চিত্র অনুযায়ী ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



এক সমকোণের সমান কোণ কোণটি?

ক $\angle BOC$ খ $\angle BOD$

গ $\angle COD$ ঘ $\angle AOD$

বি. দ্র. : খ ও ঘ উভয়ই সঠিক কারণ চিত্রানুসারে $\angle A$
ও $\angle BOD$ উভয়ই এক সমকোণ

৪। $\angle BOC$ এর পূরক কোণ কোনটি?

ক $\angle AOC$ খ $\angle BOD$

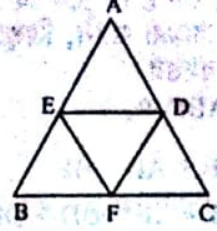
গ. $\angle COD$ ঘ. $\angle AOD$

উত্তর : গ. $\angle COD$

৫। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। অর্থাৎ, $AB = BC = AC$ । F, D ও E যথাক্রমে BC, AC এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু। মধ্যবিন্দু তিনটি যোগ করায় DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle DEF$ সমবাহু।



প্রমাণ : $\triangle BEF$ ও $\triangle CDF$ এর মধ্যে

$BE = CD$ [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]

$BF = CF$

[\because F, BC এর মধ্যবিন্দু]

[\because সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle C$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CDF$

অতএব, $EF = FD$

আবার, $\triangle CDF$ ও $\triangle AED$ এর মধ্যে $CD = AD$, [\because D, AC- এর মধ্যবিন্দু]

$AE = CF$ [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle C =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle A$

$\therefore \triangle CDF \cong \triangle AED$

$\therefore FD = ED$

সুতরাং, $EF = FD = ED$

$\therefore \triangle DEF$ সমবাহু (প্রমাণিত)

৬। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BE ও CF যথাক্রমে $\triangle ABC$ এর BC, CA এবং AB এর তিনটি মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = BE = CF$.

প্রমাণ : $\triangle BCE$ ও $\triangle CBF$ দ্বয়ের মধ্যে, $CE = BF$

[E এবং F সমান বাহুর মধ্যবিন্দু বলে]

BC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BCE =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CBF$ [$\because AB = AC$]

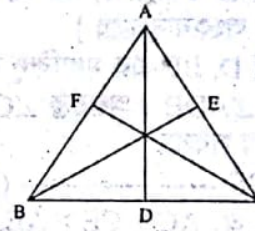
$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CBF$

$\therefore BE = CF$

অনুরূপভাবে, ABD ও ABE ত্রিভুজ নিয়ে দেখানো যায় যে, $AD = BE$

$\therefore AD = BE = CF$.

অর্থাৎ, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান। (প্রমাণিত)



৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এর BC বাহুকে D এবং E পর্যন্ত উভয় দিকে বর্ধিত করা হলো। এর ফলে $\angle ABD$ ও $\angle ACE$ বহিঃস্থ কোণ দুটি উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABD + \angle ACE > 2$ সমকোণ।

প্রমাণ : বহিঃস্থ $\angle ABD =$ অন্তঃস্থ $(\angle BAC + \angle ACB)$

এবং বহিঃস্থ $\angle ACE =$ অন্তঃস্থ $(\angle BAC + \angle ABC)$

$\therefore \angle ABD + \angle ACE = \angle BAC + \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC$

$= \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$

$=$ দুই সমকোণ $+ \angle BAC$

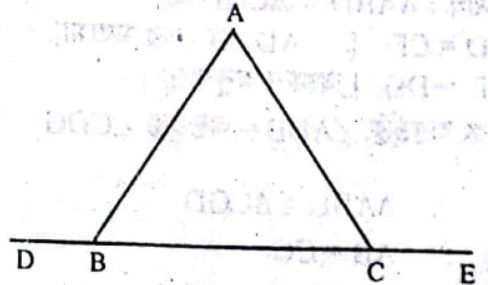
[\because ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 2$ সমকোণ]

অর্থাৎ, বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর

$\therefore (\angle ABD + \angle ACE) > 2$ সমকোণ। (প্রমাণিত)

$\triangle ABC$ এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB + AC > BD + DC$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > BD + DC$.



বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে D যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > BD + DC$ ।

অঙ্কন : B, D এবং C, D যোগ করি। BD কে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, এটি AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore \triangle ABE$ এ,

$$AB + AE > BE$$

বা, $AB + AE > BD + DE$ ----- (i)

অনুরূপভাবে, $\triangle CDE$ -এ,

$$DE + EC > CD$$
 ----- (ii)

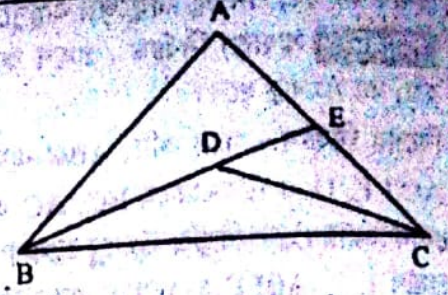
সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$AB + AE + DE + EC > BD + DE + CD$$

বা, $AB + AE + EC > BD + CD$ [উভয় পক্ষ থেকে DE বাদ দিয়ে]

বা, $AB + AC > BD + CD$ [$\because AE + EC = AC$]

$\therefore AB + AC > BD + DC$. (প্রমাণিত)



৯। $\triangle ABC$ এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$ ।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর BC বাহুর মধ্য বিন্দু D হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$ ।

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$ ।

অঙ্কন : A, D যোগ করি এবং AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $AD = DE$ হয়। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle CDE$ এর মধ্যে,

$$AD = DE \text{ [অংকনানুসারে]}$$

$$BD = CD \text{ [D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে]}$$

$$\text{এবং অন্তর্ভুক্ত } \angle ADB = \text{অন্তর্ভুক্ত } \angle CDE \text{ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]}$$

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$$\therefore AB = CE$$
 ----- (i)

এখন $\triangle ACE$ এ, $AC + CE > AE$,

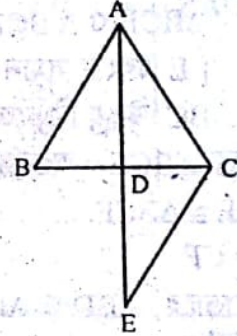
[\because ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

$$\text{বা, } AC + CE > AD + DE \text{ [অংকনানুসারে]}$$

$$\text{বা, } AC + AB > AD + DE \text{ [(i) নং এর সাহায্যে]}$$

$$\text{বা, } AC + AB > AD + AD \text{ [}\because DE = AD\text{]}$$

$$\therefore AB + AC > 2AD. \text{ (প্রমাণিত)}$$



১০। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ এবং এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$ ।

অঙ্কন : A ও D যোগ করি। AD কে G পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, $DG = AD$ হয়। C, G যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle CGD$ -এ,

$$BD = CD \text{ [}\because AD, BC\text{-এর মধ্যমা]}$$

$$AD = DG \text{ [অঙ্কন অনুসারে]}$$

$$\text{এবং অন্তর্ভুক্ত } \angle ADB = \text{অন্তর্ভুক্ত } \angle CDG \text{ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CGD$$

$$\therefore AB = CG$$

এখন, $\triangle ACG$ -এ,

$$AC + CG > AG$$

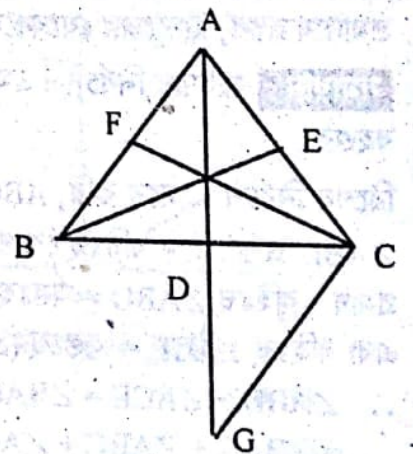
[\because ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$$\text{বা, } AC + AB > AD + DG \text{ [}\because AB = CG\text{]}$$

$$\text{বা, } AB + AC > AD + AD$$

$$\therefore AB + AC > 2AD$$
 ----- (i)

$$\text{অনুরূপভাবে, } AC + BC > 2CF$$
 ----- (ii)



এবং $BC + AB > 2BE$ ----- (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$AB + AC + AC + BC + BC + AB > 2AD + 2CF + 2BE$$

$$\text{বা, } 2AB + 2BC + 2AC > 2AD + 2CF + 2BE$$

$$2(AB + BC + AC) > 2(AD + CF + BE)$$

$$\text{বা, } AB + BC + AC > AD + CF + BE$$

$$\therefore AD + CF + BE < AB + BC + AC$$

অর্থাৎ, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$. (প্রমাণিত)

১১। $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হলো, যেন $BA = AD$; প্রমাণ কর যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হলো, যেন $BA = AD$; প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল, যেন $BA = AD$;

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

প্রমাণ : $AB = AC$ [কল্পনানুসারে]

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \text{ ----- (i)}$$

[\because সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]

আবার, $\triangle ACD$ এ, $AC = AD$

$$[\because BA = AC = AD]$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ADC \text{ ----- (ii)}$$

এখন $\triangle BCD$ এ, $\angle BCD + \angle DBC + \angle BDC = 2$ সমকোণ

$$\text{বা, } \angle BCD + \angle ABC + \angle ADC = 2 \text{ সমকোণ}$$

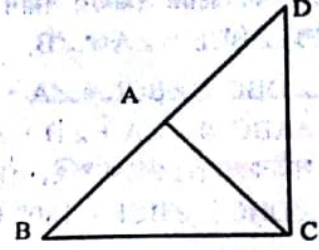
$$\text{বা, } \angle BCD + \angle ACB + \angle ACD = 2 \text{ সমকোণ} \quad [(i) \text{ ও } (ii) \text{ নং এর সাহায্যে }]$$

$$\text{বা, } \angle BCD + \angle BCD = 2 \text{ সমকোণ}$$

$$\text{বা, } 2\angle BCD = 2 \text{ সমকোণ}$$

$$\text{বা, } \angle BCD = \text{এক সমকোণ}$$

অতএব, $\angle BCD$ একটি সমকোণ। (প্রমাণিত)



১২। $\triangle ABC$ এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$.

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, $\triangle ABC$ -এর $\angle B$ ও $\angle C$ -এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর O

বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$.

প্রমাণ : $\triangle ABC$ এ, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$\text{বা, } \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \text{ ----- (i)}$$

আবার, $\triangle BOC$ এ, $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$

$$\text{কিন্তু } \angle OBC = \frac{1}{2} \angle B$$

$$\text{এবং } \angle OCB = \frac{1}{2} \angle C$$

$$\therefore \angle BOC + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C = 180^\circ$$

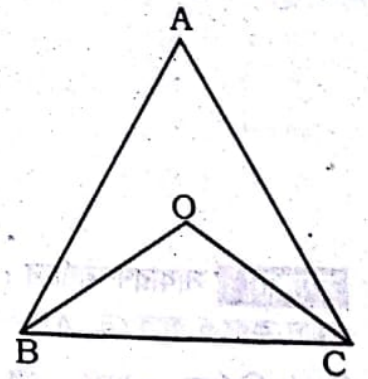
$$\text{বা, } \angle BOC + \frac{1}{2} (\angle B + \angle C) = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC + \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 180^\circ \quad [(i) \text{ এর সাহায্যে }]$$

$$\text{বা, } \angle BOC + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A. \text{ (প্রমাণিত)}$$



১৩। $\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখলক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখলক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

বিশেষ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর AB এবং AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করায় B ও C বিন্দুতে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle DBC$ ও $\angle BCE$ । উক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখলকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

প্রমাণ : $\triangle ABC$ এ, $\angle DBC = \angle A + \angle C$ [ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান বলে]

অনুরূপে, $\angle BCE = \angle A + \angle B$

$$\therefore \angle DBC + \angle BCE = \angle A + \angle C + \angle A + \angle B \text{ ---- (i)}$$

$$\text{কিন্তু } \triangle ABC \text{ এ, } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ ---- (ii)}$$

$$\therefore \text{সমীকরণ (i) থেকে পাই, } \angle DBC + \angle BCE = \angle A + \angle B + \angle C + \angle A$$

$$\text{বা, } \angle DBC + \angle BCE = 180^\circ + \angle A \text{ ---- (iii)}$$

$$\text{এখন, } \triangle BOC \text{ এ, } \angle BOC + \angle CBO + \angle BCO = 180^\circ \text{ [(ii)-এর সাহায্যে]}$$

$$\text{কিন্তু } \angle CBO = \frac{1}{2} \angle DBC$$

$$\text{এবং } \angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCE$$

$$\therefore \angle BOC + \frac{1}{2} \angle DBC + \frac{1}{2} \angle BCE = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC + \frac{1}{2} (\angle DBC + \angle BCE) = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC + \frac{1}{2} (180^\circ + \angle A) = 180^\circ \text{ [(iii)-এর সাহায্যে]}$$

$$\text{বা, } \angle BOC + 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC = 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A. \text{ (প্রমাণিত)}$$

১৪। চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C =$ এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$. প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$ ।



সমাধান : সাধারণ নির্বচন : দেয়া আছে $\angle C =$ এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = 2BC$ ।

বিশেষ নির্বচন, $\triangle ABC$ -এর $\angle C =$ এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = 2BC$

প্রমাণ : $\triangle ABC$ এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বলে।]

$$\text{বা, } \angle A + 2\angle A + 90^\circ = 180^\circ \text{ [}\because \angle B = 2\angle A\text{]}$$

$$\text{বা, } 3\angle A = 180^\circ - 90^\circ \text{ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]}$$

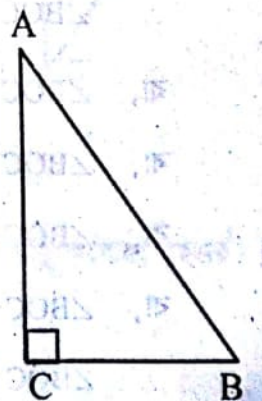
$$\text{বা, } 3\angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$$

$$\text{বা, } \angle ABC = 60^\circ$$

$$\text{ABC সমকোণী ত্রিভুজে, } \cos \angle ABC = \left[\frac{\text{ভূমি BC}}{\text{অতিভুজ AB}} = \cos \angle ABC \right]$$



$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{বা, } AB = 2BC \text{ [প্রমাণিত]}$$

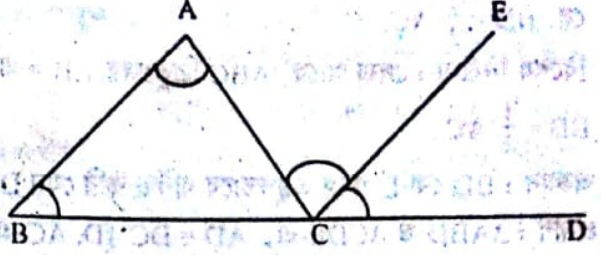
রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ

১১৭

১৫। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, বহিঃস্থ $\angle ACD =$ অন্তঃস্থ $\angle ABC +$ অন্তঃস্থ $\angle BAC$.

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে BA এর সমান্তরাল CE অঙ্কন করি।



প্রমাণ : BA এবং CE সমান্তরাল, AC তাদের ছেদক,

$\therefore \angle BAC = \angle ACE$ (একান্তর কোণ) (i)

আবার, BA ও CE সমান্তরাল এবং BCD তাদের ছেদক,

$\therefore \angle ABC = \angle ECD$ (অনুরূপ কোণ) (ii)

(i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

\therefore বহিঃস্থ $\angle ACD =$ অন্তঃস্থ $\angle ABC +$ অন্তঃস্থ $\angle BAC$. (প্রমাণিত)

১৬। $\triangle ABC$ এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও CF । যদি $BE = CF$ হয়, তবে দেখাও যে, $AB = AC$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও CF । যদি $BE = CF$ হয়, তবে দেখাতে হবে যে, $AB = AC$.

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC একটি ত্রিভুজ। এর B ও C শীর্ষ থেকে AC ও AB এর উপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব এবং $BE = CF$. দেখাতে হবে যে, $AB = AC$.

প্রমাণ : $BE \perp AC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle BEC = 90^\circ$ এবং $\triangle BCE$ সমকোণী।

আবার, $CF \perp AB$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle CFB = 90^\circ$ এবং $\triangle BCF$ সমকোণী।

এখন, সমকোণী $\triangle BCF$ ও $\triangle BCE$ -এ

$BE = CF$ [দেওয়া আছে]

এবং BC উভয় ত্রিভুজের অতিভুজ।

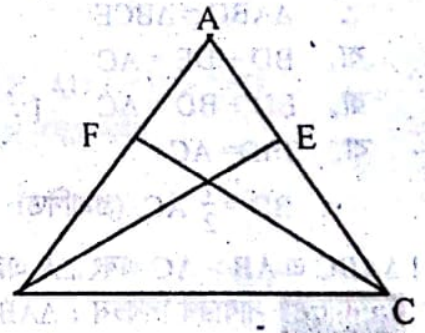
$\therefore \triangle BCF \cong \triangle BCE$

$\therefore \angle BCE = \angle CBF$

অর্থাৎ $\triangle ABC$ -এর

$\angle BCA = \angle CBA$

$\therefore AB = AC$. [সমান সমান কোণের বিপরীত বাহু সমান বলে] (দেখানো হলো)



১৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

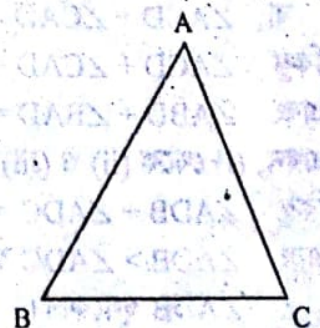
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বৃহত্তম বাহু এবং তৃতীয় বাহু BC ক্ষুদ্রতম। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB - AC < BC$.

অর্থাৎ, প্রমাণ করতে হবে যে ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে, $AC + BC > AB$

[\therefore ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $AC + BC - AC > AB - AC$ [অসমতার উভয় দিক থেকে AC বিয়োগ করে]



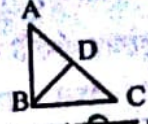
বা, $BC > AB - AC$

বা, $AB - AC < BC$

অতএব, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (প্রমাণিত)

১৮। চিত্রে, $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং D , অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ

কর যে, $BD = \frac{1}{2} AC$ ।



সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং D , অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে

যে, $BD = \frac{1}{2} AC$ ।

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং D , অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2} AC$ ।

অঙ্কন : BD কে E পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করি যেন $DE = BD$ হয়। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle CDE$ -এ, $AD = DC$ [D , AC -এর মধ্যবিন্দু]

$BD = DE$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDE$

$\therefore AB = CE$ এবং $\angle DAB = \angle DCE$

কিন্তু $\angle DAB$ এবং $\angle DCE$ একান্তর কোণ।

সুতরাং CE এবং BA সমান্তরাল এবং BC এদের ছেদক।

যেহেতু $\angle ABC =$ এক সমকোণ

$\therefore \angle BCE =$ এক সমকোণ।

এখন, $\triangle ABC$ ও $\triangle BCE$ -এ, $AB = CE$, BC সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BCE =$ এক সমকোণ।

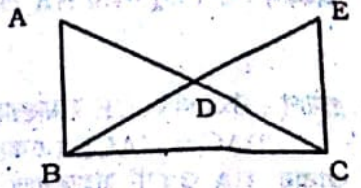
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BCE$

বা, $BD + DE = AC$

বা, $BD + BD = AC$ [$\because BE = AC$]

বা, $2BD = AC$

$\therefore BD = \frac{1}{2} AC$. (প্রমাণিত)



১৯। $\triangle ABC$ এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD , BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্ক্রলকোণ।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ -এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD , BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্ক্রলকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ একটি ত্রিভুজ, এর $AB > AC$ । $\angle A$ এর

সমদ্বিখন্ডক AD , BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্ক্রলকোণ।

প্রমাণ : $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক রেখা AD

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

আবার, $\triangle ABC$ এ $AB > AC$

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$

বা, $\angle ACD > \angle ABD$

বা, $\angle ACD + \angle CAD > \angle ABD + \angle CAD$

বা, $\angle ACD + \angle CAD > \angle ABD + \angle BAD$ ----- (i) [$\because \angle CAD = \angle BAD$]

কিন্তু $\angle ACD + \angle CAD =$ বহিঃস্থ $\angle ADB$ ----- (ii)

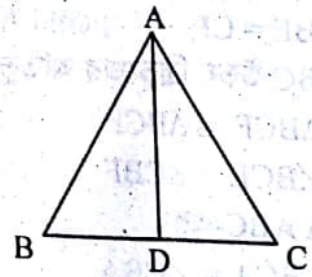
এবং $\angle ABD + \angle BAD =$ বহিঃস্থ $\angle ADC$ ----- (iii)

এখন, (i) থেকে (ii) ও (iii) এর সাহায্যে লিখতে পারি, $\angle ADB > \angle ADC$

কিন্তু $\angle ADB + \angle ADC =$ এক সরলকোণ

এবং $\angle ADB > \angle ADC$ হওয়ায়, $\angle ADB > 90^\circ$

$\therefore \angle ADB$ স্ক্রলকোণ। (প্রমাণিত)



[বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর বলে]

[উভয় পাশে $\angle CAD$ যোগ করে]

২৭। প্রমাণ কর যে, কোন সরলরেখার লম্ববিন্দকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যেকোনো সরলরেখার লম্ববিন্দকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, AB একটি সরলরেখা এবং CD এর সমবিন্দক।

অঙ্কন : P ও A এবং P ও B যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু CD রেখা AB রেখার লম্ববিন্দক সেহেতু CD রেখা AB রেখার

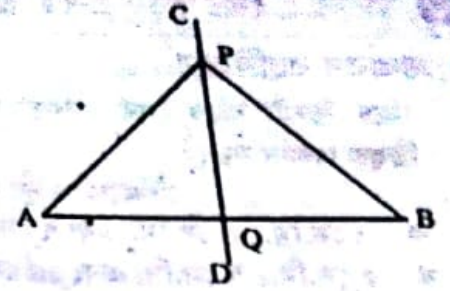
মধ্যবিন্দু Q দিয়ে যায়।

∴ $\triangle PAQ$ এবং $\triangle PBQ$ -এর মধ্যে, $AQ = BQ$, PQ সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AQP =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BQP$ [∵ CD রেখা AB রেখার লম্ববিন্দক]

∴ $\triangle PAQ$ ও $\triangle PBQ$ সর্বসম।

∴ $PA = PB$ অর্থাৎ P বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। (প্রমাণিত)

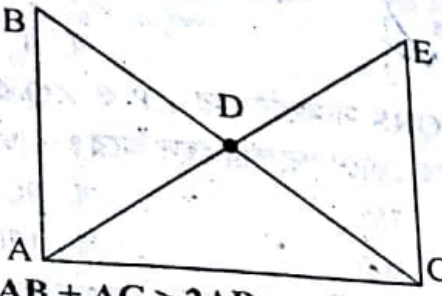


২৮। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A =$ এক সমকোণ। BC বাহুর মধ্যবিন্দু D

ক) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) দেখাও যে, $AB + AC > 2AD$

গ) প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2} BC$



খ) দেখাও হবে $AB + AC > 2AD$.

বিশেষ নির্বাচন : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC বাহু মধ্যবিন্দু D। দেখাতে হবে যে, $AD + AC > 2AD$.

অঙ্কন : A, D যোগ করি এবং AD কে E পক্ষান্ত বর্ধিত করি, যেন $AD = DE$ হয়। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle CDE$ এর মধ্যে

$AD = DE$ [অংকনানুসারে]

$BD = CD$ [D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে]

এবং বিপ্রতীপ $\angle ADB = \angle CDE$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle CDE$

∴ $AB = CE$ (i)

এখন, $\triangle ACE$ এ $AC + CE > AE$.

বা, $AC + CE > AD + DE$

বা, $AC + AB > AD + DE$ [(i) নং হতে]

বা, $AC + AB > AD + AD$

বা, $AC + AB > 2AD$ [দেখানো হলো]

গ) খ, হতে দেখা যায়, $\triangle ABD \cong \triangle CDE$.

∴ $AB = CE$ এবং $\angle ABD = \angle DCE$ [একান্তর কোণ]

সুতরাং CE এবং AB সমান্তরাল এবং C এদের ছেদক।

যেহেতু $\angle BAC =$ এক সমকোণ

∴ $\angle ACE =$ এক সমকোণে

এখন, $\triangle BAC$ ও $\triangle ACE$ এ $AB = CE$ AC.

সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ACE$

∴ $\triangle BAC \cong \triangle ACE$.

বা, $AD + DE = BC$

বা, $AD + AD = BC$ [∵ $AE = BC$]

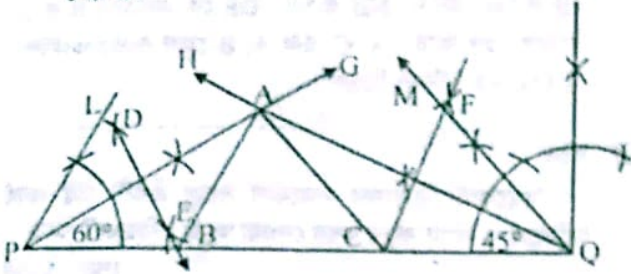
বা, $2AD = BC$

∴ $AD = \frac{1}{2} BC$ (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১। একটি ত্রিভুজ ABC আঁক, যার $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ এবং পরিমীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।

সমাধান: একটি ত্রিভুজ ABC আঁকতে হবে, যার $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ এবং পরিমীমা $AB + BC + CA = 11$ সে.মি.।



অঙ্কনের ধাপ :

- ১। রেখাংশ PQ = 11 সে.মি. আঁকি।
- ২। PQ রেখাংশের একই পাশে P এবং Q কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle QPL = 60^\circ$ ও $\angle PQM = 45^\circ$ কোণ আঁকি।
- ৩। কোণ দুটির বিখণ্ডক PG ও QH আঁকি। মনে করি, PG ও QH রশ্মিগুণ পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
- ৪। PA, QA রেখাংশের লম্ব বিখণ্ডক আঁকি যা PQ রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।
- ৫। A, B এবং A, C যোগ করি।
তাহলে, ΔABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৭.১

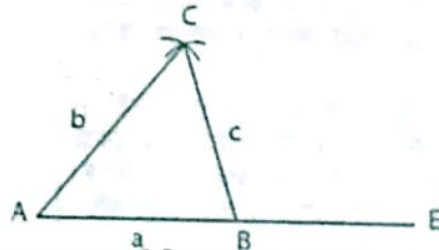
১। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর :

ক) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. 3.5 সে.মি. 2.8 সে.মি.।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 3$ সে.মি. $b = 3.5$ সে.মি. ও $c = 2.8$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

a 3 cm
b 3.5 cm
c 2.8 cm

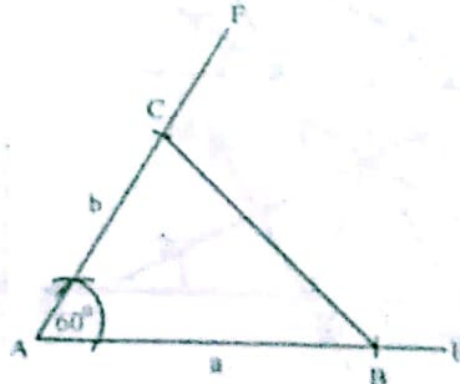
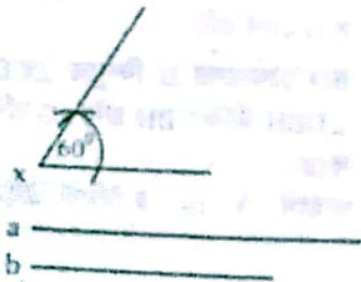


বেকোনো রেখা AE নেই। AE থেকে $a = 3$ cm এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB অংশ কাটি। A ও B কে কেন্দ্র করে $b = 3.5$ cm ও $c = 2.8$ cm এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুটি C বিন্দু ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° ।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4$ cm ও $b = 3$ cm এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = 60^\circ$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

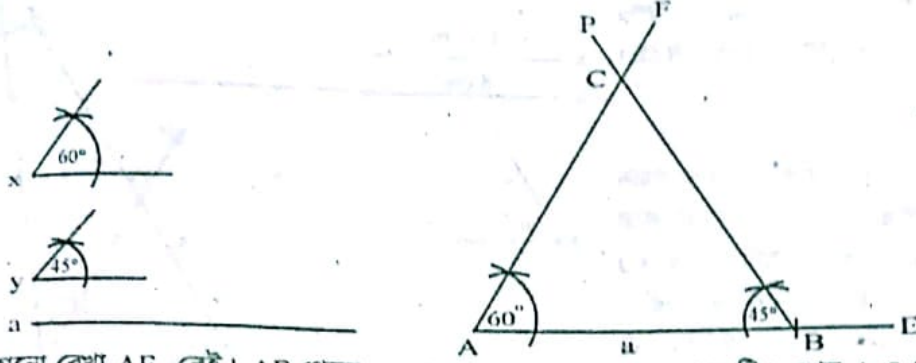


বেকোনো রেখা AE নেই। AE থেকে $a = 4$ cm সমান AB অংশ কাটি। A বিন্দুতে $\angle x = 60^\circ$ সমান করে AF অংশ আঁকি। AF থেকে $b = 3$ cm সমান করে AC অংশ কাটি। C, B যোগ করি, তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৬. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি.।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ ও $\angle y = 40^\circ$ এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 5$ cm দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

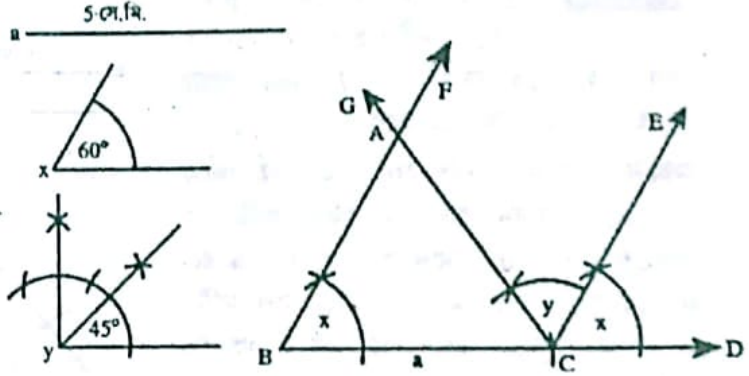


যেকোনো রেখা AE নেই। AE থেকে $a = 5$ cm সমান করে AB অংশ কাটি। এখন A ও B কে কেন্দ্র করে $\angle x = 60^\circ$ ও $\angle y = 45^\circ$ সমান করে দুইটি কোণ আঁকি। কোণ দুইটি F ও P পর্যন্ত বর্ধিত করলে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৭. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ৫ সে. মি.।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ ও $\angle y = 45^\circ$ কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য ৫ cm দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

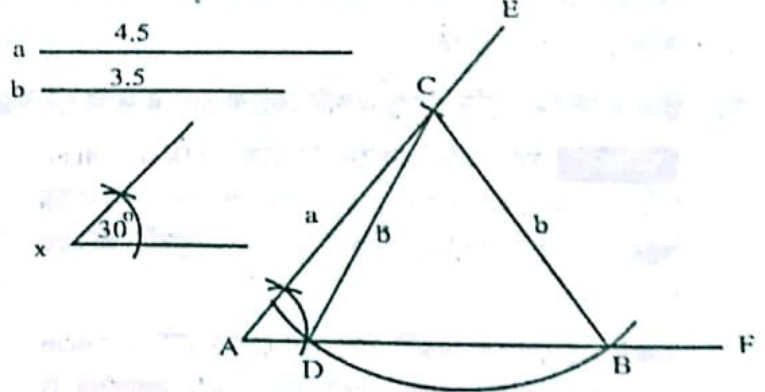
অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BD হতে a এর সমান BC রেখাংশ নিই। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle DCE$ আঁকি। CE রশ্মির C বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান করে $\angle ECG$ আঁকি। CG রশ্মি BF রশ্মির সাথে A বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



৮. দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৪.৫ সে.মি. ও ৩.৫ সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30° ।

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4.5$ cm ও $b = 3.5$ cm এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রেখা AF নেই। A কে কেন্দ্র করে $\angle x = 30^\circ$ সমান $\angle FAE$ আঁকি। AE থেকে $a = 4.5$ cm সমান করে AC অংশ কাটি। C কে কেন্দ্র করে $b = 3.5$ সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AF রেখার উপর একটি বৃত্তাংশ আঁকি যা AF কে D ও B বিন্দুতে ছেদ করে। C, D ও C, B যোগ করি। তাহলে ADC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

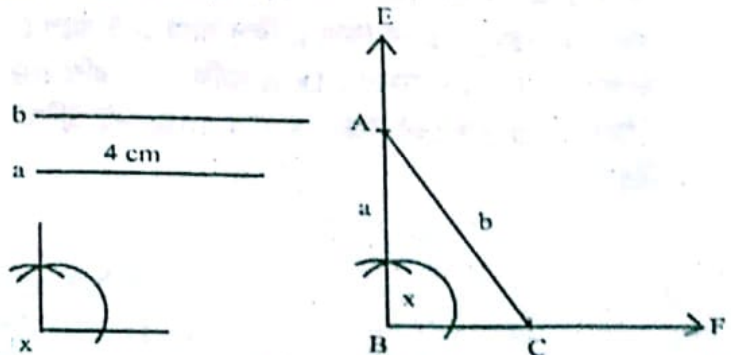


৯. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৬ সে.মি. ও ৪ সে.মি.

সমাধান: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $b = 6$ সে.মি. এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4$ সে. মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BF নিই। BF এর B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle FBE$ আঁকি। $\angle FBE$ এর BE হতে $a = 4$ cm সমান করে BA অংশ কাটি। এবার A বিন্দু অতিভুজ b এর সমান করে BF এর উপর C বিন্দু আঁকি।

তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



২. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

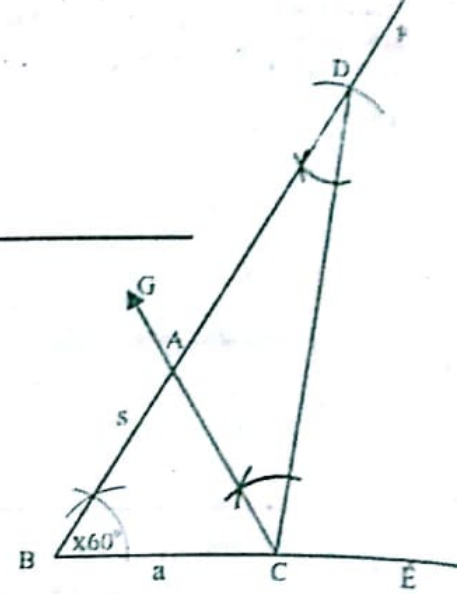
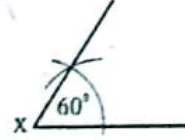
ক) ভূমি 3.5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60° ও
অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি।

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি $a = 3.5$
সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ ও অপর
দুই বাহুর সমষ্টি $s = 8$ সে.মি. দেওয়া আছে।
ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি BE নেই। BE থেকে $a = 3.5$ সমান
BC অংশ কাটি। B বিন্দুতে $\angle x = 60^\circ$ সমান করে
 $\angle CBF$ আঁকি। BF থেকে $s = 8$ cm সমান করে BD
অংশ কাটি এবং C, D যোগ করি। তখন DC এর C
বিন্দুতে $\angle BDC$ এর সমান করে $\angle DCG$ আঁকি। CG
রেখা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ই
উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

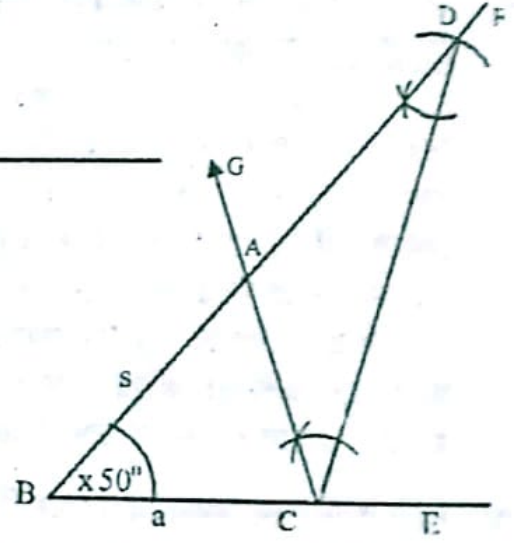
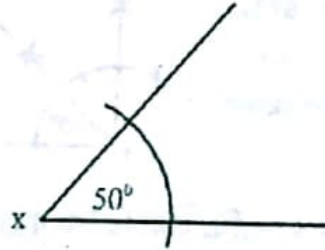
$a = 3.5$ cm
 $s = 8$ cm



খ) ভূমি 4 সে.মি. ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 50° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 7.5 সে.মি।

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a
 $= 4$ cm ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 50^\circ$ ও
অপর দুই বাহুর সমষ্টি $s = 7.5$ cm দেওয়া
আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

$a = 4$ cm
 $s = 7.5$ cm

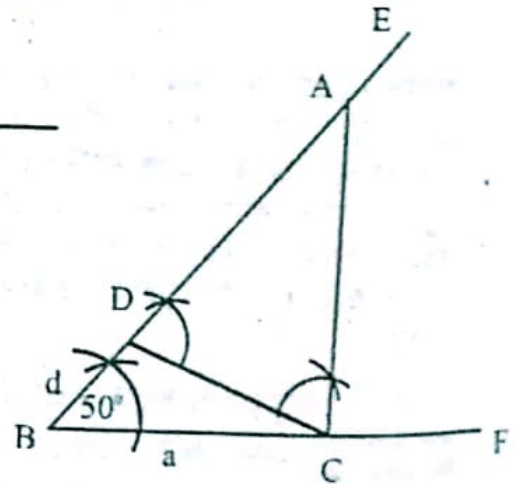
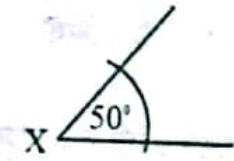


অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE নেই। BE থেকে
 $a = 4$ cm সমান করে BC অংশ কাটি। B
বিন্দুতে $\angle x = 50^\circ$ সমান করে $\angle CBF$ আঁকি।
BF থেকে $s = 7.5$ সমান করে BD অংশ কাটি।
D, C যোগ করি। এখন DC এর C বিন্দুতে
 $\angle BDC$ এর সমান করে $\angle DCG$ আঁকি। CG
রেখা DB কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে,
ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ. ভূমি 4 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 50° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1.5 সে.মি।

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি $a = 4$ cm,
ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 50^\circ$ ও অপর দুই বাহুর
অন্তর $d = 1.5$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে
হবে।

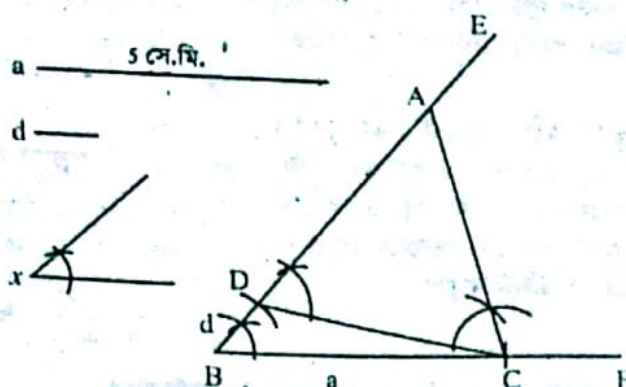
$a = 4$ cm
 $d = 1.5$ cm



অঙ্কন : যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি $a = 4$ cm
সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B
বিন্দুতে $\angle x = 50^\circ$ এর সমান $\angle CBE$ আঁকি। BE রশ্মি
থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই। C, D যোগ
করি। DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C
বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BE
রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট
ত্রিভুজ।

দুই ৫ সে.ম., ছাদ সলো একটি কোণ 45° ও অপর দুই বাহুর অন্তর ১ সে. মি।

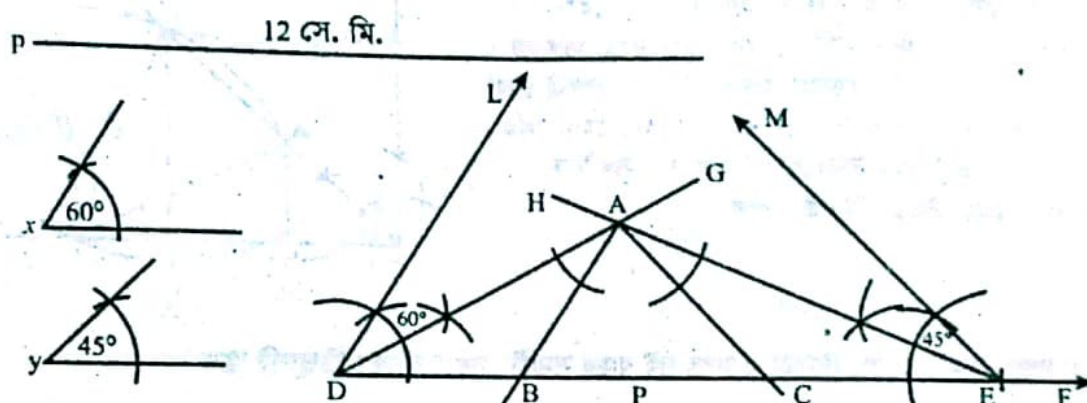
সমাধান : গ এর মত বর্ণনা : শুধু $\angle x = 45^\circ$ ও $d = 1$ সে. মি.



ভূমি সলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রম 60° ও 45° ও পরিসীমা 12 সে. মি.

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ ও $\angle y = 45^\circ$ এবং পরিসীমা $p = 12$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

ଉତ୍ତର :

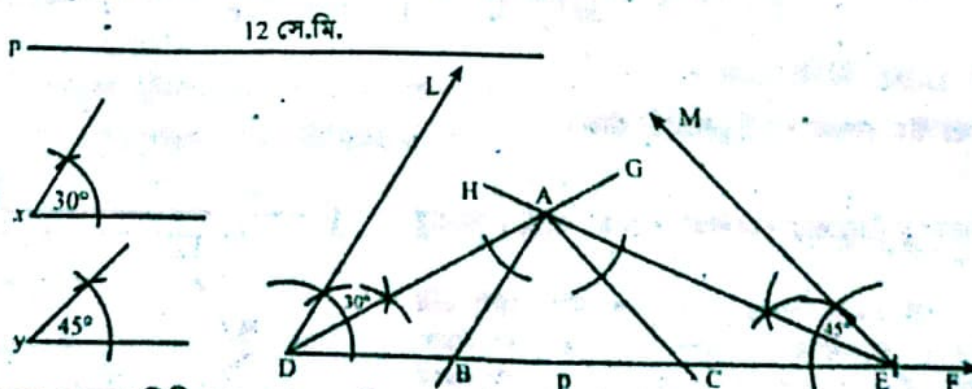


যেকোনো রশ্মি DF থেকে পরিসীমা $P = 12$ সে.মি. সমান করে DE অংশ কাটি। D ও E বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে $\angle EDL$ ও $\angle DEM$ আঁকি। কোণ দুইটির দ্বিখন্ডক DG ও EH আঁকি। যারা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৮. ভূমি সংলগ্ন কোন দুইটি যথাক্রমে 30° ও 45° ও পরিসীমা 10 সে.মি।

সমাধান : মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 30^\circ$ ও $\angle y = 45^\circ$ এবং পরিসীমা $p = 10$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

ଅଭିନବ :



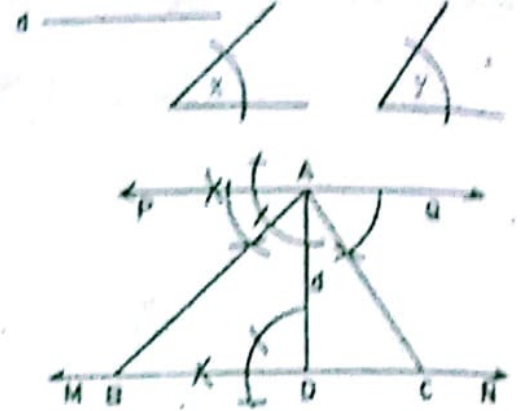
যেকোনো রশ্মি DF থেকে পরিসীমা $P = 10$ সে.মি. সমান করে DE অংশ কাটি। D ও E বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে $\angle EDL$ ও $\angle DEM$ আঁকি। কোণ দুইটির বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি। যারা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিখণ্ড DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\triangle ACB$ -ই উদ্ভিক্ত ত্রিভুজ।

৩। একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :

মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ এবং শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো একটি রেখা হতে $\overline{AD} = d$ নিই। AD রেখার উপর A ও D বিন্দুতে যথাক্রমে PAQ ও MDN লম্বরেখা অঙ্কন করি। PQ রেখার A বিন্দুতে $\angle PAB = \angle x$ এবং $\angle QAC = \angle y$ আঁকি। AB ও AC রেখা দুটি MN রেখাকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

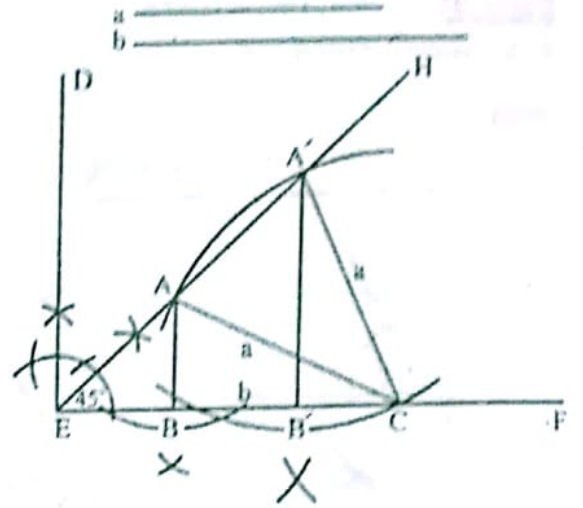


৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :

মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : \overline{EF} একটি রেখাংশ নিই এবং তা হতে $EC = b$ কেটে নিই। E বিন্দুতে $\angle HEC = 45^\circ$ অঙ্কন করি। C কে কেন্দ্র করে অতিভুজ a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। বৃত্তচাপটি EH -কে A এবং A' বিন্দুতে ছেদ করে। $A'C$ এবং AC যোগ করি। এখন A এবং A' হতে EC -এর উপর $A'B'$ এবং AB লম্ব টানি। তাহলে ABC বা $A'B'C$ উভয়ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



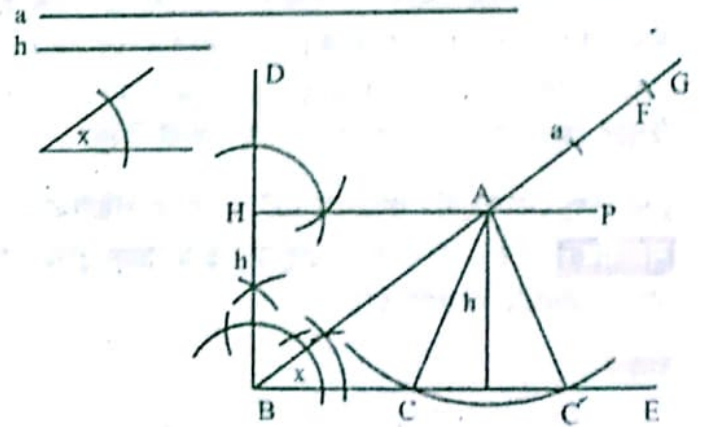
৫। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :

মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ x , উচ্চতা h এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : BE একটি রশ্মি নেই। B বিন্দুতে $\angle EBG = x$ কোণ এবং BD লম্ব আঁকি। BD হতে $BH = h$ কেটে নেই। H বিন্দু নিয়ে $HP \parallel BE$ টানি। HP রেখা BG -কে A বিন্দুতে ছেদ করে। এখন BG হতে $BF = a$ কেটে নেই। A -কে কেন্দ্র করে AF -এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle x$ -এর মধ্যবর্তী অংশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি BE -কে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে। A ও C এবং A ও C' যোগ করি।

তাহলে $\triangle ABC$ বা $\triangle ABC'$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



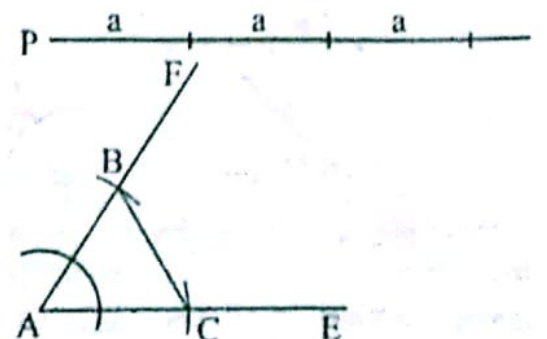
৬। সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :

মনে করি, একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা P দেওয়া আছে। সমবাহু ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : পরিসীমা P কে সমান তিনটি ভাগে ভাগ করি। মনে করি প্রত্যেক ভাগের দৈর্ঘ্য a । যেকোনো সরলরেখা AE হতে a এর সমান করে AC অংশ কেটে নেই। AC এর A বিন্দুতে 60° কোণের সমান করে $\angle CAF$ অঙ্কন করি। এখন AF রেখা হতে a এর সমান করে AB অংশ কেটে লই। B ও C যোগ করি।

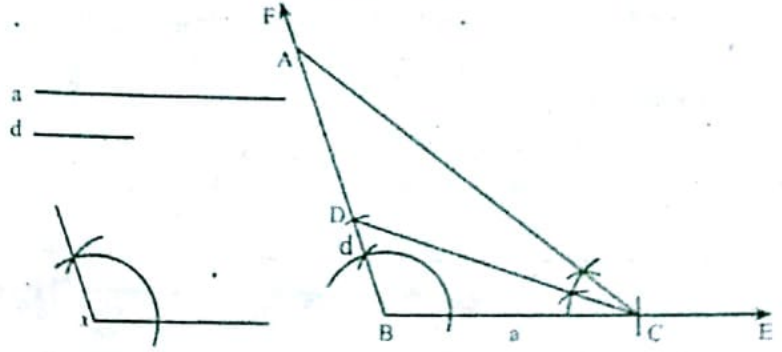
তাহলে $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ।



৭। ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি মূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি a , ভূমি সংলগ্ন একটি মূলকোণ $\angle x$ ও অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কাটি। BC এর B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBF$ আঁকি। BF থেকে অন্তর d এর সমান করে BD অংশ কাটি। D, C যোগ করি। C বিন্দুতে $\angle DCB$ এর সমান করে $\angle DCA$ আঁকি যা BE কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



□ অনুশীলনী- ৭.২

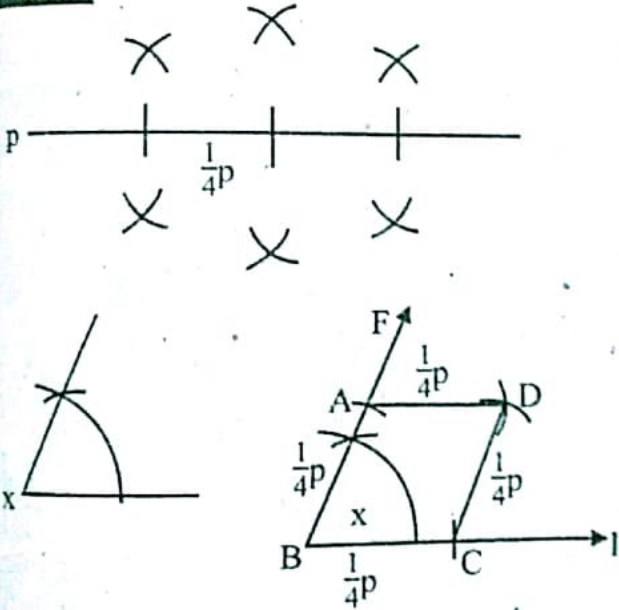
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

১। রহস্যের পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রহস্যটি আঁক।

[পৃষ্ঠা-১৩০]

সমাধান :



মনে করি, কোনো রহস্যের পরিসীমা p ও একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। রহস্যটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

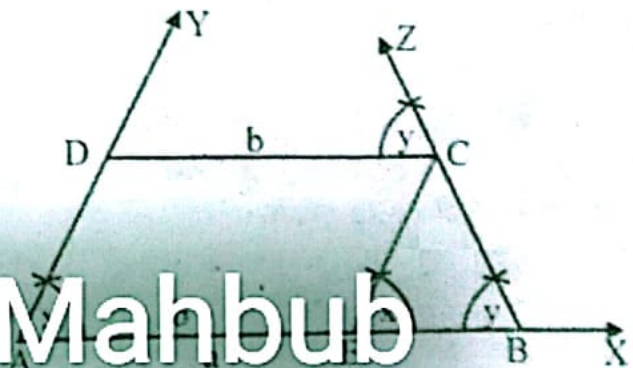
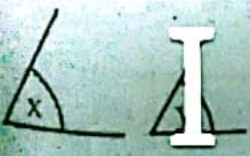
- ১। পরিসীমা p কে সমান চার অংশে ভাগ করি।
- ২। যেকোনো রশ্মি BE হতে $\frac{1}{4}p$ এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC এর B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে CBF আঁকি।
- ৩। BF রশ্মি হতে $\frac{1}{4}p$ এর সমান করে BA রেখাংশ কেটে নিই।
- ৪। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{1}{4}p$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও C, D যোগ করি। তাহলে $ABCD$ -ই নির্ণেয় রহস্য।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১। ট্রাপিজিয়ামের দুটি সমান্তরাল বাহু এবং এদের মধ্যে বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন কোণ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁক।

সমাধান :

a _____
 b _____



MyMahbub

মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু যেকোনো $a > b$ এবং বৃহত্তর বাহু b । $\angle y$ । ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

- ১। যেকোনো রশ্মি AX থেকে $AB = a$ নিই।
- ২। AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle ABZ$ আঁকি।

৩। এবার AB রেখাংশ থেকে $AE = b$ কেটে নিই।
৪। E বিন্দুতে $EC \parallel AY$ আঁকি যা BZ রশ্মিতে C বিন্দুতে ছেদ করে।
৫। এবার $CD \parallel BA$ আঁকি যা EC রশ্মিতে D বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৭.২

- ১। সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব?

- ক) 63° ও 36° খ) 30° ও 70°
গ) 40° ও 50° ঘ) 80° ও 20°

উত্তর : গ) 40° ও 50°

২. i. আয়ত একটি সামান্তরিক
ii. বর্গ একটি আয়ত
iii. রম্বস একটি বর্গ

ওপরের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক?

- ক) i ও ii খ) i ও iii
গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

উত্তর : ক) i ও ii.

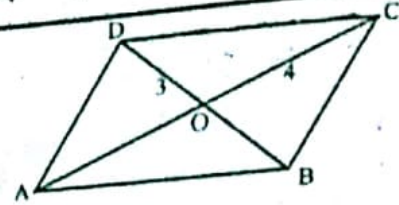
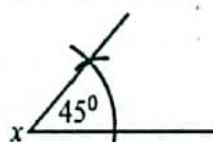
প্রদত্ত চিত্রের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

- ৫। নিম্নে প্রদত্ত উপাস্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

- ক) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৩ সে.মি., ৩.৫ সে.মি., ২.৫ সে.মি. ও ৩ সে.মি. এবং একটি কোণ 45° ।

অঙ্কন :

- a 3 cm
b 3.5 cm
c 2.5 cm
d 3 cm



- ৩। ΔAOB এর ক্ষেত্রফল কত?

- ক) ৬ বর্গ একক খ) ৭ বর্গ একক
গ) ১২ বর্গ একক ঘ) ১৪ বর্গ একক

উত্তর : ক) ৬ বর্গ একক

- ৪। 'চতুর্ভুজটির পরিসীমা -

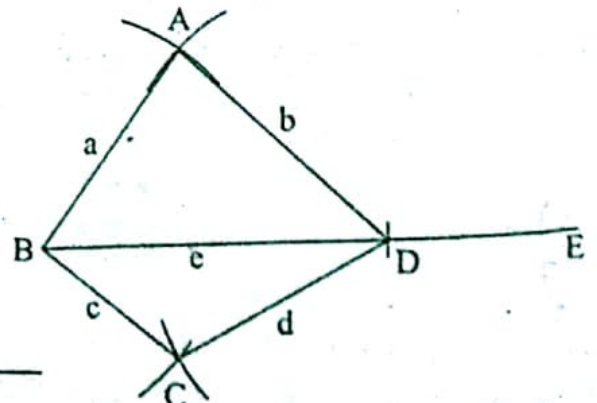
- ক) ১২ একক খ) ১৪ একক
গ) ২০ একক ঘ) ২৮ একক

উত্তর : গ) ২০ একক

- খ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৩.৫ সে.মি., ৪ সে.মি., ২.৫ সে.মি. ও ৩.৫ সে.মি. এবং কর্ণ ৫ সে.মি.।

অঙ্কন :

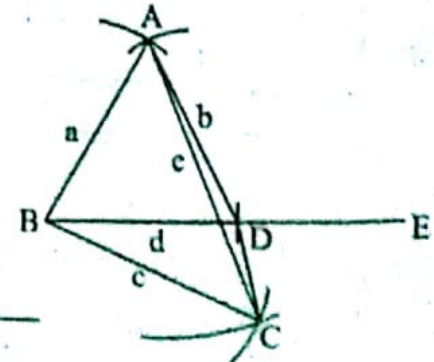
- a 3.5 cm
b 4 cm
c 2.5 cm
d 3.5 cm
e 5 cm কর্ণ



- গ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৩.২ সে.মি., ৩ সে.মি., ৩.৫ সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ ২.৮ সে.মি. ও ৪.৫ সে.মি.।

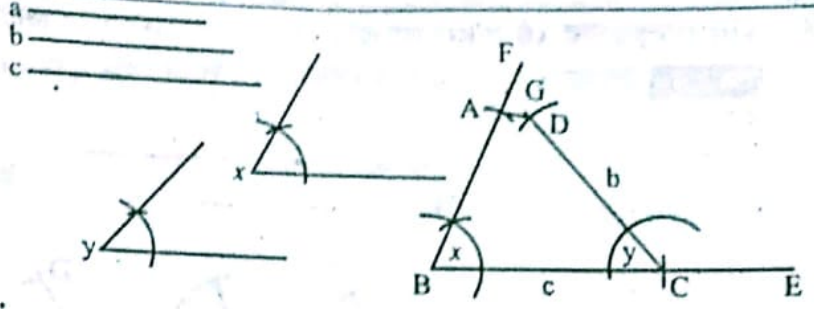
অঙ্কন :

- a 3.2 cm
b 3 cm
c 3.5 cm
d কর্ণ ২.৮ cm
e কর্ণ ৪.৫ cm



- ঘ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৩ সে.মি., ৩.৫ সে.মি., ৪ সে.মি. এবং দুইটি কোণ 60° ও 45° ।

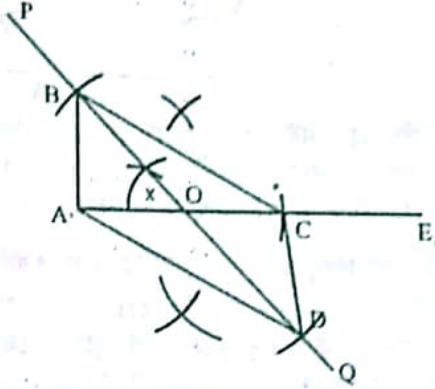
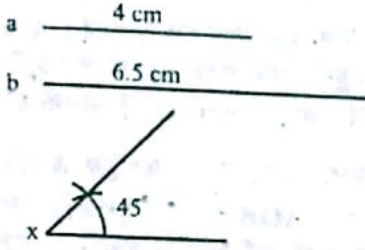
অঙ্কন :



- ঙ) নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন কর :

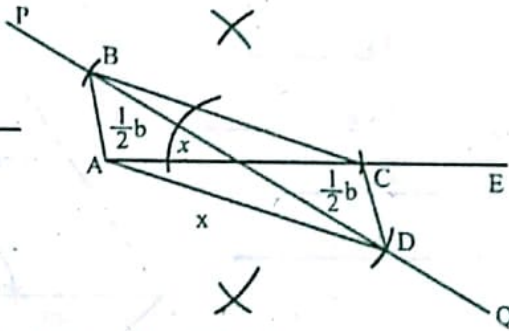
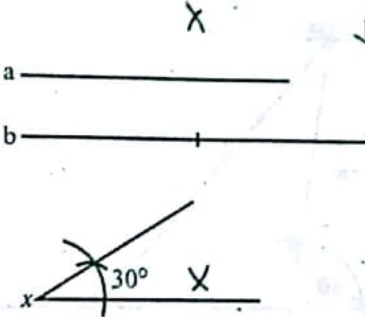
- ক) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য ৪ সে.মি., ৬.৫ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45° ।

অঙ্কন :



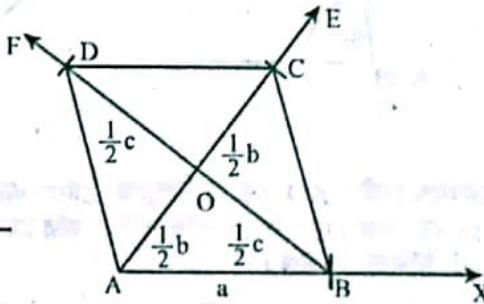
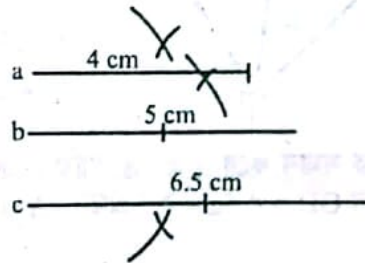
- খ) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি., ৬.৫ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 30° ।

অঙ্কন :



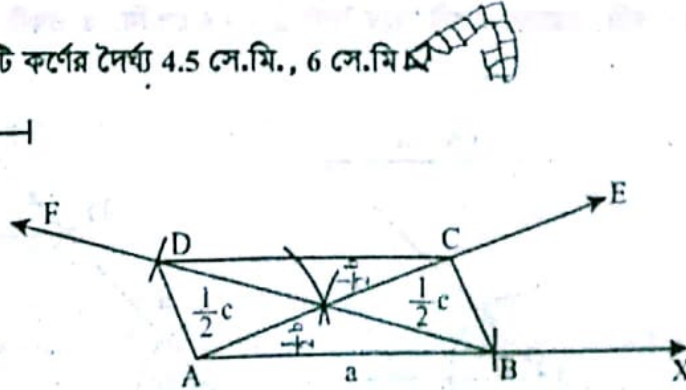
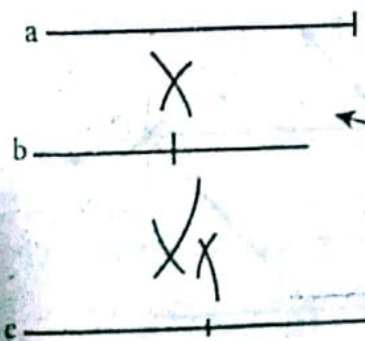
- গ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৪ সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি. ৬.৫ সে.মি.

অঙ্কন :



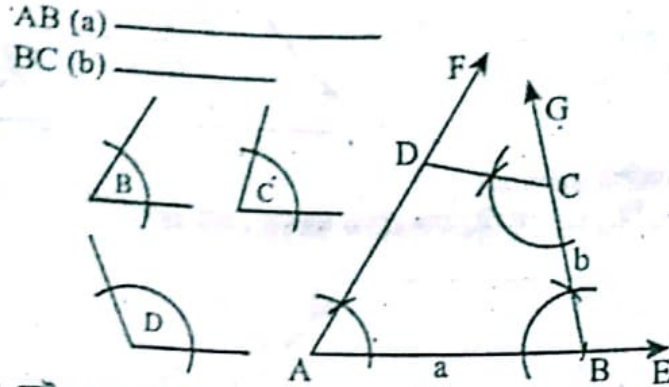
- ঘ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ৫ সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য ৪.৫ সে.মি., ৬ সে.মি.

অঙ্কন :



৭। ABCD চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

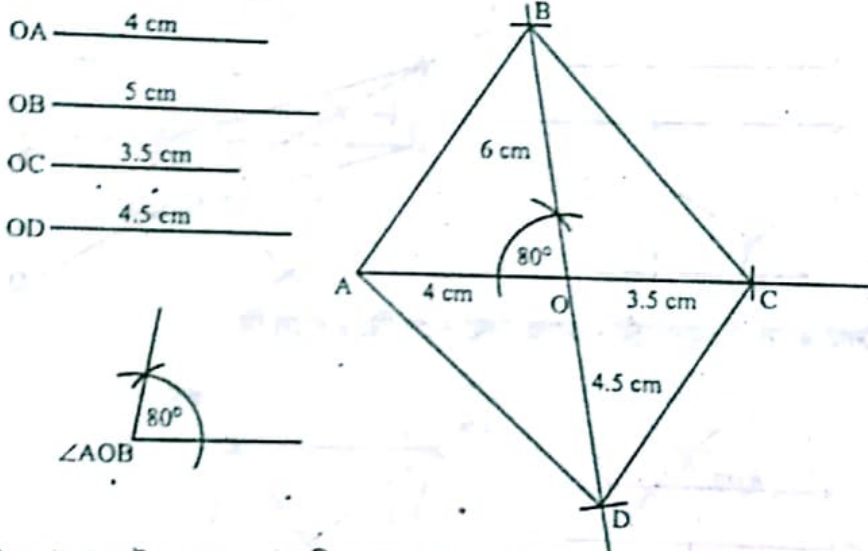


অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি AE নেই। AE থেকে AB বাহুর সমান করে AB অংশ কেটে নেই। A ও B বিন্দুতে $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমান করে $\angle EAF$ এবং $\angle ABG$ কোণ আঁকি। BG থেকে BC বাহুর সমান করে BC অংশ কেটে নেই। এখন C বিন্দুতে $\angle D$ এর সমান করে $\angle BCD$ আঁকি যা AF রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

৮। চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোনো যথাক্রমে OA = 4 সে.মি., OB = 5 সে.মি., OC = 3.5 সে.মি., OD = 4.5 সে.মি. ও $\angle AOB = 80^\circ$ চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান : দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোনো যথাক্রমে OA = 4 সে.মি., OB = 5 সে.মি., OC = 3.5 সে.মি., OD = 4.5 সে.মি. ও $\angle AOB = 80^\circ$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

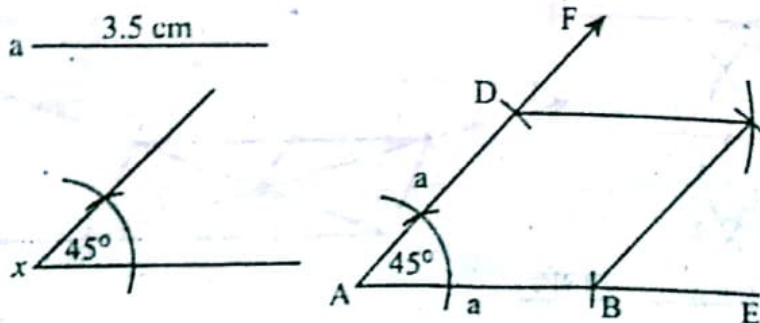


OA = 4 cm একটি রেখাংশ নেই। AO এর O বিন্দুতে 80° এর সমান করে $\angle AOB$ আঁকি। এখন AO কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = 3.5 cm হয় এবং OB কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OD = 4.5 cm হয় এখন, A, B; B, C; C, D; ও D, A যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

৯। রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে. মি. ও একটি কোণ 45° ; রম্বসটি আঁক।

সমাধান : মনে করি, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি. ও একটি কোণ $\angle x = 45^\circ$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

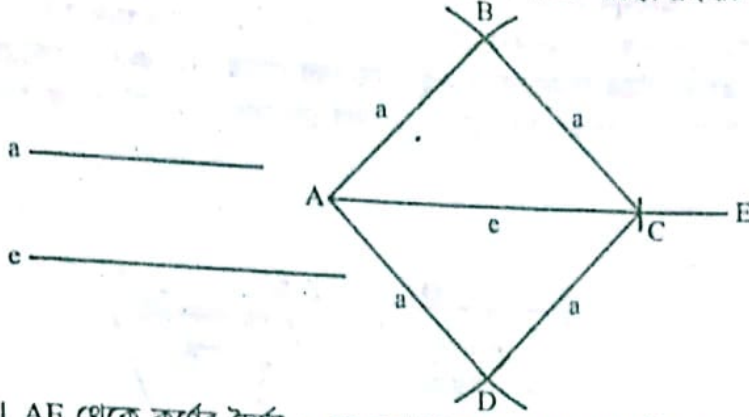
অঙ্কন :



যেকোনো রশ্মি AE নেই। AE থেকে $a = 3.5$ এর সমান করে AB অংশ কাটি। AB এর A বিন্দুতে $\angle BAF$ আঁকি। AF থেকে a এর সমান করে AD অংশ কাটি। এখন AD ও AB এর D ও B কে কেন্দ্র করে $\angle BAD$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করে। D, C ও B, C যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১০। রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

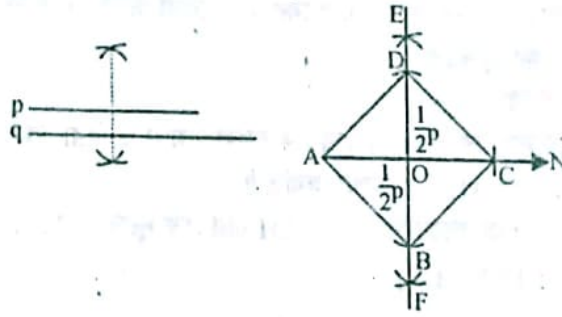
সমাধান : মনে করি, রম্বসের, একটি বাহু a এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।



যেকোনো রশ্মি AE নেই। AE থেকে কর্ণের দৈর্ঘ্য e এর সমান করে AC অংশ কাটি। এখন A ও C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে উভয় দিকে দুইটি করে চারটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপগুলোর পরস্পর B ও D বিন্দুতে ছেদ করে। A, B; A, D; B, C এবং C, D যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১১। দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

সমাধান : মনে করি, একটি রম্বসের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য p ও q দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

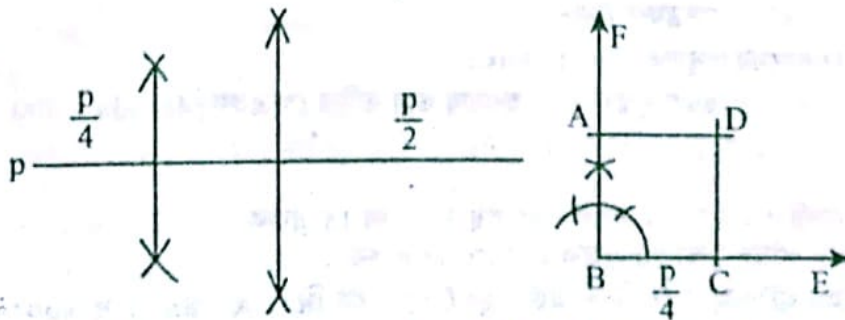


অঙ্কনের ধাপ :

১. যেকোনো রশ্মি AN থেকে q এর সমান করে AC রেখাংশ কেটে নিই।
 ২. AC-এর লম্বদ্বিখন্ডক EF আঁকি। EF, AC-কে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
 ৩. OE ও OF হতে $\frac{1}{2}p$ এর সমান করে যথাক্রমে OD ও OB কেটে নিই।
 ৪. A, B; B, C; C, D ও A, D যোগ করি।
- তাহলে ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

১২। বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

সমাধান :



মনে করি একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা p দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : পরিসীমা p কে প্রথমে সমান দুইভাগে ভাগ করে তার অর্ধেক অংশকে পুনরায় সমান দুইভাগে বিভক্ত করি। ফলে

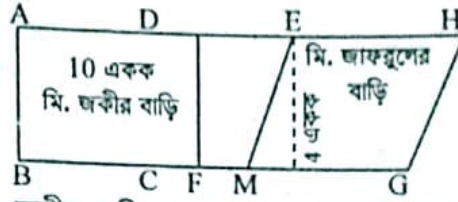
সুপ্রত্যক অংশ $\frac{p}{4}$ এর সমান হবে। যেকোনো রশ্মি BE হতে $BC = \frac{p}{4}$ কেটে নেই। BE রশ্মির B বিন্দুতে $\angle EBF = 90^\circ$ আঁকি।

BF হতে $BA = \frac{P}{4}$ নেই। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{P}{4}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle EBF$ এর মধ্যবর্তী অংশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

- ১৩। জকী ও জাফরুল সাহেবের বসত বাড়ি একই সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত এবং বাড়ির ক্ষেত্রফল সমান। তবে জকীর সাহেবের বাড়ির আকৃতি আয়তাকার এবং জাফরুল সাহেবের বাড়ি সামান্তরিক আকৃতির।
 ক. ভূমির দৈর্ঘ্য ১০ একক এবং উচ্চতা ৮ একক ধরে তাদের বাড়ির সীমারেখা অঙ্কন কর।
 খ. দেখাও যে, জকী সাহেবের বাড়ির সীমারেখা জাফরুল সাহেবের বাড়ির সীমারেখা অপেক্ষা ছোট।
 গ. জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত ৪ : ৩ এবং ক্ষেত্রফল ৩০০ বর্গ একক হলে, তাদের বাড়ির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক)



মনে করি, ABCD আয়তক্ষেত্রটি মি. জকীর বাড়ি এবং EFGH সামান্তরিক ক্ষেত্রটি মি. জাফরুলের বাড়ি। এরা একই সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত।

বাড়ি দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

দৈর্ঘ্য $AB = EH = 10$ একক এবং উচ্চতা $EM = 4$ একক ধরে তাদের বাড়ির সীমারেখা আঁকা হয়েছে।

- খ) দেখাতে হবে মি. জকীর বাড়ির সীমারেখা জাফরুল সাহেবের সীমারেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা EFGH সামান্তরিকের পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অঙ্কন : E বিন্দু হতে $EM \perp FG$ আঁকি।

প্রমাণ : আয়তক্ষেত্র ABCD এবং সামান্তরিক EFGH এর ক্ষেত্রফল সমান ও এরা সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত।

∴ তারা একই সমান্তরাল যুগল BG এবং AH এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ $AB = CD = EM = 8$ একক [∵ এরা প্রত্যেকে $BG \parallel AH$ এর লম্ব দূরত্ব]

এখন $\triangle EMF$ -এ $\angle EMF = 90^\circ$ [∵ $EM \perp FG$]

∴ EF, $\triangle EFM$ -এর অতিভুজ।

∴ $EM < EF$ [∵ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু]

অর্থাৎ, $AB < EF$ [∵ $AB = EM$]

∴ $CD < GH$ [∵ $EF = GH$ এবং $AB = CD$]

বা, $AB + CD < EF + GH$ (i)

আবার, $BC = AD = FG = EH = 10$ একক [∵ ক্ষেত্রদ্বয় সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত]

∴ $BC + AD = FG + EH$ (ii)

∴ $AB + BC + CD + AD < EF + FG + GH + EH$ [(i) নং ও (ii) নং যোগ করে]

∴ ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা $<$ EFGH সামান্তরিকের পরিসীমা।

∴ মি. জকীর বাড়ির পরিসীমা $<$ মি. জাফরুলের পরিসীমা। (দেখানো হলো)

- গ) জকী ও জাফরুল সাহেবের বাড়ির ক্ষেত্রফল সমান।

∴ তাদের বাড়ির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত = ১ : ১ (Ans.)

জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত ৪ : ৩ হওয়ায় তার বাড়ির ক্ষেত্রফল, $4x \times 3x = 300$

বা, $12x^2 = 12 \times 25$

∴ $x = 5$

জকী সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য 4×5 বা ২০ একক এবং প্রস্থ 3×5 বা ১৫ একক

সুতরাং জাফরুল সাহেবের বাড়ির দৈর্ঘ্য ২০ একক এবং প্রস্থ ১৫ একক

- ১৪। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ৭ সে.মি ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য ৪ সে.মি, $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 80^\circ$ এবং $\angle C = 95^\circ$

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

গ. ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর।

মনে করি, $\triangle ABC$ -এ $\angle B = 90^\circ$, $BC = 4$ সে.মি. এবং অতিভুজ $AC = 5$ সে.মি.। [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

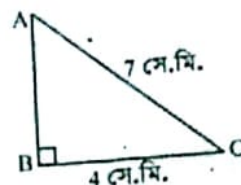
$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\therefore AB = 7^2 - 4^2$$

$$= 49 - 16 = 33$$

$$\therefore AB = \sqrt{33} = 5.75 \text{ সে.মি.}$$

∴ অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = 5.75 সে.মি. (প্রায়)



a 5 সে.মি.
b 7 সে.মি.

১। যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ কেটে নিই। B বিন্দুতে $BN \perp BE$ আঁকি।

২। C বিন্দুকে কেন্দ্র করে h এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। এটি BN কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি।

তাহলে, $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

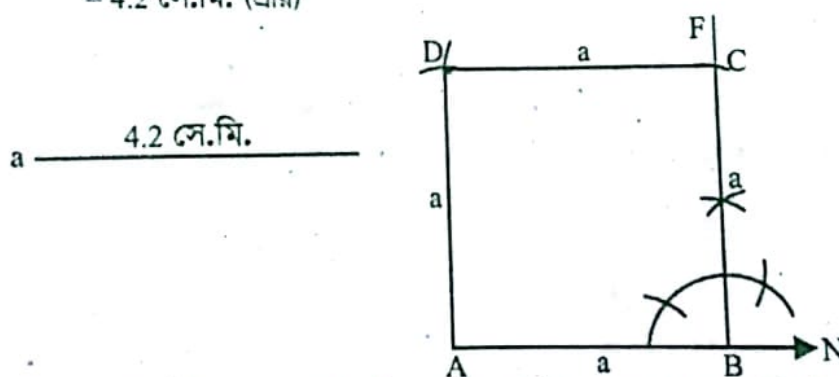
$$\begin{aligned}\Delta ABC\text{-এর পরিসীমা} &= AB + BC + AC \\ &= (5.75 + 4 + 7) \text{ সে.মি.} \\ &= 16.75 \text{ সে.মি.}\end{aligned}$$

এর সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ আঁকতে হবে।

বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 16.75 সে.মি.

কাক্ষেত্রের চারটি বাহু পরস্পর সমান।

∴ কার্ফেজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য = $(16.75 \div 4)$ সে.মি.
= 4.2 সে.মি. (প্রায়)



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4.2$ সে.মি. দেওয়া আছে। বর্গটি আঁকতে হবে।

ডক্তরের ধাপ :

১। AN যেকোনো রশ্মি হতে $AB = a$ কেটে নিই।

২। AB-এর B বিন্দুতে $BE \perp AB$ আঁকি।

BE রশি হতে $BC = a$ কেটে নিই।

৩। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

৪। A, D এবং C, D যোগ করি।

তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

১২। ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি. BC = 5 সে.মি $\angle A = 85^\circ$, $\angle b = 80^\circ$ এবং $\angle C = 95^\circ$

৩৭. তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

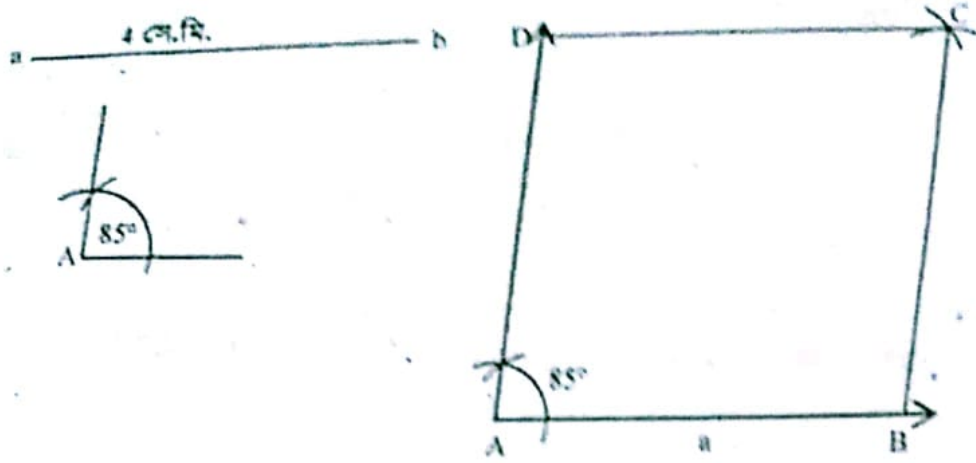
ক. একটি বস্তু ত্যাগ করে উহার নাম দাও।

৭. প্রদত্ত চতুর্ভুজ ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর।

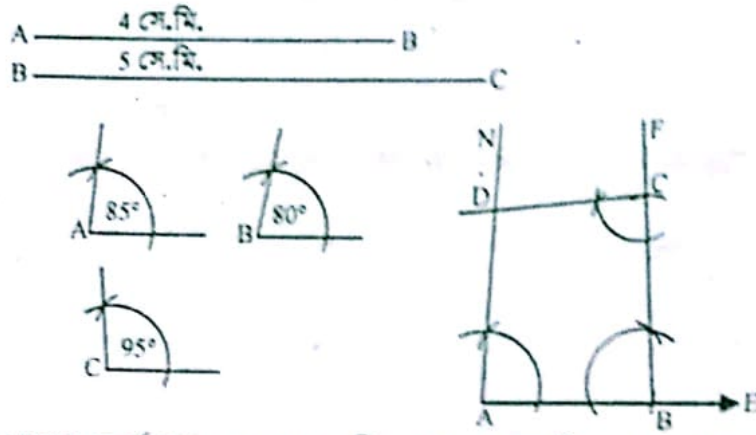
১০. একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান পরিমিতা বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

সমাধান :

ক)



খ)



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি., BC = 5 সে.মি., $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 80^\circ$ এবং $\angle C = 95^\circ$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

১। যেকোনো রশ্মি AE হতে AB = 4 সে.মি., কেটে নিই। AB এর A বিন্দুতে $\angle BAN = \angle A$ এবং B বিন্দুতে $\angle ABF = \angle B$ আঁকি।

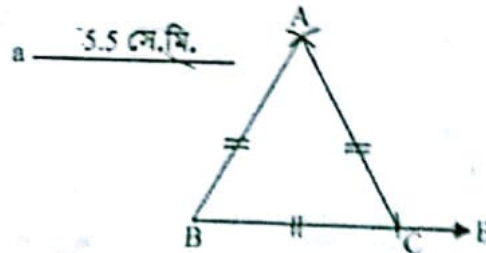
২। BF হতে BC = 5 সে.মি., কেটে নিই। BC-এর C বিন্দুতে $\angle BCF = \angle C$ আঁকি।

৩। CF রশ্মি AN কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

গ) মেপে দেখা যাচ্ছে, ABCD চতুর্ভুজের CD = 2.5 সে.মি. এবং AD = 5 সে.মি.

$$\begin{aligned} \text{চতুর্ভুজটির পরিসীমা} &= AB + BC + CD + AD \text{ সে.মি.} \\ &= (4 + 5 + 2.5 + 5) \text{ সে.মি.} \\ &= 16.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা} &= 16.5 \text{ সে.মি.} \\ &= 5.5 \text{ সে.মি.} \end{aligned}$$



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 5.5$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ :

- ১। যেকোনো রশ্মি BE হতে a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।
 - ২। B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC-এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
 - ৩। A, B এবং A, C যোগ করি।
- তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বৃত্তচাপ, কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণ, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে।
- বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য বর্ণনা করতে পারবে।

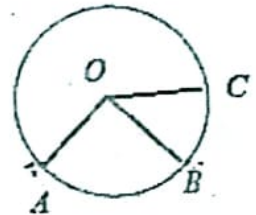
যা মনে রাখতে হবে...



□ বৃত্ত

বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার কেন্দ্রগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র। নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে বজায় রেখে কোনো বিন্দু যে আবদ্ধ পথ চিত্রিত করে তাই বৃত্ত। কেন্দ্র হতে বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্বকে ব্যাসার্ধ বলে।

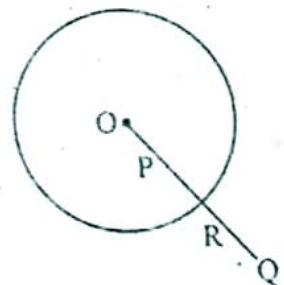
মনে করি, O সমতলের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট পরিমাপ। সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, তাদের সেট বৃত্ত, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r । চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, A, B ও C বৃত্তস্থ বিন্দু। OA, OB ও OC এর প্রত্যেকটি বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।



সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বিন্দু বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়। উপরের চিত্রে A, B ও C সমবৃত্ত বিন্দু।

□ বৃত্তের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ

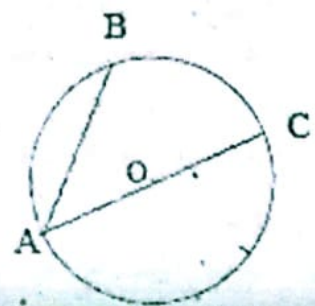
যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r হয় তবে O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে কম তাদের সেটকে বৃত্তটির অভ্যন্তর এবং O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে বেশি তাদের সেটকে বৃত্তটির বহির্ভাগ বলা হয়। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে বৃত্তের অভ্যন্তরেই থাকে।



কোনো বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে, P বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। PQ রেখাংশ বৃত্তটিকে কেবল R বিন্দুতে ছেদ করে।

□ বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস

বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটির একটি জ্যা। বৃত্তের কোনো জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়। অর্থাৎ বৃত্তের জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়। চিত্রে, AB ও AC বৃত্তটির দুইটি জ্যা কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা হলো ব্যাস। এদের মধ্যে AC জ্যাটি ব্যাস; কারণ জ্যাটি বৃত্তটির এবং বৃত্তটির কেন্দ্র O । সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র প্রত্যেক কেন্দ্রগামী OA ও OC বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ। অতএব প্রত্যেক ব্যাসের দৈর্ঘ্য $2r$, যেখানে r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।



□ অনুশীলনী- ৮.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১: উপপাদ্য-১ এর বিপরীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ:

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস তিনু অন্য কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে প্রমাণ কর।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন: বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস তিনু অন্য কোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে-প্রমাণ করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQN বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা PQ এবং OR, PQ এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, PR = RQ
অঙ্কন: O, P এবং O, Q যোগ করি।



প্রমাণ:

$\angle ORP = \angle ORQ =$ এক সমকোণ।

সমকোণী $\triangle OPR$ ও সমকোণী $\triangle OQR$ এ অতিভুজ OP = অতিভুজ OQ

এবং OR = OR

$\therefore \triangle OPR \cong \triangle OQR$

$\therefore PR = RQ$ [প্রমাণিত]

যথার্থতা

[OR = PQ]

[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

[সাধারণ বাহু]

[অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৮.১

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদকিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদকিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ACBD বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুই পরস্পরকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, ACBD বৃত্তের কেন্দ্র।

অঙ্কন: বৃত্তটির কেন্দ্র E না ধরে O ধরি এবং O, E যোগ করি।

প্রমাণ: জানা আছে যে, বৃত্তের ব্যাস তিনু কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।

O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু E.

$\therefore OE \perp AB$ অর্থাৎ $\angle OEA =$ এক সমকোণ।

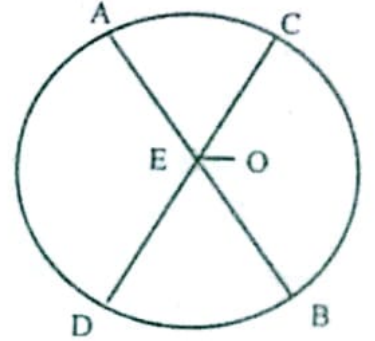
আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা-এর মধ্যবিন্দু E.

$\therefore OE \perp CD$ অর্থাৎ $\angle OEC =$ এক সমকোণ।

যেহেতু AB এবং CD দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা।

$\therefore \angle OEA$ এবং $\angle OEC$ উভয়ই এক সমকোণ হতে পারে না।

সুতরাং, E বিন্দুটি ACBD বৃত্তের কেন্দ্র। (প্রমাণিত)



২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যা-দ্বয়ের উপর লম্ব।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যা-দ্বয়ের উপর লম্ব।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। এর AB ও CD সমান্তরাল জ্যা-দ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। N, M যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যা-দ্বয়ের উপর লম্ব।

অঙ্কন: O, N এবং O, M যোগ করি।

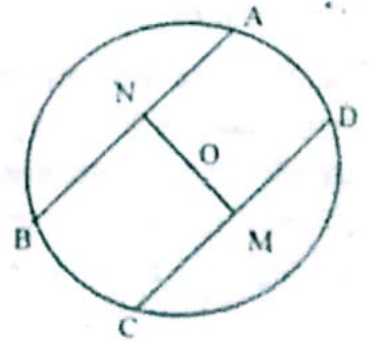
প্রমাণ: জানা আছে, বৃত্তের ব্যাস তিনু কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব। O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু N.

$\therefore ON \perp$ জ্যা AB

আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা এর মধ্যবিন্দু M.

$\therefore OM \perp$ জ্যা CD অর্থাৎ ON ও OM, O বিন্দু হতে যথাক্রমে AB ও CD সমান্তরাল জ্যা-দ্বয়ের উপর লম্ব।

সুতরাং ON এবং OM একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যা-দ্বয়ের উপর লম্ব। (প্রমাণিত)



৩। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC$ ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$ ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি জ্যা। O, A যোগ করা হল। AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ OA এর সাথে সমান কোণ $\angle OAB$ ও $\angle OAC$ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $\angle OAB = \angle OAC$ । প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$ ।

অঙ্কন : O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle AOB$ -এ $OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore \angle OBA = \angle OAB$ [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

আবার, $\triangle AOC$ -এ

$OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$

এখন, $\angle OAB = \angle OAC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle OBA = \angle OCA$

এখন, $\triangle AOB$ ও $\triangle AOC$ এর মধ্যে

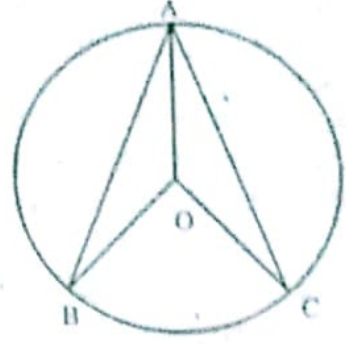
$OB = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\angle OAB = \angle OAC$

এবং, $\angle OBA = \angle OCA$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AOC$

সুতরাং $AB = AC$. (প্রমাণিত)



৪। চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা $AB = AC$ । প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO$ ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : চিত্রে দেয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা $AB = AC$ । প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAO = \angle CAO$ ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং $AB = AC$ জ্যা। O, A যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAO = \angle CAO$ ।

অঙ্কন : O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle AOB$ ও $\triangle AOC$ এ

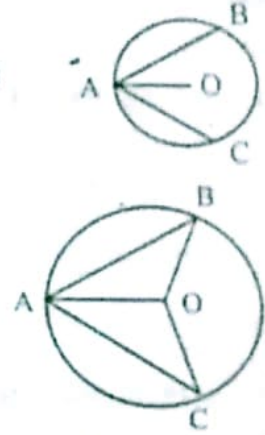
$AB = AC$ [দেওয়া আছে]

$OB = OC$ [\because একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং, OA সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AOC$ [\because ত্রিভুজদ্বয়ের বাহুদ্বয় সমান]

$\therefore \angle BAO = \angle CAO$. (প্রমাণিত)



৫। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাতে হবে যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী $\triangle ABC$ এর $\angle ABC =$ এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ। শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। মনে করি, এই বৃত্তের কেন্দ্র O। প্রমাণ করতে হবে যে, O, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : $\angle ABC =$ এক সমকোণ [কখনো অনুসারে]

$\therefore \angle ABC$, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ হবে।

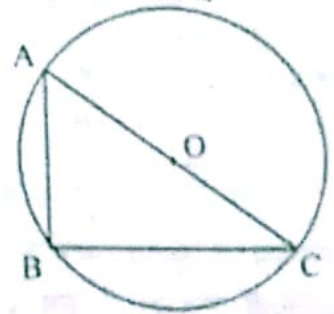
$\therefore A, B, C$ বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাস AC।

সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O ব্যাস AC এর উপর অবস্থিত এবং $OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore O$, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

৬। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = BD$ ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = BD$ ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AFB ও CHD উভয় বৃত্তের কেন্দ্র O. AFB বৃত্তের জ্যা AB, বৃত্ত CHD কে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = BD$.

অঙ্কন : $OE \perp AB$ টানি।

প্রমাণ : আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখলিত করে।

AFB বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OE \perp$ জ্যা AB.

$\therefore AE = BE$ (i)

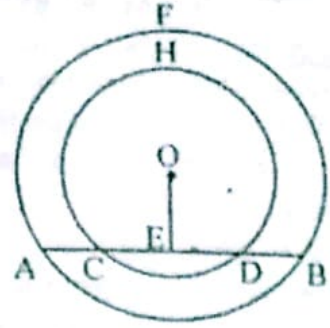
আবার, CHD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OE \perp$ জ্যা CD.

$\therefore CE = DE$ (ii)

সমীকরণ (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $AE - CE = BE - DE$

বা, $AC = BD$ [$\because AE - CE = AC$ এবং $BE - DE = BD$]

$\therefore AC = BD$ (প্রমাণিত)



৬। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, দেখাতে হবে যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD দুইটি সমান জ্যা P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB এর অংশদ্বয় = CD এর অংশদ্বয়। অর্থাৎ $AP = CP$ এবং $DP = BP$.

অঙ্কন : O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব আঁকি। O, P যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

$\therefore EB = \frac{1}{2} AB$

তদুপ, $FD = \frac{1}{2} CD$

কিন্তু $AB = CD$ বলে,

$EB = FD$ (i)

এখন, ΔPOE ও ΔPOF দ্বয়ের মধ্যে,

$OE = OF$ [সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী]

OP বাহু সাধারণ

এবং $\angle OEP = \angle OFP$ [$\because OF \perp CD$ এবং $OE \perp AB$]

$\therefore \Delta POE \cong \Delta POF$

$\therefore PE = PF$ (ii)

এখন, (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$EB + PE = FD + PF$

বা, $BP = DP$

আবার, $AB = CD$ বলে,

$AB - BP = CD - DP$

বা, $AP = CP$

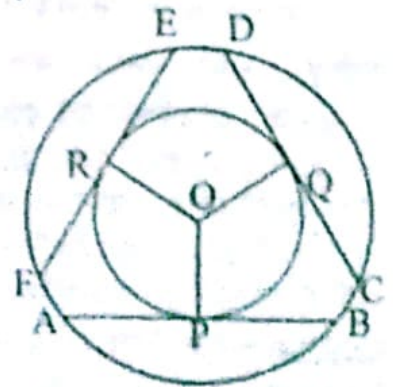
$\therefore AP = CP$ এবং $DP = BP$. (প্রমাণিত)

৭। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে AB, CD এবং EF তিনটি সমান জ্যা। P, Q ও R যথাক্রমে AB, CD ও EF-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, P, Q, R বিন্দুত্রয় সমবৃত্ত।

অঙ্কন : O, P, O, Q এবং O, R যোগ করি।



প্রমাণ : যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P, AB এর মধ্যবিন্দু;

সুতরাং, $OP \perp AB$.

তদ্রূপ, $OQ \perp CD$ এবং $OR \perp EF$.

আমরা জানি, সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

$\therefore OP = OQ = OR$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP, OQ, OR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা P, Q ও R বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, P, Q, R বিন্দুত্রয় সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৮। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র, AB তার ব্যাস। AB এর দুই প্রান্ত হতে এর বিপরীত দিকে AE ও BF এ দুটি জ্যা অঙ্কন করা হল যেন $AE = BF$ হয়।

দেখাতে হবে যে, $AE \parallel BF$.

অঙ্কন : A, F ও B, E যোগ করি।

প্রমাণ : AB বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore \angle AEB =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

এবং, $\angle AFB =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

এখন, সমকোণী $\triangle AEB$ এবং সমকোণী $\triangle AFB$ এ

অতিভুজ AB উভয় ত্রিভুজের জন্য সাধারণ।

এবং $AE = BF$ [কল্পনা অনুসারে]

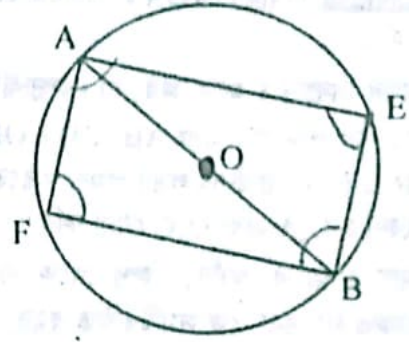
$\therefore \triangle AEB$

$\cong \triangle AFB$ [\therefore সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং একটি বাহু সমান]

সুতরাং $\angle BAE = \angle ABF$

কিন্তু $\angle BAE$ এবং $\angle ABF$ একান্তর কোণ, যাদের ছেদক AB.

$\therefore AE \parallel BF$. (প্রমাণিত)



৯। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AEBF বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ব্যাস। AB ব্যাসের প্রান্তদ্বয় A ও B হতে এর বিপরীত দিকে অঙ্কিত AE ও BF জ্যা-দ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

দেখাতে হবে যে, $AE = BF$.

অঙ্কন : O হতে BF ও AE এর উপর যথাক্রমে OC এবং OD লম্বা টানি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OC \perp$ জ্যা BF

$\therefore BC = FC = \frac{1}{2} BF$ (i)

আবার, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OD \perp$ জ্যা AE

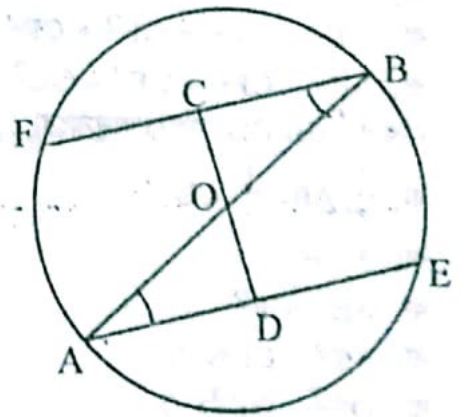
$\therefore AD = ED = \frac{1}{2} AE$ (ii)

এখন, $AE \parallel BF$ এবং AB ছেদক

$\therefore \angle ABF = \angle BAE$ [একান্তর কোণ বলে]

বা, $\angle OBC = \angle OAD$

এখন, $\triangle BOC$ এবং $\triangle AOD$ এ



$$\angle OCB = \angle ODA$$

[অঙ্কন অনুসারে প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$$\angle OBC = \angle OAD$$

$$\text{এক } OB = OA$$

[\therefore একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$$\therefore \triangle BOC \cong \triangle AOD$$

[\therefore ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং একটি বাহু পরস্পর সমান]

সুতরাং,

$$BC = AD$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} AE$$

[(i) নং এবং (ii) নং থেকে]

$$\text{বা, } BF = AE$$

[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$$\therefore AE = BF. \text{ (প্রমাণিত)}$$

১০। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ও CD এর দুটি জ্যা এবং $AB > CD$ । OE এবং OF কেন্দ্র হতে যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $OE < OF$ ।

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যে কোন জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OE \perp$ জ্যা AB

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2} AB$$

আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র $OF \perp$ জ্যা CD

$$\therefore CF = DF = \frac{1}{2} CD$$

এখন, সমকোণী $\triangle OAE$ এবং $\triangle OCF$ এর অতিভুজ যথাক্রমে OA এবং OC

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$OA^2 = OE^2 + AE^2$$

$$OC^2 = OF^2 + CF^2$$

$$\text{কিন্তু, } OA = OC$$

[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$$\text{বা, } OA^2 = OC^2$$

$$\text{বা, } OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$$

$$\text{বা, } AE^2 - CF^2 = OF^2 - OE^2 \dots\dots\dots (i)$$

আবার, $AB > CD$ [কল্পনা অনুসারে]

$$\text{বা, } \frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} CD$$

[উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } AE > CF$$

$$\text{বা, } AE^2 > CF^2$$

[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } AE^2 - CF^2 > 0$$

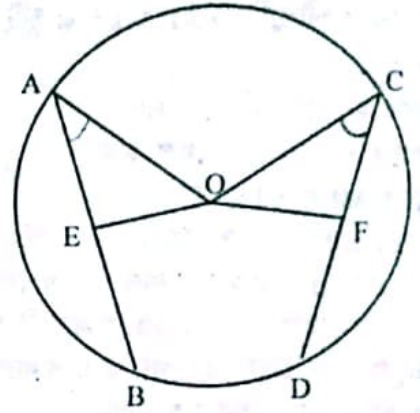
$$\text{বা, } OF^2 - OE^2 > 0$$

[(i) নং থেকে]

$$\text{বা, } OF^2 > OE^2$$

$$\text{বা, } OF > OE$$

$$\therefore OE < OF. \text{ (প্রমাণিত)}$$



১১। কোনো বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং CD অন্য যেকোনো জ্যা যার মধ্যবিন্দু E, AB জ্যা-এ অবস্থিত। দেখাও যে, E যতই AB এর মধ্যবিন্দুর নিকটবর্তী হয়, CD এর দৈর্ঘ্য ততই বর্ধিত হয়।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং CD অন্য যেকোনো জ্যা যার মধ্যবিন্দু E, AB জ্যা-এ অবস্থিত। দেখাতে হবে যে, E যতই AB এর মধ্যবিন্দুর নিকটবর্তী হয়, CD এর দৈর্ঘ্য ততই বর্ধিত হয়।

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB হলো একটি নির্দিষ্ট জ্যা, যার মধ্যবিন্দু P. এখন অপর একটি জ্যা CD এর মধ্যবিন্দু E, AB এর উপর অবস্থিত। দেখাতে হবে যে, E যতই P এর নিকটবর্তী হয় CD এর দৈর্ঘ্য ততই বাড়তে থাকে।

অঙ্কন : O, P; O, C এবং O, E যোগ করি।

প্রমাণ : E, CD জ্যা-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OE \perp$ জ্যা CD \because বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখা ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব।

সমকোণী $\triangle OEC$ এ, অতিভুজ = OC

$$\therefore OC^2 = CE^2 + OE^2$$

[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$$\text{বা, } OC^2 = \left(\frac{1}{2} CD\right)^2 + OE^2$$

$$\text{বা, } OC^2 = \frac{CD^2}{4} + OE^2 \dots\dots\dots (i)$$

আবার, P, AB জ্যা -এর মধ্যবিন্দু

$\therefore OP \perp$ জ্যা AB.

$$\text{অর্থাৎ } \angle OPE = 90^\circ$$

সমকোণী $\triangle OEP$ এ অতিভুজ OE.

$$\therefore OE^2 = OP^2 + PE^2 \text{ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]}$$

$$(i) \text{ নং এ } OE^2 \text{ এর মান বসিয়ে পাই, } OC^2 = \frac{CD^2}{4} + OP^2 + PE^2$$

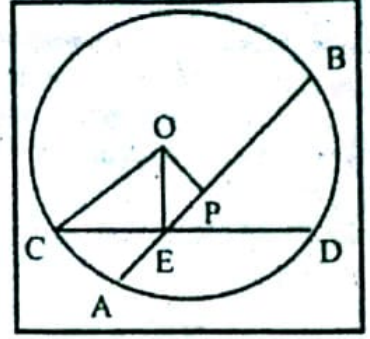
$$\text{বা, } \frac{CD^2}{4} = OC^2 - OP^2 - PE^2$$

$$\text{বা, } CD^2 = 4(OC^2 - OP^2 - PE^2)$$

$$\text{বা, } CD = 2\sqrt{OC^2 - OP^2 - PE^2} \dots\dots\dots (ii)$$

(ii) নং সমীকরণে OC = বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং OP = O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব অর্থাৎ OC এবং OP নির্দিষ্ট। কাজেই স্মৃতিত PE এর দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে CD এর মান তত বাড়বে।

EP হলো E এবং P এর মধ্যবর্তী দূরত্ব। কাজেই E যতই P এর নিকটবর্তী হবে EP এর দৈর্ঘ্য কমবে। ফলে CD এর দৈর্ঘ্য ততই বাড়তে থাকবে। (প্রমাণিত)



□ অনুশীলনী- ৮.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ

[পৃষ্ঠা- ১৩৮]

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ কর।

সমাধান: O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AC কেন্দ্রগামী হলে উপপাদ্য ৪ প্রমাণ করতে হবে।

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BC চাপের উপর দড়ায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$ ।



যথার্থতা

ত্রিভুজের সমান বাহু দুটির বিপরীত কোণদ্বয়

$$\triangle AOB \text{ এ } OA = OB$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA$$

$$ii. \triangle AOB \text{ এর বহিঃস্থ } \angle BOC = \angle OAB + \angle OBA$$

$$\therefore \angle BOC = \angle OAB + \angle OAB = 2\angle OAB$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC$$

[প্রমাণিত]

পরস্পর সমান।

ত্রিভুজের বহিঃস্থকোণ
অন্তঃস্থ বিপরীত
কোণদ্বয়ের সমষ্টির
সমান।

□ কাজ

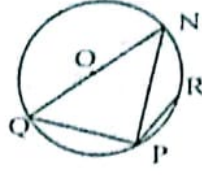
[পৃষ্ঠা- ১৩৯]

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

সমাধান: সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

বিশেষ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের QPR চাপটি একটি উপচাপ। Q, P ও P, R যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে, $\angle QPR$ একটি মূলকোণ।

অঙ্কন : QN ব্যাস আঁকি। P, N যোগ করি।



সমকোণ

$\therefore \angle QPR$ একটি মূলকোণ।
[প্রমাণিত]

একটি অংশ।

[১ নং হতে]

[$\angle QPR$ সরলরৈখিক কোণের অংশ]

প্রমাণ :	ধাপ	যথার্থতা
১।	$\angle QPN$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle QPN =$ এক সমকোণ।	[এটি অর্ধবৃত্তের উপর অবস্থিত]
২।	$\angle QPN < \angle QPR$ $\therefore ১$ সমকোণ $\angle QPN, \angle QPR$ $\therefore ১$ সমকোণ $< \angle QPR < ২$	[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ] [$\angle QPN, \angle QPR$ এর

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৮.২

- ১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2 \angle AEB$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2 \angle AEB$.

বিশেষ নির্বচন : ধরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2 \angle AEB$.

অংকন : O, A; O, B; O, C ও O, D যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং পরিধি $\angle ADB$ ।

$$\therefore \angle AOB = 2 \angle ADB \dots\dots\dots (i)$$

আবার, চাপ CD এর উপর $\angle COD$ কেন্দ্রস্থ এবং $\angle DAC$ পরিধি।

$$\therefore \angle COD = 2 \angle DAC \dots\dots\dots (ii)$$

এখন, (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

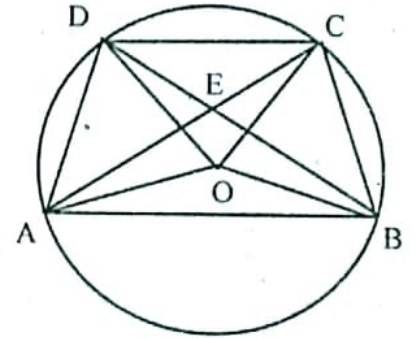
$$\angle AOB + \angle COD = 2 \angle ADB + 2 \angle DAC$$

$$\text{বা, } \angle AOB + \angle COD = 2 (\angle ADB + \angle DAC)$$

$$= 2 (\angle ADE + \angle DAE)$$

$$= 2 \angle AEB \quad [\because \angle AEB, \triangle ADE\text{-এর বহিঃস্থ কোণ}]$$

$$\therefore \angle AOB + \angle COD = 2 \angle AEB. \text{ (প্রমাণিত)}$$



- ২। ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $\triangle AED$ ও $\triangle BEC$ সদৃশকোণী।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাতে হবে যে, $\triangle AED$ ও $\triangle BEC$ সদৃশকোণী।

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে ABCD বৃত্তে AB এবং CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D এবং B, C যোগ করা হলে যথাক্রমে $\triangle AED$ এবং $\triangle BEC$ পাওয়া যায়।

দেখাতে হবে যে, $\triangle AED$ ও $\triangle BEC$ সদৃশকোণী।

প্রমাণ : আমরা জানি, বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

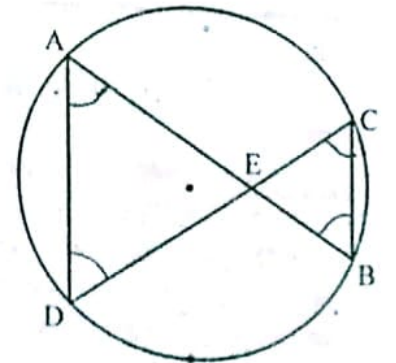
এখন, একই চাপ BD এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এবং $\angle BCD$.

$$\therefore \angle BAD = \angle BCD$$

$$\text{অর্থাৎ, } \angle EAD = \angle ECB$$

আবার, একই চাপ AC এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ADC$ এবং $\angle ABC$.

$$\therefore \angle ADC = \angle ABC$$



অর্থাৎ, $\angle ADE = \angle CBE$
এবং, $\triangle AED$ এবং $\triangle BEC$ এ

$$\angle EAD = \angle ECB;$$

$$\angle ADE = \angle CBE$$

এবং $\angle AED = \angle BEC$ [\because বিপ্রতীপ কোণ]

অর্থাৎ $\triangle AED$ এবং $\triangle BEC$ সদৃশকোণী। (প্রমাণিত)

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তে,
 $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

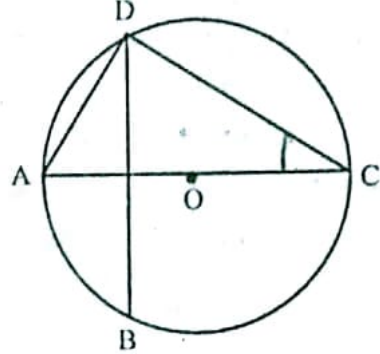
প্রমাণ : যেহেতু, $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ

অর্থাৎ, $\angle ADC =$ এক সমকোণ

$\therefore \angle ADC$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ [\because অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ]

$\therefore AC$ বৃত্তের ব্যাস এবং O তার কেন্দ্র

$\therefore A, O$ এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)



২। AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ -এর দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন : ধরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ADBC$ বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করেছে তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ। অর্থাৎ $\angle BOD + \angle AOC = 2\angle AEC$.

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ : BD চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং পরিধিস্থ $\angle BAD$ এবং AC চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ ও পরিধিস্থ $\angle ADC$.

সুতরাং $\angle BOD = 2\angle BAD$ (i) [কারণ কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ]

এবং $\angle AOC = 2\angle ADC$(ii)

এবং, (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

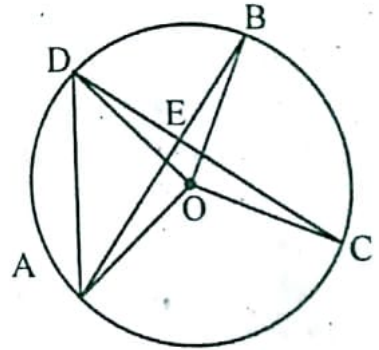
$$\angle BOD + \angle AOC = 2\angle BAD + 2\angle ADC$$

$$\therefore \angle BOD + \angle AOC = 2(\angle BAD + \angle ADC)$$

$$= 2(\angle EAD + \angle ADE)$$

$$= 2\angle AEC \quad [\because \angle AEC, \triangle ADE \text{ এর বহিঃস্থ কোণ}]$$

$$\therefore \angle BOD + \angle AOC = 2\angle AEC. \quad (\text{প্রমাণিত})$$



৩। দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল

বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB ও CD । সুতরাং তির্যক বাহুদ্বয় হল AD ও BC ।

দেখাতে হবে যে, $AD = BC$

অঙ্কন : B, D যোগ করি।

প্রমাণ : $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামে,

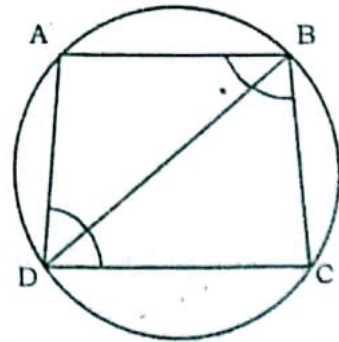
$AB \parallel CD$ এবং BD ছেদক

[কল্পনা অনুসারে]

$$\therefore \angle ABD = \angle BDC$$

[একান্তর কোণ]

বা, D চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ BC চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান।



বা, চাপ $AD =$ চাপ BC [\because বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

বা, AD জ্যা $= BC$ জ্যা [\because বৃত্তে সমান সমান চাপ সমান জ্যা ছিন্ন করে]

$\therefore AD = BC$ (প্রমাণিত)

৬। AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $AD = AE$.

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, $AD = AE$.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও AC দুটি জ্যা। P , AB উপচাপের মধ্যবিন্দু এবং Q , AC উপচাপের মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যা-দ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, $AD = AE$.

অঙ্কন : A, P এবং A, Q যোগ করি।

প্রমাণ : P , APB চাপের মধ্যবিন্দু।

\therefore চাপ $AP =$ চাপ BP

বা, বৃত্তস্থ $\angle AQP =$ বৃত্তস্থ $\angle BAP$

বা, $\angle AQE = \angle PAD$ (i)

আবার, Q , AQC চাপের মধ্যবিন্দু।

\therefore চাপ $AQ =$ চাপ CQ .

বা, বৃত্তস্থ $\angle APQ =$ বৃত্তস্থ $\angle CAQ$

বা, $\angle APD = \angle EAQ$

বা, $\angle EAQ = \angle APD$ (ii)

এখন, (i) + (ii) নং থেকে পাই, $\angle AQE + \angle EAQ = \angle PAD + \angle APD$ (iii)

AD রশ্মির প্রান্ত বিন্দুতে D তে PE সরলরেখা মিলিত হয়েছে।

ফলে, $\angle ADP$ এবং $\angle ADE$ সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

$\therefore \angle ADP + \angle ADE =$ দুই সমকোণ

আবার, $\triangle APD$ এ, এবং বহিঃস্থ $\angle ADE$, ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত $\angle APD$ ও $\angle PAD$ এর সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ, $\angle ADE = \angle APD + \angle PAD$ (iv).

অনুরূপে, $\triangle AQE$ এ, এর বহিঃস্থ $\angle AED$, ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত $\angle AQE$ ও $\angle EAQ$ এর সমষ্টির সমান

অর্থাৎ, $\angle AED = \angle AQE + \angle EAQ$

$= \angle PAD + \angle APD$

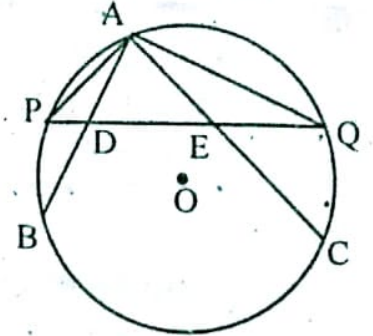
[(iii) নং থেকে]

$= \angle ADE$ [(iv) নং থেকে]

$\therefore \angle AED = \angle ADE$.

অর্থাৎ $\triangle ADE$ এর $\angle AED = \angle ADE$

$\therefore AD = AE$ (প্রমাণিত) [\because সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]



I ❤️ MyMahbub

□ অনুশীলনী- ৮.৩

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৮.৩

- ১। $\triangle ABC$ এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখন্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ -এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখন্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন : $\triangle ABC$ -এর $\angle B$ ও $\angle C$ -এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং $\angle B$ ও $\angle C$ -এর বহির্দ্বিখন্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle ABC + \angle CBE =$ দুই সমকোণ

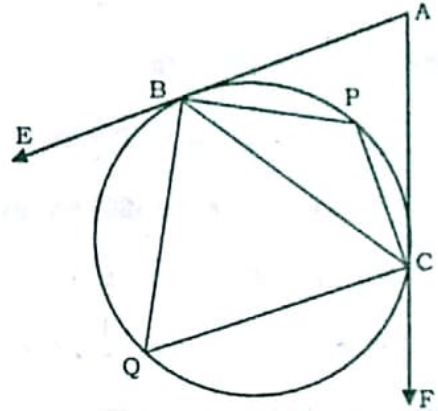
$\therefore \angle PBC + \angle CBQ = \angle PBQ =$ এক সমকোণ।

অনুরূপে, $\angle PCB + \angle BCQ = \angle PCQ =$ এক সমকোণ।

$\therefore BPCQ$ চতুর্ভুজের $\angle PBQ + \angle PCQ =$ দুই সমকোণ,

$\therefore BPCQ$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore B, P, C, Q$ বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)



- ২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখন্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখন্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখন্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখন্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। এর $\angle C$ -এর সমদ্বিখন্ডক CE এবং $\angle A$ -এর বিপরীত $\angle A$ -এর বহির্দ্বিখন্ডক AE পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দু বৃত্তস্থ অর্থাৎ বৃত্তের উপর ছেদ করে।

প্রমাণ : $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায়,

$\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

কিন্তু F, A, B একই সরলরেখায় হওয়ায়,

$\angle FAD + \angle BAD =$ এক সরলকোণ $=$ দুই সমকোণ।

সুতরাং, $\angle BAD + \angle BCD = \angle FAD + \angle BAD$

বা, $\angle BCD = \angle FAD$ [উভয় পক্ষ থেকে $\angle BAD$ বাদ দিয়ে]

বা, $\frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \angle FAD$

বা, $\angle ECB = \angle EAD$

এখন, $\angle EAB + \angle ECB$

$= \angle EAD + \angle BAD + \angle ECB$

$= \angle ECB + \angle BAD + \angle ECB$ [$\because \angle EAD = \angle ECB$]

$= \angle BAD + 2 \angle ECB$

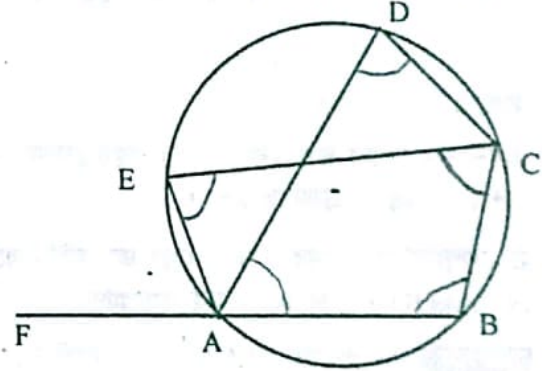
$= \angle BAD + \angle BCD$

$=$ দুই সমকোণ

সুতরাং $\angle EAB$ ও $\angle ECB$ কোণদ্বয় বিপরীত এবং সম্পূরক হওয়ায়,

$ABCE$ চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore E$ বিন্দু বৃত্তস্থ। (প্রমাণিত)



- ৩। $ABCD$ একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখন্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : $ABCD$ একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখন্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও

$\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$\triangle PAB$ এ $\angle P + \angle PAB + \angle PBA = 180^\circ$

$$\text{বা, } \angle P + \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle P + \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C = 180^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

[উভয় পক্ষে $\frac{1}{2} \angle C$ যোগ করে]

$$\text{বা, } \angle P + \frac{1}{2} (\angle A + \angle B + \angle C) = 180^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{বা, } \angle P + \frac{1}{2} 180^\circ = 180^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{বা } \angle P + 90^\circ = 180^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{বা } \angle P = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

এরূপে $\triangle ABD$ নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle Q = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle D$

AB একই চাপের উপর অবস্থিত বলে $\angle C = \angle D$

$$\therefore \angle Q = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{সুতরাং, } \angle P = \angle Q$$

এখন AB বৃত্তের চাপ এবং P ও Q বৃত্তস্থ কোণ। $\angle P = \angle Q$ অর্থাৎ, বৃত্তস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সমান হওয়ায় A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

8। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD জ্যা-দ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে যে কোনো বিন্দু P তে সমকোণে অর্থাৎ 90° কোণে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন : DO কে বর্ধিত করি। এটি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

C, E যোগ করি।

প্রমাণ : $\angle DCE =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে]

আবার, $\angle DPB =$ এক সমকোণ [কল্পনানুসারে]

$$\therefore \angle DCE = \angle DPB$$

কিন্তু কোণ দুইটি অনুরূপ কোণ বলে, $AB \parallel CE$

যেহেতু, সমান্তরাল সরলরেখা সমান চাপ উৎপন্ন করে

সেহেতু, AC চাপ = BE চাপ

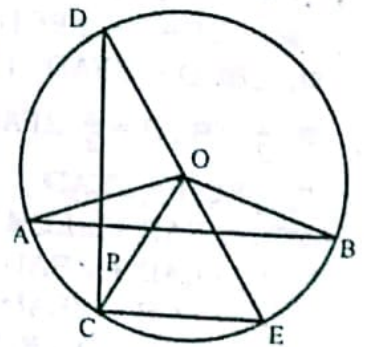
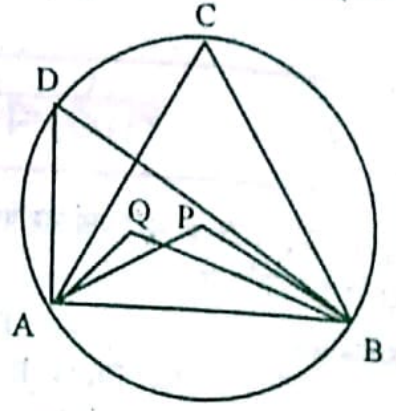
$$\therefore \angle AOC = \angle BOE$$

এখন, $\angle AOD + \angle AOC + \angle COE =$ এক সরলকোণ = দুই সমকোণ

$$\text{বা, } \angle AOD + \angle BOE + \angle COE = \text{দুই সমকোণ}$$

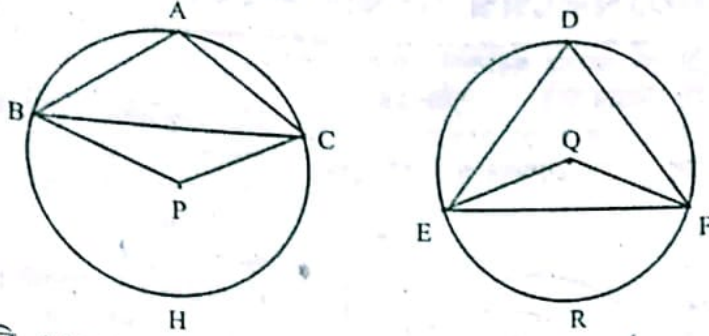
$$\text{বা, } \angle AOD + \angle BOC = \text{দুই সমকোণ}$$

$$\therefore \angle AOD + \angle BOC = \text{দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)}$$



৫। সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দুইটির ভূমি $BC = EF$, শিরঃকোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle A$ ও $\angle D$ । $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

প্রমাণ : P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BHC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BPC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$ বা $\angle A$

আবার, Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ERF চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle EQF$ এবং বৃত্তস্থ $\angle D$

$$\begin{aligned}\therefore \angle EQF &= 2 \angle D \\ \text{সুতরাং, } \angle BPC + \angle EQF &= 2 \angle A + 2 \angle D \\ &= 2 (\angle A + \angle D) \\ &= 2 \times 2 \text{ সমকোণ} \\ &= 4 \text{ সমকোণ।}\end{aligned}$$

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 4 সমকোণ এবং $BC = EF$ হওয়ায় BC দ্বারা ছিন্ন উপচাপ = EF দ্বারা ছিন্ন উপচাপ।

অর্থাৎ, BAC উপচাপ = ERF উপচাপ

এবং BHC অধিচাপ = EDF অধিচাপ।

অতএব, BAC চাপ + BHC চাপ = ERF চাপ + EDF চাপ

বা, $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্ত = $\triangle DEF$ এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৬। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$ ।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$ ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BC = CD$ ।

অঙ্কন : B, D যোগ করি।

প্রমাণ : ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore A, B, C, D$ বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। [\because চতুর্ভুজের দুই

বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে ইহার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত]

AC, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$ (i)

এখন, একই চাপ CD এর উপর বৃত্তস্থ $\angle DAC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DBC$ ।

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$ (ii) [\because বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান]

আবার, একই চাপ BC এর উপর বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং $\angle BDC$ ।

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$ [ঐ একই কারণে]

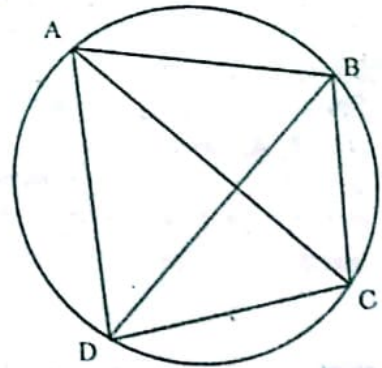
বা, $\angle DAC = \angle BDC$ [(i) নং থেকে]

বা, $\angle DBC = \angle BDC$ [(ii) নং থেকে]

অর্থাৎ $\triangle BCD$ এর

$\angle DBC = \angle BDC$

$\therefore BC = CD$ [সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান] (প্রমাণিত)



□ অনুশীলনী- ৮.৪

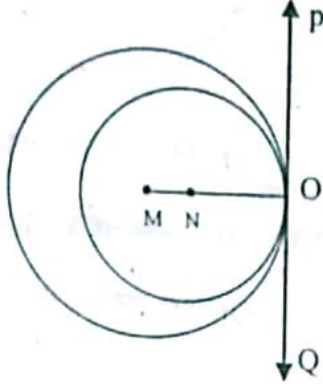
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

- কাজ : প্রমাণ কর যে, দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শকিন্দু সমরেখ হবে। [পৃষ্ঠা-১৪৫]

সমাধান : সাধারণ নির্বাচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শকিন্দু সমরেখ হবে।

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, M এবং N কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, M, N এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : O বিন্দুতে বৃত্ত দুটির সাধারণ স্পর্শক POQ আঁকি এবং O, M ও O, N যোগ করি।



প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১। M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে POQ স্পর্শক এবং MO \perp OP তদুপ ON \perp OP	[অঙ্কনানুসারে] [বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শকিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।] [১ নং হতে]
২। OM এবং ON উভয়ই POQ রেখার O বিন্দুতে লম্ব। \therefore OM এবং ON একই সরলরেখায় অবস্থিত। \therefore M, N এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ। [প্রমাণিত]	

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৮.৪

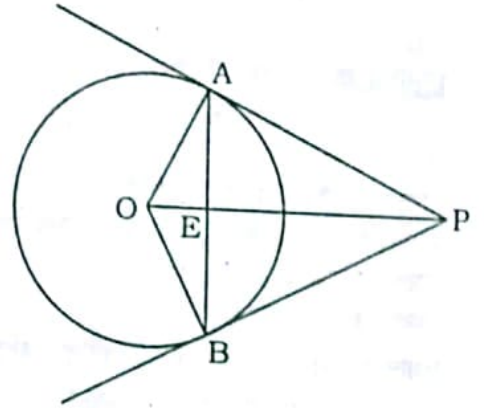
- ১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

সমাধান : সাধারণ নির্বাচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, P, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P থেকে বৃত্তটির উপর PA ও PB দুইটি স্পর্শক টানা হল। অতএব, AB তার স্পর্শ জ্যা।

মনে করি OP, AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB কে E বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।



প্রমাণ : (১) $\triangle OAP$ এবং $\triangle OBP$ দ্বয়ের মধ্যে,

$$OA = OB$$

$$PA = PB$$

এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$$\therefore \angle AOP = \angle BOP$$

$$\text{অর্থাৎ, } \angle AOE = \angle BOE$$

(২) $\triangle AOE$ এবং $\triangle BOE$ দ্বয়ের মধ্যে,

$$OA = OB$$

$$\angle AOE = \angle BOE$$

এবং OE সাধারণ বাহু

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore AE = BE$ অর্থাৎ E, AB এর মধ্যবিন্দু

[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

[বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান বলে]

[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

[পূর্বে প্রমাণিত]

এবং $\angle AEO = \angle BEO$

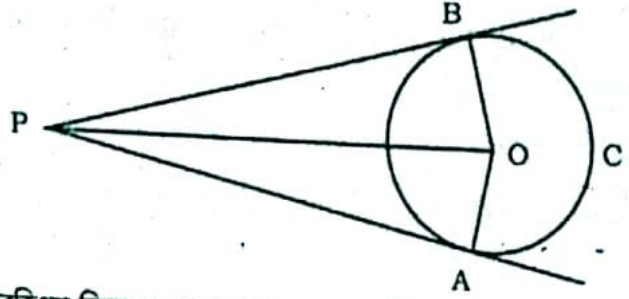
কিছু কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং একই সরলরেখায় অবস্থিত বলে প্রত্যেকে এক সমকোণ।
অর্থাৎ, $\angle AEO = \angle BEO =$ এক সমকোণ

\therefore OE বা OP, AB এর উপর লম্ব।

\therefore OP, AB কে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

২। দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করলে, প্রমাণ করতে হবে যে, PO, $\angle APB$ -কে সমদ্বিখন্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং এর বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক আঁকা হয়েছে। OP প্রমাণ করতে হবে যে, PO রেখা, $\angle APB$ -কে সমদ্বিখন্ডিত করে।
অর্থাৎ $\angle APO = \angle BPO$

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ : OA এবং OB স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সূত্রাং PA এবং PB যথাক্রমে OA এবং OB-এর উপর লম্ব।

[\therefore বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।]

সূত্রাং $\angle PAO =$ এক সমকোণ।

এবং $\angle PBO =$ এক সমকোণ।

এখন, $\triangle AOP$ এবং $\triangle BOP$ -এ $PA = PB$ [\therefore বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।]

$\therefore OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PAO =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle PBO$ [\therefore প্রত্যেকে এক সমকোণ।]

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle BOP$

সূত্রাং $\angle APO = \angle BPO$

অর্থাৎ PO রেখা, $\angle APB$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

৩। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC এবং PQR দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ABC বৃত্তটি বৃহত্তর। বৃহত্তর ABC বৃত্তের AB জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর PQR বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB জ্যা-টি স্পর্শ বিন্দু P তে সমদ্বিখন্ডিত হয়েছে অর্থাৎ P, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু বা $PA = PB$ ।

অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : PQR বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক AB এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

$\therefore AB \perp OP$

অর্থাৎ $\angle OPA = \angle OPB =$ এক সমকোণ।

[\therefore বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে লম্ব।]

এখন, সমকোণী $\triangle OAP$ এবং সমকোণী $\triangle OBP$ এ,

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OB [\therefore একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]

এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OBP$

[\therefore সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অন্য একটি অনুরূপ বাহু পরস্পর সমান।]

সূত্রাং, $PA = PB$

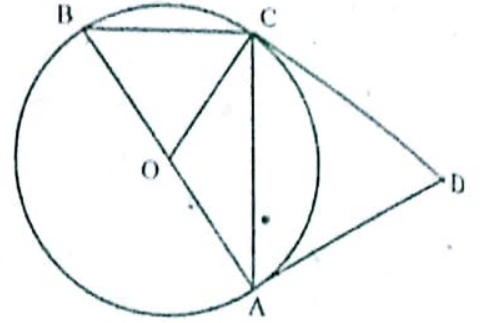
অর্থাৎ P, AB এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)



- ৪। AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং AB তার ব্যাস। OB ব্যাসার্ধের সমান BC একটি জ্যা। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় AD ও CD পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A, C যোগ করায় ACD ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



অঙ্কন : O, C যোগ করি

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 60^\circ$$

সুতরাং, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$ [ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান বলে]

$$\text{বা, } \angle AOC = 60^\circ + 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ$$

আবার, AO এবং OC স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়;

$$\angle DAO = \text{এক সমকোণ} = \angle DCO$$

সুতরাং, ADCO চতুর্ভুজে $\angle A + \angle C =$ দুই সমকোণ

$$\therefore \angle ADC + \angle AOC = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle ADC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

আবার, $AD = CD$ [\therefore বহিঃস্থ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]

$$\therefore \angle ACD = \angle CAD$$

এখন, $\triangle ADC$ -এ, $\angle ADC = 60^\circ$

অপর কোণদ্বয় সমান হওয়ায় প্রত্যেকটি কোণ 60°

অতএব, $\triangle ACD$ সমবাহু। (প্রমাণিত)

- ৫। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তারা পরস্পর সম্পূরক।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট PQRS বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD। AB, BC, CD ও DA-বাহুগুলো বৃত্তকে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ এবং $\angle AOB + \angle COD =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন : P, O; Q, O; R, O; S, O যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু A বিন্দু থেকে AP ও AS বৃত্তের দুইটি স্পর্শক।

$$\therefore AP = AS$$

$$\therefore \angle AOS = \angle AOP \dots (i)$$

[\therefore বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে কোনো বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান এবং তারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।]

অনুরূপভাবে, $\angle DOS = \angle DOR \dots (ii)$

$$\angle COQ = \angle COR \dots (iii)$$

$$\text{এবং } \angle BOQ = \angle BOP \dots (iv)$$

এখন, (i), (ii), (iii) ও (iv) নং যোগ করে পাই,

$$\angle AOS + \angle DOS + \angle COQ + \angle BOQ = \angle AOP + \angle DOR + \angle COR + \angle BOP$$

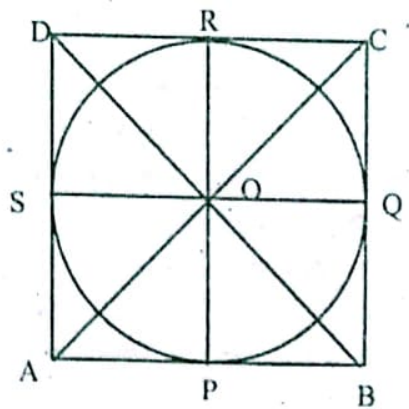
$$\text{বা, } \angle AOD + \angle BOC = \angle AOP + \angle BOP + \angle DOR + \angle COR$$

$$\text{বা, } \angle AOD + \angle BOC = \angle AOB + \angle COD$$

যেহেতু $(\angle AOD + \angle BOC) + (\angle AOB + \angle COD) =$ চার সমকোণ।

সুতরাং, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ

এবং $\angle AOB + \angle COD =$ দুই সমকোণ (প্রমাণিত)



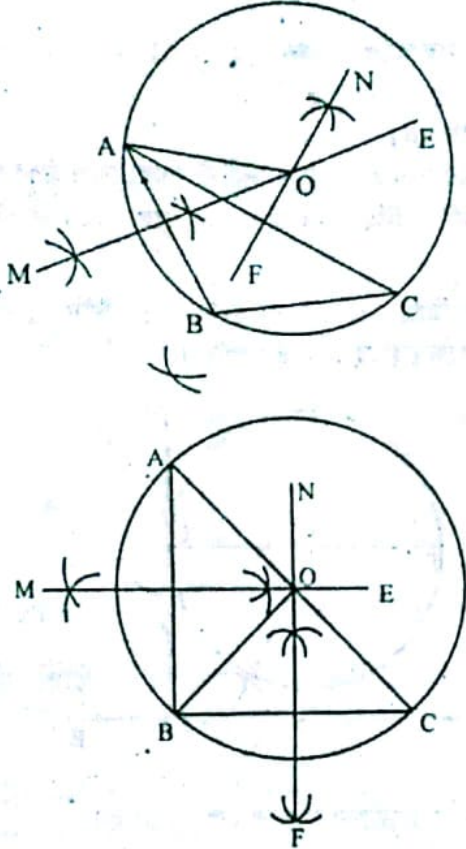
□ অনুশীলনী- ৮.৫

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-৫: মূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। [পৃষ্ঠা-১৪৭]

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : মূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ১নং চিত্রে মূলকোণী ত্রিভুজ এবং ২নং চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

১। AB ও BC রেখাংশের লম্বদ্বিখলক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

২। B, O যোগ করি। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি Q, B ও C বিন্দু দিয়ে গেল। এই বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : O, A এবং O, C যোগ করি।

O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখলকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore OA = OB$

তদুপ, $OB = OC$

$\therefore OA = OB = OC$

\therefore O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে।

\therefore এই বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্ত।

লক্ষণীয় যে, মূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিবেশিত ত্রিভুজের অভ্যন্তরে, মূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিবেশিত ত্রিভুজের বহির্ভাগে এবং সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিবেশিত ত্রিভুজের ওপর অবস্থিত।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৫

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

- বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব
- অর্ধবৃত্তস্থ কোনো এক সমকোণ
- বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii

খ i ও iii

গ ii ও iii

ঘ i, ii ও iii

উত্তর : ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্র অনুযায়ী ২ ও ৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



২। $\angle BOD$ এর পরিমাণ হবে-

ক $\frac{1}{2} \angle BAC$

খ $\frac{1}{2} \angle BAD$

গ $\frac{1}{2} \angle BAC$

ঘ $\frac{1}{2} \angle BAD$

উত্তর : ঘ) $2 \angle BAD$

৩। বৃত্তটি ABC ত্রিভুজ -

ক অন্তবৃত্ত

খ পরিবৃত্ত

গ বহিঃবৃত্ত

ঘ উপবৃত্ত

উত্তর : খ) পরিবৃত্ত

৪। কোনো বৃত্তের অধিচাপে অঙ্কিত কোণ-

ক সূক্ষ্মকোণ

খ সমকোণ

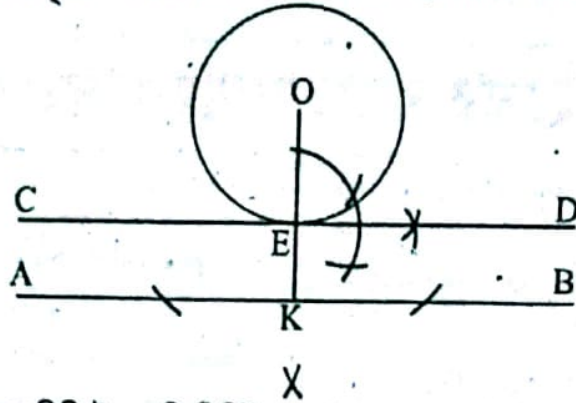
গ মূলকোণ

ঘ পূরককোণ

উত্তর : ক) সূক্ষ্মকোণ

৫। কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা দেয়া আছে। বৃত্তটিতে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা AB সরলরেখার সমান্তরাল।

অঙ্কন : O বিন্দু থেকে AB এর উপর OK লম্ব আঁকি।

মনে করি, অঙ্কিত লম্ব বৃত্তটিকে E বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। E বিন্দুতে CD লম্ব আঁকি। এখন $CD \parallel AB$ ।

সুতরাং CD-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

৬। কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এ বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা AB এর উপর লম্ব হয়।

অঙ্কন : AB এর উপর E একটি বিন্দু নেই। O, E যোগ করি। O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল POR টানি। POR বৃত্তের পরিধিকে R বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, R বিন্দুতে CD স্পর্শক আঁকি। তাহলে CD-ই উদ্দিষ্ট স্পর্শক।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে $PR \parallel AB$

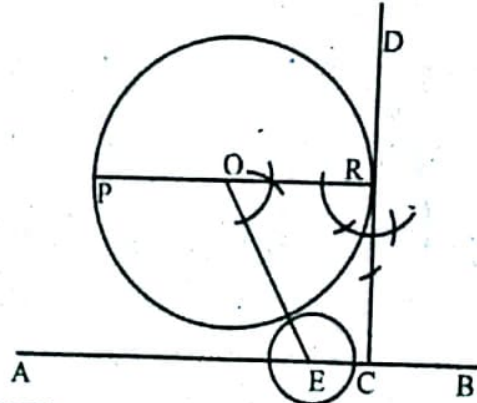
$\therefore \angle PRC = \angle RCB$ [একান্তর কোণ বলে]

কিন্তু, CR স্পর্শক হওয়ায় $\angle PRC =$ এক সমকোণ

সুতরাং, $\angle RCB =$ এক সমকোণ।

$\therefore RC, AB$ এর উপর লম্ব।

অতএব, RC বা CD উদ্দিষ্ট স্পর্শক। (প্রমাণিত)



৭। কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত। ABD বৃত্তে এরূপ দুটি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

অঙ্কন : OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই। $\angle AOB = 120^\circ$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটির সাথে B বিন্দুতে মিলিত হয়। OB রেখার উপর B বিন্দুতে এবং OA রেখার ওপর A বিন্দুতে দুটি লম্ব টানি। মনে করি, এই লম্ব রশ্মিদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হয়।

তাহলে, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle ACB = 60^\circ$

প্রমাণ : চতুর্ভুজ OACB এর, $\angle AOB = 120^\circ$

$\angle OBC = 90^\circ$

এক $\angle OAC = 90^\circ$

এখন, চতুর্ভুজ OACB এর,

$\angle ACB + \angle AOB + \angle OAC + \angle OBC = 360^\circ$

বা, $\angle ACB + 120^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

অ, $\angle ACB = 360^\circ - 300^\circ$

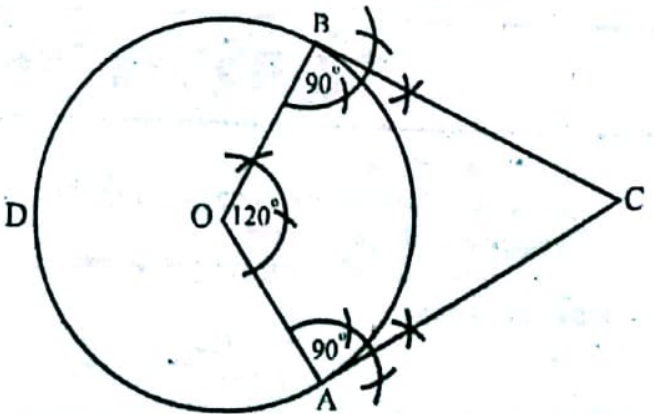
$\therefore \angle ACB = 60^\circ$

[অঙ্কন অনুসারে]

[$\therefore OB \perp BC$]

[$\therefore OA \perp AC$]

[\therefore চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি 360°]



আবার, প্রদত্ত বৃত্তের OB ব্যাসার্ধ এবং পরিধি B বিন্দুতে $BC \perp OB$
 $\therefore BC$ স্পর্শক।

তদুপ, প্রদত্ত বৃত্তের OA ব্যাসার্ধ এবং পরিধি A বিন্দুতে $AC \perp OA$.
 $\therefore AC$ স্পর্শক।

অতএব, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60^\circ$. (প্রমাণিত)

৮। 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : 3 সে. মি., 4 সে. ও 4.5 সে. মি বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের $BC = 4.5$ সে. মি, $AB = 4$ সে. মি. এবং $AC = 3$ সে.মি.।

ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে এবং তিনটি ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন : AB ও AC বাহুর লম্বদ্বিখন্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখা আঁকি। তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। পরিশেষে O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : A, O; B, O এবং C, O যোগ করি।

O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

$\therefore OA = OB$, একইভাবে, $OA = OC$

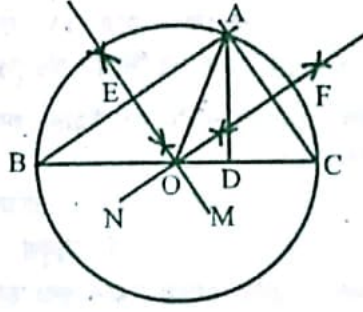
$\therefore OA = OB = OC$

সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, এই বৃত্তটিই $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

ব্যাসার্ধ নির্ণয় : অঙ্কন শেষে স্কেল দিয়ে OA এর দৈর্ঘ্য মাপে নিলাম। $OA = 2.75$ সে. মি. পাওয়া গেল।

\therefore নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = 2.75 সে. মি.।



৯। 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : 5 সে. মি, বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর CA বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি.। এই ত্রিভুজের CA বাহুকে স্পর্শ করে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন : BC ও BA বাহুকে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle DCA$ এবং $\angle FAC$ এর সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে CM ও AN রশ্মি আঁকি এবং মনে করি, তারা E বিন্দুতে ছেদ করে। E থেকে AC এর উপর EH লম্ব আঁকি। পরিশেষে E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ : E হতে BD ও BF এর উপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি।

E বিন্দুটি $\angle DCA$ এর সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

$\therefore EH = EG$, একইভাবে, $EH = EL$

$\therefore EH = EG = EL$

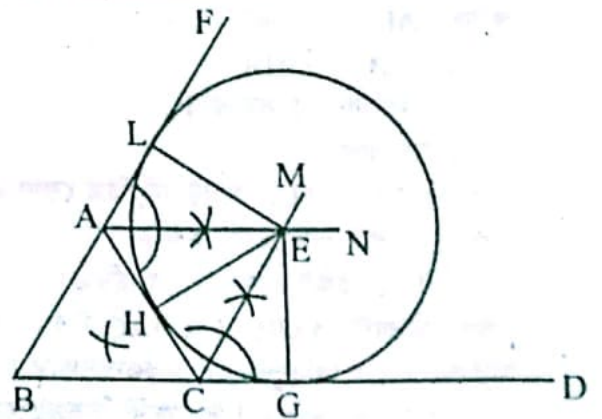
সুতরাং, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EG ও EL এর একটি প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে CA, CD এবং AF রেখাংশ তিনটি লম্ব।

সুতরাং, বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।

অতএব, HGL বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত হবে। (প্রমাণিত)

- a 4.5 সে.মি.
 b 4 সে.মি.
 c 3 সে.মি.



১০। একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

সাধারণ নির্বচন : একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গ। এই বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন : A, C এবং B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে AB এর উপর OE লম্ব টানি। O কে কেন্দ্র করে OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুকে যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুতে স্পর্শ করে।

তাহলে, EFGH -ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

আবার, O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এই বৃত্ত ABCD বর্গের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : যেহেতু বর্গের কর্ণ ইহার কোণগুলিকে সমদ্বিখলিত করে এবং O বিন্দু হতে AB, BC, CD, DA বাহুর দূরত্ব (লম্বদূরত্ব) সমান।

যেহেতু, O কে কেন্দ্র করে OE ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি AB, BC, CD, DA বাহুকে স্পর্শ করবে।

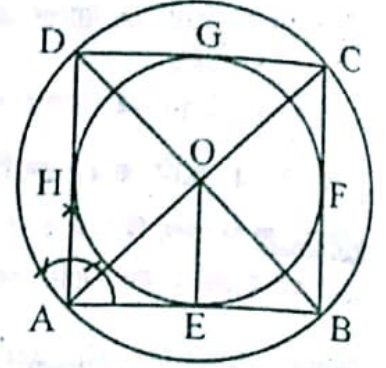
অতএব, EFGH -ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

আবার, বর্গের কর্ণদ্বয় সমান এবং তারা পরস্পরকে সমদ্বিখলিত করে।

সুতরাং, $OA = OB = OC = OD$

সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C, D বিন্দু দিয়ে যায়।

অতএব, ABCD -ই নির্ণেয় পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)



১১। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

সাধারণ নির্বচন : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমদ্বিবাহু $\triangle ABC$ এর ভূমি BC এবং $AB = AC$. AB এবং AC কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত আঁকা হল। বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, D, BC এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ : AB বৃত্তের ব্যাস এবং বৃত্তটি D বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore \angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

অর্থাৎ $\angle ADB = 1$ সমকোণ

আবার, AC বৃত্তের ব্যাস এবং বৃত্তটি D বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore \angle ADC =$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

অর্থাৎ $\angle ADC = 1$ সমকোণ

$\therefore \angle ADB + \angle ADC$

$= 1$ সমকোণ $+ 1$ সমকোণ

$= 2$ সমকোণ।

$\angle ADB$ এবং $\angle ADC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ। সুতরাং কোণদ্বয়ের বহিঃস্থ বাহু যথাক্রমে BD এবং CD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore B, D, C$ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এখন সমকোণী $\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$ এ

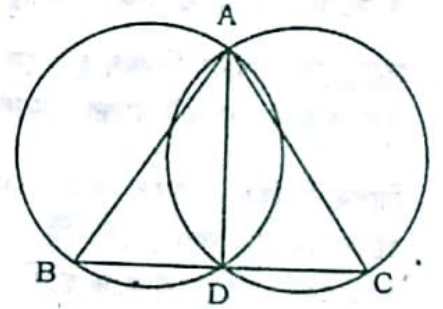
অতিভুজ $AB =$ অতিভুজ AC [কল্পনানুসারে] এবং, AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ [সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং একটি বাহু সমান]

সুতরাং, $BD = CD$

যেহেতু D, BC সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু এবং $BD = CD$

সেহেতু D, BC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)



১২। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী $\triangle ABC$ এর $\angle ACB = 90^\circ$ এক সমকোণ এবং অতিভুজ = AB এবং O অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু। অতিভুজের বিপরীত শীর্ষবিন্দু C এবং OC যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, $OC = \frac{1}{2} AB$ ।

অঙ্কন : O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ তথা AB কে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত আঁকি।

প্রমাণ : বৃত্তের ব্যাস = AB [অঙ্কন অনুসারে]

এবং, $\angle ACB = 90^\circ$ এক সমকোণ [কল্পনানুসারে]

$\therefore \angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

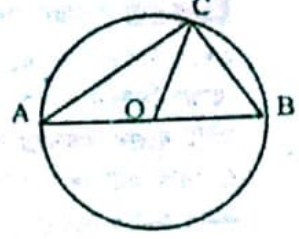
সুতরাং, C বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত বা বৃত্তস্থ বিন্দু।

এখন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তে, $OA = OB = OC$ [\because একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

আবার, $AB = OA + OB$

বা, $AB = OC + OC$ বা, $AB = 2OC$

$\therefore OC = \frac{1}{2} AB$. (প্রমাণিত)



১৩। ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ : ABD বৃত্তে, AB ব্যাস এবং $\angle ADB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ সমকোণ

আবার, AD রশ্মির প্রান্তবিন্দু D -তে BC সরলরেখা মিলিত হয়েছে। ফলে $\angle ADB$ এবং $\angle ADC$ সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

$\therefore \angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$ সমকোণ।

বা, $\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB$

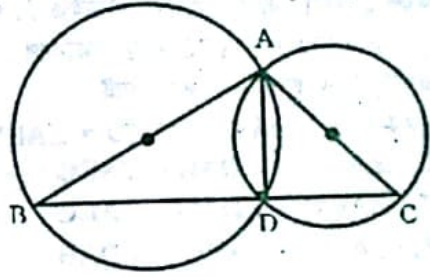
বা, $\angle ADC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ সমকোণ।

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$ সমকোণ

আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ

সুতরাং, $\angle ADC$ এমন একটি বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ যার ব্যাস AC ।

সুতরাং AC ব্যাস দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে। (প্রমাণিত)



১৪। AB ও CD একই বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, চাপ AC = চাপ BD ।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : AB ও CD একই বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, চাপ AC = চাপ BD ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABDC$ বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা AB ও CD । প্রমাণ করতে হবে যে, চাপ AC = চাপ BD ।

অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ : $AB \parallel CD$, AD উহাদের ছেদক।

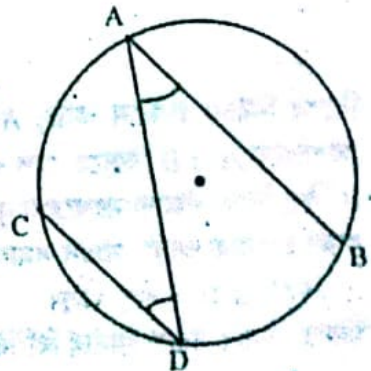
$\therefore \angle BAD = \angle ADC$ ।

কিন্তু এরা $ABDC$ বৃত্তে যথাক্রমে BD ও AC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ।

আমরা জানি, যেসব চাপ বৃত্তে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তারা পরস্পর সমান।

\therefore চাপ BD = চাপ AC ।

সুতরাং, চাপ AC = চাপ BD . (প্রমাণিত)



১৫। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD একটি বৃত্ত। AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, D; O, B ও O, C যোগ করা হল। AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে $\angle AOC$ এবং $\angle BOD$ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

অংকন : A, D এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ : বৃত্তের AC চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$.

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$$

$$\text{বা, } \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC \dots\dots\dots(ii)$$

আবার, বৃত্তের BD চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$.

$$\therefore \angle BOD = 2\angle DAB$$

$$\text{বা, } \angle DAB = \frac{1}{2} \angle BOD \dots\dots\dots(ii)$$

এখন, $\triangle ADE$ -এ,

$$\angle ADE + \angle DAE + \angle AED = 2 \text{ সমকোণ} \dots\dots\dots(iii)$$

AE রশ্মির প্রান্ত বিন্দু E, CD সরলরেখায় মিলিত হয়েছে।

ফলে $\angle AED$ এবং $\angle AEC$ সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

$$\therefore \angle AED + \angle AEC = 2 \text{ সমকোণ} \dots\dots\dots(iv)$$

এখন, (iii) এবং (iv) থেকে পাই,

$$\angle ADE + \angle DAE + \angle AED = \angle AED + \angle AEC$$

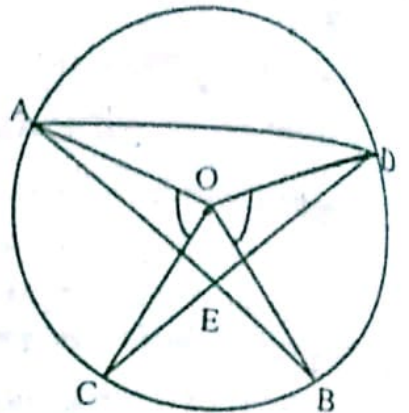
$$\text{বা, } \angle ADE + \angle DAE = \angle AEC \quad [\text{উভয়পক্ষ থেকে } \angle AED \text{ বাদ দিয়ে}]$$

$$\text{বা, } \angle ADC + \angle DAB = \angle AEC$$

$$\text{বা, } \angle AEC = \angle ADC + \angle DAB$$

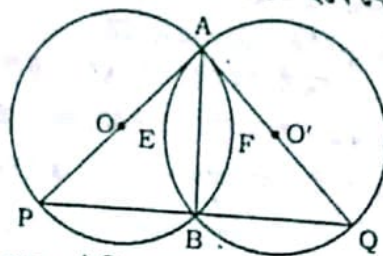
$$\text{বা, } \angle AEC = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle BOD \quad [(i) \text{ এবং } (ii) \text{ নং এর সাহায্যে}]$$

$$\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC). \quad (\text{প্রমাণিত})$$



১৬। দুইটি সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : দুইটি সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, APB ও AQB দুইটি সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত। বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র O ও O'। বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং AB বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে যে, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ : আমরা জানি, সমান সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে।
 \therefore চাপ AEB = চাপ AFB

আবার, সমান সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

সমান সমান চাপ AFB এবং AEB এর উপর সমজায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে,

$$\angle APB \text{ এবং } \angle AQB$$

$$\therefore \angle APB = \angle AQB$$

$$\text{বা, } \angle APQ = \angle AQP$$

এখন, $\triangle PAQ$ -এ

$$\angle APQ = \angle AQP$$

$$\therefore AP = AQ$$

$\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু। (\because সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান।)

১৭। O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB = x সে.মি. OD \perp AB পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক) বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

গ) OD = $\left(\frac{x}{2} - x\right)$ সে.মি. হলে x মান নির্ণয় কর।



সমাধানঃ

ক) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ OB = r = 10 cm

আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$$= 3.1416 \times (10)^2$$

$$= 3.1416 \times 100$$

$$= 314.16 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অতএব, বৃত্তটির ক্ষেত্রফল 314.16 বর্গ সে.মি.।

খ) O, A যোগ করি, যেহেতু OD, AB এর উপর লম্ব।

$$\therefore \angle ODA = \angle ODB = \text{এক সমকোণ।}$$

অতএব $\triangle ODA$ ও $\triangle ODB$ উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

এখন, $\triangle ODA$ এবং $\triangle ODB$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে।]

এবং OD বাহু সাধারণ

$$\therefore \triangle ODA \cong \triangle ODB$$

$$\text{অতএব } AD = BD$$

$$\text{যেহেতু } AD = BD$$

$$\therefore D, AB \text{ এর মধ্যবিন্দু (দেখানো হলো)।}$$

গ) ABC বৃত্তে ব্যাসার্ধ OB = r = 10 cm এবং AB = x দেওয়া আছে। AB এর উপর OD লম্ব ফলে, OBD একটি

সমকোণী ত্রিভুজ হলো। AB = x তাহলে, $BD = \frac{x}{2}$ [খ হতে]

এখন, OBD সমকোণী ত্রিভুজের থেকে পীথাগোরাসের সূত্র হতে পাই,

$$OB^2 = OD^2 + BD^2$$

$$\text{বা, } (10)^2 = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad [\text{যেহেতু } OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)]$$

$$\text{বা, } 100 = \frac{x^2}{4} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 + 2^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$\text{বা, } 100 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2x + 4$$

$$\text{বা, } 100 = \frac{2x^2}{4} - 2x + 4$$

$$\text{বা, } \frac{2x^2}{4} - 2x + 4 = 100$$

$$\text{বা, } \frac{2x^2}{4} - 2x + 4 - 100 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x^2}{2} - 2x - 96 = 0$$

I ❤️ MyMahbub

$$\text{বা, } x^2 - 4x - 192 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 16)(x + 12) = 0$$

$$x - 16 = 0 \quad \text{অথবা, } x + 12 = 0$$

$$\therefore x = 16 \quad \therefore x = -12, \text{ যা গ্রহণযোগ্য নয়।}$$

সুতরাং x এর নির্ণেয় মান 16 সে.মি.

১৮। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি. ও 6 সে.মি.।

ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ) ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।

সমাধান:

ক) মনে করি, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$ এবং $c = 6\text{cm}$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আকতে হবে।

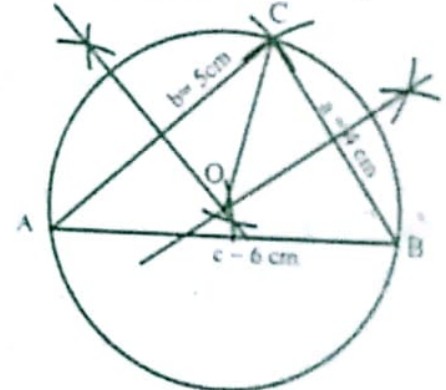
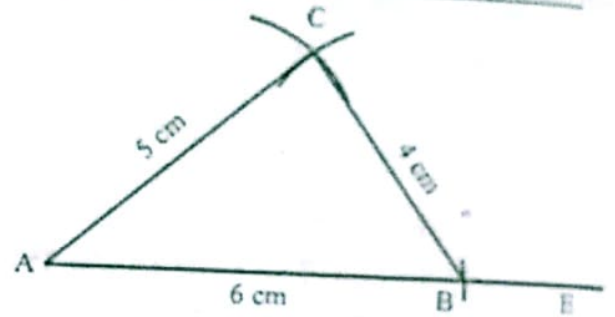
অঙ্কন :

যেকোনো রশি AE নেই AE থেকে $c = 6\text{cm}$ সমান করে AB অংশ কাটি। এখন AB এর A ও B কে কেন্দ্র করে AB এর একই পাশে b ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

$$a = 4 \text{ সে.মি.}$$

$$b = 5 \text{ সে.মি.}$$

$$c = 6 \text{ সে.মি.}$$



খ) ABC একটি ত্রিভুজ যার পরিবৃত্ত আকতে হবে।

অঙ্কন :

ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করে বর্ধিত করলে তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O, B যোগ করি। এখন OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। যা নির্ণেয় ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত হলো।

গ) ABC বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু P এবং PM ও PN রেখাংশ বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক। দেখাতে হবে স্পর্শক দ্বারা দূরত্ব অর্থাৎ $PM = PN$

অঙ্কন : OM ও ON যোগ করি এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : PM ও PN স্পর্শক এবং OM ও ON

যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ

$\therefore \angle PMO = \angle PNO =$ একসমকোণ।

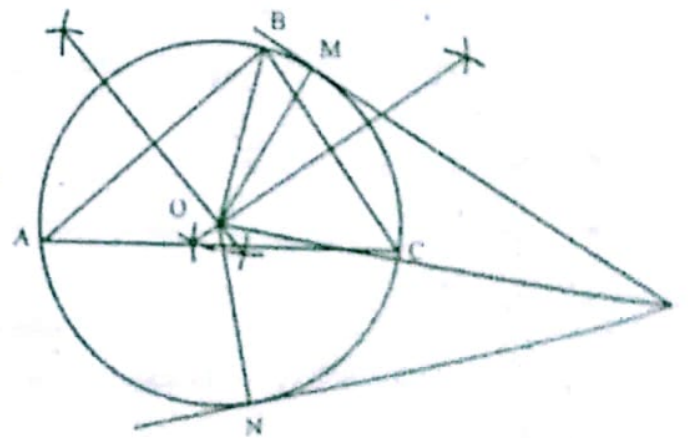
এখন $\triangle POM$ ও $\triangle PON$ সমকোণী ত্রিভুজে

অতিভুজ PO সাধারণ বাহু।

এক $OM = ON$

$\therefore \triangle POM \cong \triangle PON$

$\therefore PM = PN$ (দেখানো হলো)



□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা

- সূক্ষ্মকোণে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে 30° , 45° , 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- 0° ও 90° কোণের অর্ধপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



□ ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

i. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ii. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

মন্তব্য : পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $(\sin^n\theta)$, $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

iii. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 1$ iv. $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

v. $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 1$ vi. $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

□ গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলির প্রমাণ

(i) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

প্রমাণ : বামপক্ষ = $\sin^2\theta + \cos^2\theta$
 $= (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$
 $= \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$
 $= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$
 $= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2}$

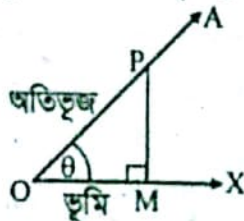
কিন্তু POM সমকোণী ত্রিভুজে OP অতিভুজ।

সুতরাং $OP^2 = PM^2 + OM^2$

[\because OPM সমকোণী ত্রিভুজে, অতিভুজ^২ = লম্ব^২ + ভূমি^২]

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \frac{OP^2}{OP^2}$

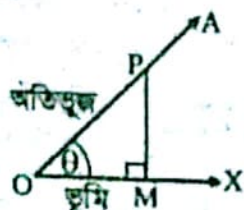
$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (প্রমাণিত)



(ii) প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

প্রমাণ : বামপক্ষ = $(\sec\theta)^2$
 $= \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$
 $= \frac{OP^2}{OM^2}$



$= \frac{PM^2 + OM^2}{OM^2}$

[\because অতিভুজ^২ = লম্ব^২ + ভূমি^২]

$= \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$

$= (\tan\theta)^2 + 1$ [$\because \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan\theta$]
 $= 1 + \tan^2\theta$

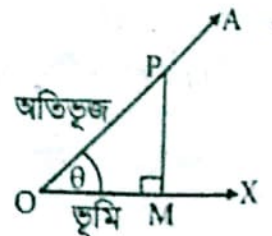
$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (প্রমাণিত)

(iii) প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

প্রমাণ : বামপক্ষ = $\operatorname{cosec}^2\theta$
 $= (\operatorname{cosec}\theta)^2$
 $= \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$
 $= \frac{OP^2}{PM^2}$
 $= \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$



[\because অতিভুজ^২ = লম্ব^২ + ভূমি^২]

$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$

$= 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$

$= 1 + (\cot\theta)^2$ [$\because \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \cot\theta$]

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

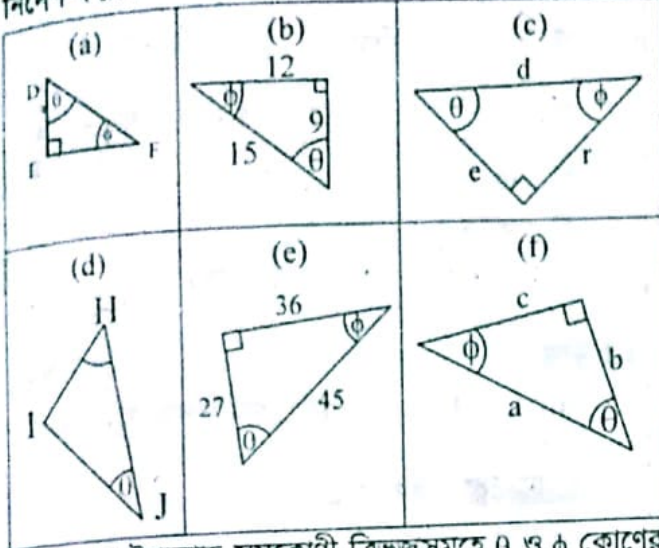
$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ (প্রমাণিত)

□ অনুশীলনী- ৯.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

১। θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ করে।

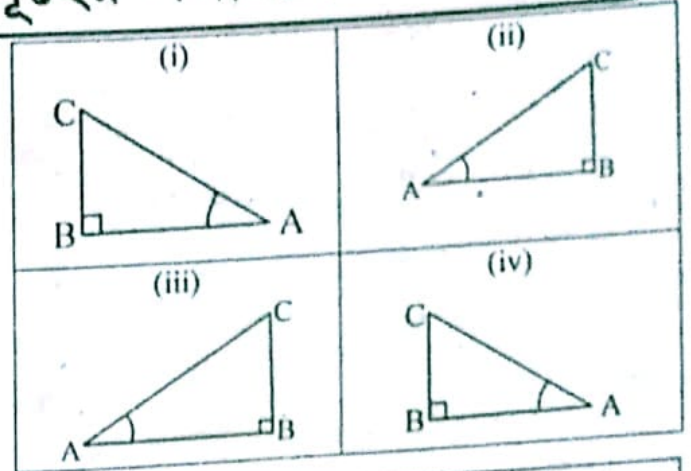


সমাধান : উপরোক্ত সমকোণী ত্রিভুজসমূহে θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু দেখানো হলো—

θ কোণের জন্য	ϕ কোণের জন্য
(a) (ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ FD বিপরীত বাহু EF সন্নিহিত বাহু DE।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ DF বিপরীত বাহু DE সন্নিহিত বাহু EF।
(b) (ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ 15 বিপরীত বাহু 12 সন্নিহিত বাহু 9।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ 15 বিপরীত বাহু 9 সন্নিহিত বাহু 12।
(c) (ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ d বিপরীত বাহু r সন্নিহিত বাহু e।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ d বিপরীত বাহু e সন্নিহিত বাহু r।
(d) (ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ HJ বিপরীত বাহু HI সন্নিহিত বাহু IJ।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ HJ বিপরীত বাহু IJ সন্নিহিত বাহু HI।
(e) (ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ 45 সন্নিহিত বাহু 27 বিপরীত বাহু 36।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ 45 সন্নিহিত বাহু 36 বিপরীত বাহু 27।
(f) (ক) θ কোণের জন্য অতিভুজ a সন্নিহিত বাহু b বিপরীত বাহু c।	(খ) ϕ কোণের জন্য অতিভুজ a সন্নিহিত বাহু c বিপরীত বাহু b।

□ কাজ :

২। নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর?



বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/AC	AB/AC	BC/AB

সমাধান : প্রদত্ত চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সেটি. মিটারে মেপে সারণি পূরণ করা হলো এবং এদের অনুপাতগুলোর সম্পর্ক নির্ণয় করা হলো—

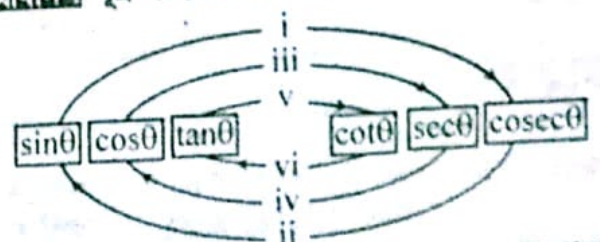
বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/AC	AB/AC	BC/AB
1.8 cm	3 cm	3.5 cm	18/35	6/17	3/5
0.8 cm	1.3 cm	1.5 cm	8/15	13/15	8/13
3.7 cm	6 cm	7 cm	37/70	6/7	37/60
1 cm	1.8 cm	2 cm	1/2	9/10	5/9

□ কাজ :

৩। নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা তৈরি কর।

$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$
$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$		$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$

সমাধান : সূত্র মনে রাখার উপায় :



উপরের চিত্রটির তীর চিহ্ন ভালোভাবে লক্ষ করে নিম্নলিখিত সূত্রের তালিকা তৈরি করা হলো—

$$i) \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$ii) \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$iii) \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$iv) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$v) \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$vi) \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$vii) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$viii) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$ix) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$x) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$xi) \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$xii) \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$xiii) \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$xiv) \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1$$

$$xv) \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$xvi) \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$xvii) \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

□ কাজ

[পৃষ্ঠা- ১৫৭]

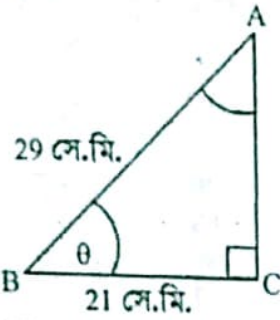
৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 29$ সে.মি. এবং $BC = 21$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ এর মান বের কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 29$ সে.মি, $BC = 21$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$

$$\text{আমরা জানি, } \cos \angle ABC = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{21}{29}$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta = \frac{441}{841}$$



$$\text{আবার, } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি : } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{441}{841} - \frac{400}{841} = \frac{41}{841} \text{ (Ans.)}$$

□ কাজ

[পৃষ্ঠা- ১৬০]

৫। $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\cos^4 A - \cot^2 A = 1$

এখন, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

বা, $\cot^4 A = 1 + \cot^2 A$

বা, $\cot^4 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$$\text{বা, } \frac{\cos^4 A}{\sin^4 A} = \frac{1}{\sin^2 A}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos^4 A}{\sin^2 A} = 1 \text{ [উভয়পক্ষকে } \sin^2 A \text{ দ্বারা গুণ করে।]}$$

$$\text{বা, } \cos^4 A = \sin^2 A$$

$$\text{বা, } \cos^4 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\therefore \cos^4 A + \cos^2 A = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

□ কাজ

[পৃষ্ঠা- ১৬০]

৬। $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

এখন, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

$$\text{বা, } \sin^4 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\text{বা, } \sin^4 A = \cos^2 A$$

$$\text{বা, } \frac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^4 A} \text{ [উভয় } \cos^4 A \text{ পক্ষকে দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } \tan^4 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

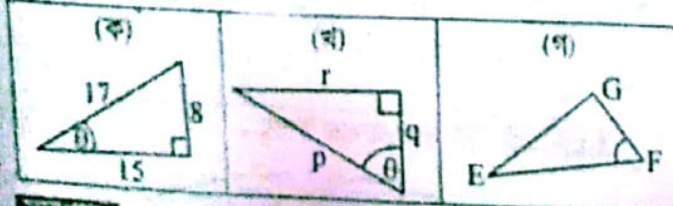
$$\text{বা, } \tan^4 A = \sec^2 A$$

$$\text{বা, } \tan^4 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\therefore \tan^4 A - \tan^2 A = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

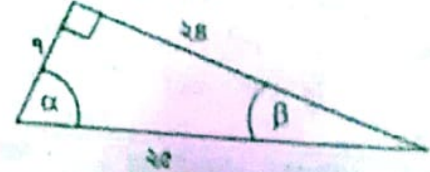
উদাহরণ- ১। θ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু চিহ্নিত কর।



সমাধান:

(ক)	(খ)	(গ)
অতিভুজ 17 একক	অতিভুজ p	অতিভুজ EF
বিপরীত বাহু 8 একক	বিপরীত বাহু q	বিপরীত বাহু FG
সন্নিহিত বাহু 15 একক	সন্নিহিত বাহু p	সন্নিহিত বাহু EG

উদাহরণ- ২। α ও β কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



সমাধান:

ক	কোণের জন্য	অতিভুজ	বিপরীত বাহু	সন্নিহিত বাহু
১	α	25 একক	7 একক	24 একক
২	β	25 একক	24 একক	7 একক

$$\text{বামপক্ষ} = a^2 - b^2$$

$$= (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$$

$$= 4 \tan A \sin A$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 A \sin^2 A}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 A (1 - \cos^2 A)}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A \cdot \cos^2 A}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 A - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cdot \cos^2 A}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A}$$

$$= 4 \sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$$

$$= 4 \sqrt{ab} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ-১১১ $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় করা হবে।

$$\text{দেওয়া আছে, } \sec A + \tan A = \frac{5}{2}$$

$$\text{আমরা জানি, } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\text{বা, } \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\text{বা, } (\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$$

$$\text{বা, } \frac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1 \quad [(i) \text{ হতে}]$$

$$\therefore \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৯.১

১। নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য মিথ্যা যাচাই কর।
তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা ১ এর চেয়ে কম।

সমাধান : $\tan A$ এর মান সর্বদা ১ এর চেয়ে কম এটা সত্য নয়। কারণ আমরা জানি, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ যেহেতু, বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা অঋণাত্মক, সুতরাং $\tan^2 A$ এর মান অঋণাত্মক হবে। এদের বিয়োগ ফল = ১ অতএব $\tan A$ এর মান ১ অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। $\tan A$ এর মান +১ অপেক্ষা বৃহত্তর কিংবা -১ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। অর্থাৎ তার মান হবে $(-1 \leq \tan A \leq 1)$ ।

খ) $\cot A$ হলো \cot ও A এর গুণফল।

সমাধান : উক্তিটি সত্য নয়। কারণ $\cot A$ প্রতীকটি θ কোণের কোট্যানজেন্ট এর অনুপাতকে বোঝায় \cot ও A এর গুণফলকে নয়। A বাদে \cot আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

গ) A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$?

সমাধান : A এর যেকোনো মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$, উক্তিটি সত্য। কারণ : আমরা জানি, $\sec A$ হলো $\cos A$ -এর বিপরীত অনুপাত এবং $\cos A$ -এর মান ০ থেকে ১ এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যা হতে পারে। তাই $\sec A$ এর মান ১ থেকে বড় যেকোনো সংখ্যা $\frac{12}{5}$ হতে পারে।

ঘ) \cos হলো Cotarigent এর সঙ্ক্ষিপ্ত রূপ।

সমাধান : বাক্যটি মিথ্যা, কারণ \cos হলো সমকোণী ত্রিভুজের $\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$

$\therefore \cos$ হলো cosine এর সঙ্ক্ষিপ্ত রূপ।

২। $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = ৩

এবং অতিভুজ = ৪

$$\therefore \text{সন্নিহিত বাহু} = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{16 - 9}$$

$$= \sqrt{7}$$

$$2 + \sqrt{3}$$

$$\text{সুতরাং } \cos A = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \cot A = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\tan A = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} \operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}, \sec A = \frac{4}{2 + \sqrt{3}}$$

৩। দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$

$$\text{বা } \cot A = \frac{8}{15}$$

অতএব A কোণের বিপরীত বাহু = ১৫

সন্নিহিত বাহু = ৮

$$\therefore \text{অতিভুজ} = \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{225 + 64}$$

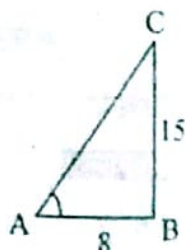
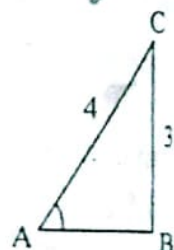
$$= \sqrt{289}$$

$$= 17$$

$$\text{এখন, } \sin A = \frac{15}{17} \text{ এবং } \sec A = \frac{17}{8} \text{ (Ans.)}$$

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 13$ সে.মি. $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin \theta$, $\cos \theta$ ও $\tan \theta$ এর মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C =$ সমকোণ $AB = 13$ সে.মি.



$BC = 12$ সে.মি. $\angle ABC = \theta$

$\triangle ABC$ -এ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = AB^2 - BC^2$

বা, $AC = \sqrt{13^2 - 12^2}$

বা, $AC = \sqrt{169 - 144}$

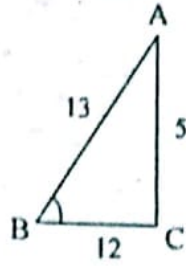
বা, $AC = \sqrt{25}$

$\therefore AC = 5$ সে.মি.

এখন, $\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$

$\cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$

$\tan \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ (Ans.)



- ৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3} \sin A \cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান :

মনে করি, ABC সমকোণী

ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$ সমকোণ

$\angle BAC = A$, $\tan A = \sqrt{3}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\sqrt{3} \sin A \cos A = \frac{3}{4}$

এখন, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$

$\therefore BC = \sqrt{3}$ এবং $AB = 1$

আমরা জানি, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 1^2 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

$\therefore AC = 2$

$\therefore \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

বামপক্ষ = $\sqrt{3} \sin A \cos A$

$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রমাণ কর যে, ৬-২০

৬। i) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A}$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

সমাধান :

বামপক্ষ = $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$

$= 1$ [$1 - \cos^2 A = \sin^2 A$]

$= 1 = \text{R.H.S}$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৭। i) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A}$

$= \sin A \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec} A} + \cos A \cdot \frac{1}{\sec A}$

$= \sin A \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos A$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$

$= \sec A \cdot \frac{1}{\cos A} - \tan A \cdot \frac{1}{\cot A}$

$= \sec A \cdot \sec A - \tan A \cdot \tan A$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 + \tan^2 A - \tan^2 A$ [$\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$]

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$ [$\because \operatorname{cosec}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$]

$$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1 + \sin^2 A}$$

$$= \frac{1 + \sin^2 A}{1 + \sin^2 A} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৮। i) $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A + 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A}$

$$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \times \frac{\cos A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos A (\sin A - \cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A (\cos A - \sin A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos A (\sin A - \cos A)} + \frac{\cos^2 A}{\sin A \{-(\sin A - \cos A)\}}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\cos A (\sin A - \cos A)} - \frac{\cos^2 A}{\sin A (\sin A - \cos A)}$$

$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A \cos A (\sin A - \cos A)}$$

$$= \frac{(\sin A - \cos A) (\sin^2 A + \sin A \cos A + \cos^2 A)}{\sin A \cos A (\sin A - \cos A)}$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)]$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + \sin A \cos A}{\sin A \cdot \cos A}$$

$$= \frac{1 + \sin A \cos A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} + \frac{\sin A \cos A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{1}{\cos A} + 1$$

$$= \operatorname{cosec} A \cdot \sec A + 1$$

$$= \sec A \cdot \operatorname{cosec} A + 1$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ii) $\frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A}$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৯। $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$

সমাধান :

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A}$$

$$= \frac{\cos A}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \cos^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)(\sin A - \cos A)}{(\sin A - \cos A)}$$

$$= \sin A + \cos A = \text{R.H.S}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১০। $\tan A \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sin A$

সমাধান : বামপক্ষ = $\tan A \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$$= \tan A \sqrt{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos A$$

$$= \sin A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $\frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$

$$= \frac{(\sec A + \tan A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\sec A - \tan A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\sec A - \tan A)}$$

[লব ও হরকে $(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\sec A - \tan A)$ দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{(\sec^2 A - \tan^2 A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)(\sec A - \tan A)}$$

$$= \frac{1 \times (\operatorname{cosec} A - \cot A)}{1 \times (\sec A - \tan A)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} = \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

$$১২। \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \sec^2 A$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1}$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A (\operatorname{cosec} A + 1) + \operatorname{cosec} A (\operatorname{cosec} A - 1)}{(\operatorname{cosec} A - 1)(\operatorname{cosec} A + 1)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$$

$$= \frac{2 \operatorname{cosec}^2 A}{\cot^2 A} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A]$$

$$= 2 \operatorname{cosec}^2 A \times \frac{1}{\cot^2 A}$$

$$= 2 \operatorname{cosec}^2 A \cdot \tan^2 A$$

$$= 2 \frac{1}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \sec^2 A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$১৩। \frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A}$

$$= \frac{1 - \sin A + 1 + \sin A}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}$$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 A}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \sec^2 A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$১৪। \frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \tan^2 A$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + 1) - (\operatorname{cosec} A - 1)}{(\operatorname{cosec} A - 1)(\operatorname{cosec} A + 1)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A + 1 - \operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$$

$$= \frac{2}{\cot^2 A} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cot^2 A}$$

$$= 2 \tan^2 A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$১৫। \frac{\sin A}{1 - \cos A} + \frac{1 - \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\sin A}{1 - \cos A} + \frac{1 - \cos A}{\sin A}$

$$= \frac{\sin^2 A + (1 - \cos A)^2}{\sin A (1 - \cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 1 - 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin A (1 - \cos A)}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)}$$

$$= \frac{1 + 1 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)}$$

$$= \frac{2(1 - \cos A)}{\sin A (1 - \cos A)}$$

$$= \frac{2}{\sin A}$$

$$= \frac{2}{1} \quad [\because \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}]$$

$$\operatorname{cosec} A$$

$$= 2 \times \frac{\operatorname{cosec} A}{1}$$

$$= 2 \operatorname{cosec} A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$১৬। \frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A}$

$$= \frac{\tan^2 A - (\sec A - 1)(\sec A + 1)}{\tan A (\sec A + 1)}$$

$$= \frac{\tan^2 A - (\sec^2 A - 1)}{\tan A (\sec A + 1)}$$

$$= \frac{\tan^2 A - \tan^2 A}{\tan A (\sec A + 1)} \quad [\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$$

$$= \frac{0}{\tan A (\sec A + 1)}$$

$$= 0$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$১৭। (\tan \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

সমাধান : বামপক্ষ = $(\tan \theta + \sec \theta)^2$

$$= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(\sin \theta + 1)^2}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} \quad [\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)^2}{(1)^2 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

$$১৮। \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{\cos A \cdot \cos B + \sin B \cdot \sin A}{\sin A \cdot \cos B}$$

$$= \frac{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}{\sin B \cdot \cos A}$$

$$= \frac{(\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B)}{\sin A \cos B}$$

$$\times \frac{\sin B \cdot \cos A}{(\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B)}$$

$$= \frac{\sin B \cdot \cos A}{\sin A \cdot \cos B}$$

$$= \frac{\sin B}{\cos B} \cdot \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \tan B \cdot \cot A$$

$$= \cot A \cdot \tan B$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

$$১৯। \sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}}$

$$= \frac{\sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A}} \times \frac{\sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 - \sin A}}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{1 - \sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{(\sqrt{1 - \sin A})^2}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$$

[∵ $1 - \sin^2 A = \cos^2 A$]

$$= \frac{1 - \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A - \tan A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

$$২০। \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$$= \frac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1}} \times \frac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A + 1}}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{\sec^2 A - 1^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$$= \frac{\sec A + 1}{\sqrt{\tan^2 A}}$$

[∵ $\sec^2 A - 1 = \tan^2 A$]

$$= \frac{\sec A + 1}{\tan A}$$

$$= \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$$

$$= \sec A \cdot \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$$

$$= \sec A \cdot \cot A + \cot A$$

$$= \frac{1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} + \cot A$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \cot A$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$= \cot A + \operatorname{cosec} A$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

$$২১। \cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$$

সমাধান : এখানে, $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$

$$\text{বা, } \sin A = \sqrt{2} \cos A - \cos A$$

$$\text{বা, } \sin A = (\sqrt{2} - 1) \cos A$$

$$\text{বা, } \cos A = \frac{\sin A}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\text{বা, } \cos A = \frac{\sin A (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$$

[লব ও হরকে $(\sqrt{2} + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } \cos A = \frac{(\sqrt{2} + 1) \sin A}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$\text{বা, } \cos A = \frac{(\sqrt{2} + 1) \sin A}{2 - 1}$$

$$\text{বা, } \cos A = (\sqrt{2} + 1) \sin A$$

$$\text{বা, } \cos A = \sqrt{2} \sin A + \sin A$$

$$\therefore \cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$২২। \text{যদি } \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ হয়, তবে } \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

সমাধান : এখানে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\cot A = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} \\ &= \frac{(1 + \cot^2 A) - (1 + \tan^2 A)}{(1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A)} \\ &= \frac{1 + \cot^2 A - 1 - \tan^2 A}{2 + \cot^2 A + \tan^2 A} \\ &= \frac{\cot^2 A - \tan^2 A}{2 + \cot^2 A + \tan^2 A} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 + (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \end{aligned}$$

[$\tan A$ এবং $\cot A$ এর মান বসিয়ে]

$$\begin{aligned} &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + 3 + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{9 - 1}{3}}{\frac{6 + 9 + 1}{3}} \\ &= \frac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{3}} \\ &= \frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

অতএব, নির্ণেয় মান $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

২৩। $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান

কত?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)} = \frac{4}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{4}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{4}{3}$$

$$\text{বা, } 4(\operatorname{cosec} A + \cot A) = 3$$

$$\therefore \operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

২৪। $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখন, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$

$$\begin{aligned} &= \frac{a \cdot \frac{\sin A}{\sin A} - b \cdot \frac{\cos A}{\sin A}}{a \cdot \frac{\sin A}{\sin A} + b \cdot \frac{\cos A}{\sin A}} \end{aligned}$$

[লব ও হরকে $\sin A$ দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{a - b \cdot \cot A}{a + b \cdot \cot A}$$

$$= \frac{a - b \cdot \frac{b}{a}}{a + b \cdot \frac{b}{a}} \quad [\cot A \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{a - \frac{b^2}{a}}{a + \frac{b^2}{a}}$$

$$= \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{a^2 + b^2}{a}}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{অতএব, নির্ণেয় মান} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \text{ (Ans.)}$$

I ❤️ MyMahbub

□ অনুশীলনী- ৯.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ

[পৃষ্ঠা- ১৬৪]

১। $\sec(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sec(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$$

আমরা জানি, $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{4}{3}$$

প্রদত্ত রাশি = $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

$$= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$$

উত্তর : $\frac{1}{3}$

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণ

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{1 - \sin^2 45^\circ}{1 + \sin^2 45^\circ} + \tan^2 45^\circ$

(খ) $\cot 90^\circ \cdot \tan 0^\circ \cdot \sec 30^\circ \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$

(গ) $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

(ঘ) $\frac{1 - \tan^2 60^\circ}{1 + \tan^2 60^\circ} + \sin^2 60^\circ$

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত রাশি = $\frac{1 - \sin^2 45^\circ}{1 + \sin^2 45^\circ} + \tan^2 45^\circ$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + (1)^2$$

$$[\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ও } \tan 45^\circ = 1]$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

(খ) প্রদত্ত রাশি = $\cot 90^\circ \cdot \tan 0^\circ \cdot \sec 30^\circ \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$

$$= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$$

$$[\because \cot 90^\circ = 0, \tan 0^\circ = 0, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}]$$

(গ) প্রদত্ত রাশি = $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$[\because \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ঘ) $\frac{1 - \tan^2 60^\circ}{1 + \tan^2 60^\circ} + \sin^2 60^\circ$

$$= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1-3}{1+3} + \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$$

উদাহরণ ২।

(ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$, $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$, যদি $A = 45^\circ$ হয়।

(ঘ) সমাধান কর : $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : (ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$

$$\text{বা, } \cos(A - B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \cos(A - B) = \cos 45^\circ [\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$\therefore A - B = 45^\circ \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{এবং } 2\sin(A + B) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } 2\sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \sin 60^\circ [\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$\therefore A + B = 60^\circ \dots \dots \dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$2A = 105^\circ$$

$$\therefore A = \frac{105^\circ}{2} = 52\frac{1}{2}^\circ$$

আবার, (ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই,

$$2B = 15^\circ$$

$$\text{বা, } B = \frac{15^\circ}{2}$$

$$\therefore B = 7\frac{1}{2}^\circ$$

$$\therefore \text{নির্ণয় } A = 52\frac{1}{2}^\circ \text{ ও } B = 7\frac{1}{2}^\circ$$

$$(খ) \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \cot A = \cot 60^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ$$

(গ) দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$

$$\text{প্রমাণ করতে হবে, } \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \cos 2A$$

$$= \cos (2 \times 45^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2}$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$(ঘ) \text{ প্রদত্ত সমীকরণ } 2\cos^2 \theta + 3\sin \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 - \sin^2 \theta) - 3(1 - \sin \theta) = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) - 3(1 - \sin \theta) = 0$$

$$\text{বা, } (1 - \sin \theta) \{2(1 + \sin \theta) - 3\} = 0$$

$$\text{বা, } (1 - \sin \theta) \{2\sin \theta - 1\} = 0$$

$$\text{বা, } 1 - \sin \theta = 0 \quad \text{অথবা, } 2\sin \theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 1 \quad \text{বা, } 2\sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 90^\circ \quad \text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \quad \text{বা, } \sin \theta = \sin 30^\circ$$

$$\text{বা, } \theta = 30^\circ$$

$$\text{যেহেতু } \theta \text{ সূক্ষ্মকোণ, সেহেতু } \theta = 30^\circ$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

৯.২

১। $\cos \theta = \frac{1}{2}$ হলে $\cot \theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

খ) 1

গ) $\sqrt{3}$

ঘ) 2

উত্তর : ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

২. i. $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

ii. $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$

iii. $\cot^2 \theta = 1 - \tan^2 \theta$

পাশের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোনটি সঠিক ?

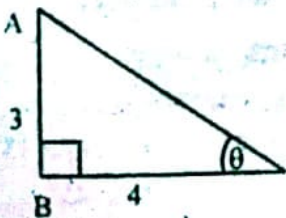
ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

উত্তর : ক. i ও ii.



৩। $\sin \theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{3}{4}$

খ) $\frac{4}{3}$

গ) $\frac{3}{5}$

ঘ) $\frac{4}{5}$

উত্তর : গ) $\frac{3}{5}$

৪। $\cot \theta$ এর মান কোনটি ?

ক) $\frac{3}{4}$

খ) $\frac{4}{3}$

গ) $\frac{3}{5}$

ঘ) $\frac{4}{5}$

উত্তর : ঘ) $\frac{4}{3}$

মান নির্ণয় কর (৫ - ৮)

৫। $\frac{1 - \cot^2 60^\circ}{1 + \cot^2 60^\circ}$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1 - \cot^2 60^\circ}{1 + \cot^2 60^\circ} \\ &= \frac{1 - (\cot 60^\circ)^2}{1 + (\cot 60^\circ)^2} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণয় মান} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

$$৬। \tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$$

সমাধান : $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

$$= 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

$$৭। \frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$$

সমাধান : $\frac{1 - \cos^2 60^\circ}{1 + \cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + (2)^2$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + 4$$

$$= \frac{\frac{4-1}{4}}{\frac{4+1}{4}} + 4$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} + 4$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + 4$$

$$= \frac{3}{5} + 4$$

$$= \frac{3+20}{5}$$

$$= \frac{23}{5} \text{ (Ans.)}$$

$$৮। \cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$$

সমাধান : $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (2)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} \text{ (Ans.)}$$

দেখাও যে, (৯ - ১১)

$$৯। \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad [\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ এবং } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3-1}{4}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \cos 60^\circ \quad [\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হলো)}$$

$$১০। \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3+1}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \sin 90^\circ \quad [\because \sin 90^\circ = 1]$$

$$= 1$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হল)}$$

$$১১। \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$$

সমাধান : বামপক্ষ = $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \cos 30^\circ \quad [\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হলো)}$$

$$১২। \sin 3A = \cos 3A, \text{ যদি } A = 15^\circ \text{ হয়।}$$

সমাধান : দেয়া আছে, $A = 15^\circ$

$$\text{এখন, বামপক্ষ} = \sin 3A$$

$$= \sin (3 \times 15^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{আবার, ডানপক্ষ} = \cos 3A$$

$$= \cos (3 \times 15^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হল)}$$

১৩। $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \text{বামপক্ষ} &= \sin 2A \\ &= \sin (2 \times 45^\circ) \\ &= \sin 90^\circ \\ &= 1 \\ \text{ডানপক্ষ} &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ &= \frac{2 \tan 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} \\ &= \frac{2 \cdot 1}{1 + (1)^2} \\ &= \frac{2}{1 + 1} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৪। $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{এখন, বামপক্ষ} &= \tan 2A \\ &= \tan (2 \times 30^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \\ \text{আবার, ডানপক্ষ} &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \\ &= \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} \quad [A \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad [\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}] \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৫। $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ যদি $A = 60^\circ$ হয়।

সমাধান : দেওয়া আছে, $A = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \text{এখন, বামপক্ষ} &= \cos 2A \\ &= \cos (2 \times 60^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos (120^\circ) \\ &= \cos (90^\circ + 30^\circ) \\ &= -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ &= \frac{(\tan 60^\circ)^2}{(\tan 60^\circ)^2} \\ &= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1 - 3}{1 + 3} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= \frac{-1}{2} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

১৬। $2 \cos (A + B) = 1 = 2 \sin (A - B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45^\circ$ এবং $B = 15^\circ$ ।

সমাধান : দেওয়া আছে, $2 \cos (A + B) = 1$ এবং $2 \sin (A - B) = 1$

এখন, $2 \cos (A + B) = 1$

বা, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos (A + B) = \cos 60^\circ \quad [\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$

$\therefore A + B = 60^\circ$ ----- (i)

আবার, $2 \sin (A - B) = 1$

বা, $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin (A - B) = \sin 30^\circ \quad [\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$

$\therefore A - B = 30^\circ$ ----- (ii)

এখন, সমীকরণ (i) এবং (ii) যোগ করে পাই,

$$A + B = 60^\circ$$

$$A - B = 30^\circ$$

$$\hline 2A = 90^\circ$$

$\therefore A = 45^\circ$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$45^\circ - B = 30^\circ$$

বা, $45^\circ - 30^\circ = B$

বা, $15^\circ = B$

$\therefore B = 15^\circ$

সুতরাং $A = 45^\circ$ এবং $B = 15^\circ$ (দেখানো হলো)

১৭। $\cos (A - B) = 1, 2 \sin (A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos (A - B) = 1$

বা, $\cos (A - B) = \cos 0^\circ$

$\therefore A - B = 0^\circ$ ----- (i)

আবার, $2 \sin (A + B) = \sqrt{3}$

$$\text{বা, } \sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin 60^\circ$$

$$\therefore A+B = 60^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

(ii) নং ও (i) নং সমীকরণ যোগ ও বিয়োগ করে পাই,

$$A+B = 60^\circ$$

$$A-B = 0^\circ$$

$$(+)\quad 2A = 60^\circ$$

$$\text{বা, } A = \frac{60^\circ}{2}$$

$$\therefore A = 30^\circ$$

$$\text{এবং } A+B = 60^\circ$$

$$A-B = 0^\circ$$

$$2B = 60^\circ$$

$$\text{বা, } B = \frac{60^\circ}{2}$$

$$\therefore B = 30^\circ$$

অতএব নির্ণেয় মান $A = 30^\circ$ এবং $B = 30^\circ$ (Ans.)

$$১৮। \text{সমাধান কর: } \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\text{সমাধান: এখানে, } \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1} \quad [\text{যোজন ও বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2 \cos A}{-2 \sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3} \quad [\text{উভয়পক্ষকে } (-) \text{ দিয়ে গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } \cot A = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot A = \cot 30^\circ \quad [\because \sqrt{3} = \cot 30^\circ]$$

$$\text{বা, } A = 30^\circ$$

$$\therefore A = 30^\circ$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $A = 30^\circ$ (Ans.)

১৯। A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $\cot(A+B) = 1$

$$\text{বা, } \cot(A+B) = \cot 45^\circ \quad [\because 1 = \cot 45^\circ]$$

$$\therefore A+B = 45^\circ \dots\dots\dots (i)$$

আবার, দেয়া আছে, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$

$$\text{বা, } \cot(A-B) = \cot 30^\circ \quad [\because \cot 30^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\therefore A-B = 30^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$A+B = 45^\circ$$

$$A-B = 30^\circ$$

$$\therefore 2A = 75^\circ$$

$$\therefore A = \frac{75^\circ}{2} = 37\frac{1}{2}^\circ$$

A এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\frac{75^\circ}{2} - B = 30^\circ$

$$\text{বা, } \frac{75^\circ}{2} - 30^\circ = B$$

$$\text{বা, } \frac{75^\circ - 60^\circ}{2} = B$$

$$\text{বা, } B = \frac{15^\circ}{2}$$

$$\therefore B = 7\frac{1}{2}^\circ$$

অতএব, নির্ণেয় মান, $A = 37\frac{1}{2}^\circ$ এবং $B = 7\frac{1}{2}^\circ$ (Ans.)

২০। দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, যদি $A = 30^\circ$ হয়।

সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = \cos 3A = \cos 3 \times 30^\circ = \cos 90^\circ = 0$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$= 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ। (দেখানো হল)

২১। সমাধান কর: $\sin \theta + \cos \theta = 1$ যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

সমাধান: $\sin \theta + \cos \theta = 1$

$$\text{বা, } \cos \theta = 1 - \sin \theta$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta = (1 - \sin \theta)^2 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 1 - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 1 - 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 2\sin \theta = 0$$

$$\text{বা, } -2\sin^2 \theta + 2\sin \theta = 0$$

$$\text{বা, } -2\sin \theta (\sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta (\sin \theta - 1) = 0$$

[উভয় পক্ষকে '-2' দ্বারা ভাগ করে।]

$$\text{হয়, } \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{অথবা, } \sin \theta - 1 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\sin \theta = \sin 0^\circ$

$$\therefore \theta = 0^\circ$$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\sin \theta = 1$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

অতএব, নির্ণেয় মান $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ (Ans.)

২২। সমাধান কর: $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 - 5\cos \theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান: এখানে, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 - 5\cos \theta$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 - 5\cos \theta$$

$$[\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta]$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta - 2 + 5\cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta + 5\cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta + 6\cos \theta - \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos \theta (\cos \theta + 3) - 1(\cos \theta + 3) = 0$$

$$\text{বা, } (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 3) = 0$$

$$\text{হয়, } 2\cos \theta - 1 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{অথবা, } \cos \theta + 3 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

২৫. (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $2\cos\theta = 1$

$$\text{বা, } \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\cos\theta = -3$

কিন্তু সূক্ষকোণের জন্য $\cos\theta = -3$ হতে পারে না।

$\therefore \cos\theta = -3$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60^\circ$ (Ans.)

২৬। সমাধান কর : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, $\theta =$ সূক্ষকোণ।

$$\text{সমাধান : } 2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \text{ [- দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \text{হয়, } \cos\theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \cos 0^\circ$$

$$\therefore \theta = 0^\circ$$

$$\text{অথবা, } 2\cos\theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos\theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

[যেহেতু θ সূক্ষকোণ সেহেতু $\theta = 0^\circ$ গ্রহণযোগ্য নয়]

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60^\circ$ (Ans.)

২৮। সমাধান কর : $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$$\text{সমাধান : এখানে, } \tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } \tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } \tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{হয়, } \tan\theta - 1 = 0 \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{নতুন, } \tan\theta - \sqrt{3} = 0 \dots\dots\dots(ii)$$

$$(i) \text{ নং সমীকরণ থেকে পাই, } \tan\theta = 1$$

$$\text{বা, } \tan\theta = \tan 45^\circ$$

$$\text{অর্থাৎ, } \theta = 45^\circ$$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan\theta = \tan 60^\circ$$

$$\text{অর্থাৎ, } \theta = 60^\circ$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 45^\circ$ ও 60° (Ans.)

২৫। মান নির্ণয় কর : $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$.

$$\text{সমাধান : প্রদত্ত রাশি : } 3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ.$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (2)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 4 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1$$

$$= 1 + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{অতএব নির্ণেয় মান} = \frac{7}{2} \text{ (Ans.)}$$

২৬। $\triangle ABC$ এর $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$:

ক AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos^2\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

সমাধান :

ক) আমরা জানি,

$\triangle ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{বা, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$\text{বা, } AC = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$

$$\text{বা, } AC = \sqrt{25 + 144}$$

$$\text{বা, } AC = \sqrt{169}$$

$$\therefore AC = 13 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $\angle C = \theta$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta$$

$$= \frac{5}{13} + \frac{12}{13}$$

$$= \frac{5+12}{13} = \frac{17}{13}$$

$$\text{অতএব, } \sin\theta + \cos\theta \text{ এর মান } \frac{17}{13} \text{ (Ans.)}$$

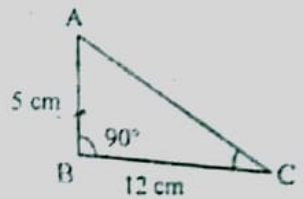
গ. দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

$$\text{সমাধান : আমরা জানি, } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{12}{13}} = 1 \times \frac{13}{12} = \frac{13}{12}$$

$$\text{এবং } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = 1 \times \frac{13}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$$



$$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2$$

$$= \frac{169}{144} + \frac{169}{25}$$

$$= \frac{4225 + 24336}{3600}$$

$$= \frac{28561}{3600}$$

ডানপক্ষ = $\sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$

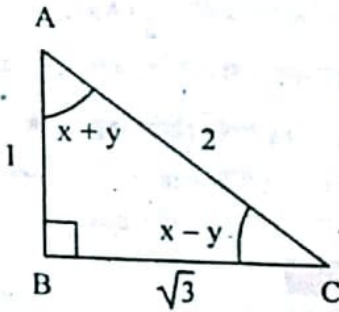
$$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 \times \left(\frac{13}{5}\right)^2$$

$$= \frac{169}{144} \times \frac{169}{25}$$

$$= \frac{28561}{3600}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

২৭।



- ক AC এর পরিমাণ কত?
খ $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।
গ x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. $\triangle ABC$ এ $\angle B = 90^\circ$
∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= (1)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$= 1 + 3$$

$$= 4$$

$$AC = \sqrt{4}$$

$$\therefore AC = 2$$

খ. $\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

প্রদত্ত রাশি = $\tan A + \tan C$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

গ. $\tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x - y) = \tan 30^\circ$

$$\therefore x - y = 30^\circ \dots\dots\dots(i)$$

আবার, $\tan A = \sqrt{3}$

বা, $\tan(x + y) = \tan 60^\circ$

$$\therefore x + y = 60^\circ \dots\dots\dots(ii)$$

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$x - y = 30^\circ$$

$$x + y = 60^\circ$$

$$2x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

(i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$x + y = 60^\circ$$

$$x - y = 30^\circ$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline 2y = 30 \end{array}$$

$$\therefore y = 15^\circ$$

উত্তর : $x = 45^\circ$ এবং $y = 15^\circ$



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $1 + \sin^2 A + \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A} =$ কত?

[শহীদ বীর উত্তম লে. আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক $\cos^2 A$ খ $\sec^2 A$ ৩

গ $\sin^2 A$ ঘ $\operatorname{cosec}^2 A$

২. $\sin A = 0$ হলে A কত?

[মৌলভীবাজার সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]

ক 0° খ 90° ৩

গ 60° ঘ 45°

৩. $\tan \theta =$ কোনটি?

[তিতুমারিয়া উচ্চ বিদ্যালয়, ব্রীমভাঙ্গা]

ক $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ খ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ ৩

গ $\frac{\text{অতিভূজ}}{\text{ভূমি}}$ ঘ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}}$

৪. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot \theta$ এর মান কোনটি?

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ 1 ৩

গ $\sqrt{3}$ ঘ 2

৫. $\frac{1 - \cot^2 60^\circ}{1 + \cot^2 60^\circ}$ এর মান কত?

[ডুমুরিয়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $-\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{2}$ ৩

গ $\frac{1}{4}$ ঘ $\frac{2}{3}$

ক $\frac{1}{2}$ খ $-\frac{1}{2}$ ৩

গ 1 ঘ -1

I ❤️ MyMahbub

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীর

- ভূ-রেখা, উচ্চতা, উল্লম্বতা, কোণ ও অবনতি কোণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে হাতে-কলমে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক বিভিন্ন পরিমাপ করতে পারবে।

□ অনুশীলনী- ১০

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :



[পৃষ্ঠা- ১৭৫]

চিত্রে AB একটি গাছ। চিত্রে প্রদত্ত তথ্য থেকে—

১. গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
২. গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, গাছটির উচ্চতা, AB = h মিটার

BD = 20 মিটার

ΔABD এর ক্ষেত্রে,

উন্মুক্ত কোণ ∠ADB = 60°

ΔABC-এর ক্ষেত্রে, ∠BAC = 60°

উন্মুক্ত কোণ ∠ACB = (90° - 60°) = 30°

গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ BC এর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

ΔABD-এ

$$\tan \angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{20}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{20}$$

$$\text{বা, } h = 20\sqrt{3} = 34.641 \text{ (প্রায়)}$$

∴ গাছের উচ্চতা 34.641 মিটার (প্রায়)

আবার, ΔABC-এ

$$\text{বা, } \tan \angle ACB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{BC}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{BC}$$

$$\text{বা, } BC = 20(\sqrt{3})^2$$

$$\text{বা, } BC = 20 \times 3$$

$$\therefore BC = 60$$

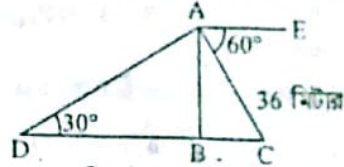
∴ দূরত্ব BC = 60 মিটার

উত্তর : গাছের উচ্চতা 34.641 (মিটার (প্রায়) এবং দূরত্ব 60 মিটার।

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা- ১৭৬]

১। চিত্রে অবনতি ∠CAE = 60°, উন্মুক্ত ∠ADB = 30° AC = 36 মিটার এবং B, C, D একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, উচ্চতা = AB মিটার

ΔABC এর ভূমি = BC মি.

ΔABD এর ভূমি = BD মি.

AC = 36 মিটার

ΔABC এর অবনতি কোণ ∠CAE = 60°

∴ উন্মুক্ত কোণ ∠ACB = 60°

ΔABD এর উন্মুক্ত কোণ ∠ADB = 30°

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$$\sin \angle ACB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{বা, } \sin 60^\circ = \frac{AB}{36}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{36}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{AB}{18}$$

$$\text{বা, } AB = 18\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } AB = 18 \times 1.732$$

$$\therefore AB = 31.177 \text{ (প্রায়)}$$

$$\text{আবার, } \cos \angle ACB = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{বা, } \cos 60^\circ = \frac{BC}{36}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{BC}{36}$$

$$\text{বা, } 1 = \frac{BC}{18}$$

$$\therefore BC = 18$$

ΔABD-এর ক্ষেত্রে,

$$\tan \angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{18\sqrt{3}}{BD}$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{18\sqrt{3}}{BD} \\ \text{বা, } BD &= 18(\sqrt{3})^2 \\ \therefore BD &= 54 \end{aligned}$$

$$\text{এবং } \sin \angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\text{বা, } \sin 30^\circ = \frac{AB}{AD}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{AD}$$

$$\text{বা, } AD = 36\sqrt{3}$$

$$\therefore AD = 62.354 \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore CD = (BC + BD) \text{ মিটার}$$

$$= (18 + 54) \text{ মিটার} = 72 \text{ মিটার}$$

$$\text{উত্তর : } AB = 31.177 \text{ মিটার (প্রায়),}$$

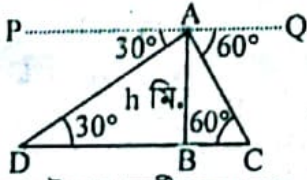
$$AD = 62.354, \text{ মি. (প্রায়), } CD = 72 \text{ মি.}$$

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা- ১৭৭]

দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ মাইল পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, বেলনটির উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বেলুনের উচ্চতা $AB = h$ মিটার।



দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী দূরত্ব $DC = 1000$ মিটার।

$BC = x$ মিটার, $BD = (1000 - x)$ মিটার।

$\triangle ABD$ এর অবনতি কোণ $\angle PAD = 30^\circ$

উন্নত কোণ $\angle ADB = 30^\circ$

আবার, $\triangle ABC$ এর অবনতি কোণ $\angle QAC = 60^\circ$

\therefore উন্নতি কোণ $\angle ACB = 60^\circ$

এখন, $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রে,

$$\tan \angle ACB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}} \dots\dots (i)$$

আবার, $\triangle ABD$ -এর ক্ষেত্রে,

$$\tan \angle ADB = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{h}{1000 - x}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{1000 - x}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h = 1000 - x$$

$$\text{বা, } x = 1000 - \sqrt{3}h \dots\dots (ii)$$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = 1000 - \sqrt{3}h$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}h + \frac{h}{\sqrt{3}} = 1000$$

$$\text{বা, } \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h = 1000$$

$$\text{বা, } \left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right)h = 1000$$

$$\text{বা, } h = \frac{1000\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{বা, } h = 250\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = 250 \times 1.732$$

$$\therefore h = 433.013 \text{ (প্রায়)}$$

\therefore নির্ণেয় বেলনটির উচ্চতা 433.013 মিটার (প্রায়)।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। ক) $\angle CAD$ এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

খ) AB ও BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ) A ও D এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

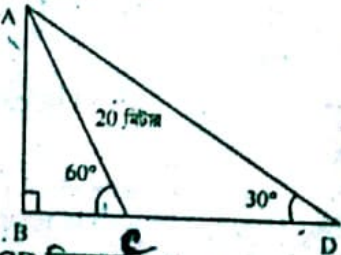
ক) দেওয়া আছে, $\angle ACB = 60^\circ$

তাহলে, $\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$

বা, $60^\circ + \angle ACD = 180^\circ$ [∵ সরল কোণ বলে]

বা, $\angle ACD = 180^\circ - 60^\circ$

$\therefore \angle ACD = 120^\circ$



এখন, $\triangle ACD$ ত্রিভুজে -এ

$$\angle ACD + \angle ADC + \angle CAD = 180^\circ$$

$$\text{বা, } 120^\circ + 30^\circ + \angle CAD = 180^\circ$$

$$\text{বা, } 150^\circ + \angle CAD = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle CAD = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ \text{ (Ans.)}$$

খ) দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AC = 20$ মিটার এবং অতিভুজ সংলগ্ন কোণ $\angle ACB = 60^\circ$

$$\therefore AB \text{ এর দৈর্ঘ্য} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle ACB$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{20} = \sin 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{10} = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } AB = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore AB = 17.321 \text{ মিটার (প্রায়)}$$

$$\text{আবার, } BC \text{ এর দৈর্ঘ্য} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \cos \angle ACB$$

$$\text{বা, } \frac{BC}{20} = \cos 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{BC}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } BC = \frac{20}{2}$$

$$\therefore BC = 10 \text{ মিটার।}$$

অতএব, AB ও BC এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 17.321 মিটার ও 10 মিটার। (Ans.)

গ) আবার, $\triangle ABD$ -এ

$$\angle ADB = 30^\circ$$

$\therefore \triangle ABD$ -এ

$$\sin \angle ADB = \frac{AB}{AD}$$

$$\text{বা, } \sin 30^\circ = \frac{17.321}{AD}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{17.321}{AD}$$

$$\text{বা, } AD = 34.642$$

$\therefore A$ ও D এর দূরত্ব 34.642 মিটার (Ans.)

২। দুটি কিলোমিটার পোস্ট A ও B এর মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপর O বিন্দুতে একটি হেলিকপ্টার হতে ঐ কিলোমিটার পোস্টদ্বয়ের অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 30° ।

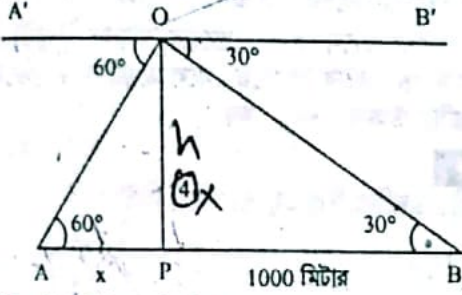
ক) স্বক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন কর।

খ) হেলিকপ্টারটি মাটি থেকে কত উচ্চতায় অবস্থিত?

গ) A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, O বিন্দুতে হেলিকপ্টারের অবস্থান এবং ধরি, A ও B এক কিলোমিটার দূরবর্তী দুইটি পোস্টের চূড়া। O থেকে A ও B এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 30° ।



অতএব $\angle A'OA = 60^\circ$ ও

$$\angle B'OB = 30^\circ$$

এখন, $A'B'$ ও AB সমান্তরাল বলে

$$\angle A'OA = \angle OAB = 60^\circ \text{ ও}$$

$$\angle B'OB = \angle OBA = 30^\circ$$

এখানে, $AB = 1000$ মিটার। O থেকে AB এর উপর লম্ব $OP = h$ মিটার।

মনেকরি, $AP = x$ মিটার, $OP = h$ মিটার।

অতএব, $BP = AB - AP = (1000 - x)$ মিটার।

খ) মাটি থেকে হেলিকপ্টারে উচ্চতা নির্ণয় চিত্রে, $\triangle AOP$

$$\text{সমকোণী ত্রিভুজ, } \frac{OP}{AP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle OAB$$

$$\text{বা, } \frac{OP}{AP} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$\therefore h = \sqrt{3}x \dots\dots\dots (i)$$

আবার, $\triangle BOP$ সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{OP}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle OBA$$

$$\text{বা, } \frac{OP}{BP} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{1000 - x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } 1000 - x = \sqrt{3}h$$

$$\text{বা, } 1000 - x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}x$$

$$\text{বা, } 1000 - x = 3x$$

$$\text{বা, } 1000 = 3x + x$$

$$\text{বা, } 4x = 1000$$

$$\text{বা, } x = \frac{1000}{4}$$

$$\therefore x = 250$$

এখন (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$h = \sqrt{3} \times 250$$

$$= 1.732050807 \times 250$$

$$= 433.0127017$$

$$\therefore = 433.013$$

অতএব হেলিকপ্টারটি মাটি থেকে 433.013 মিটার উচ্চতায় অবস্থিত (Ans.)

গ) A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় :

A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব হলো AO এর দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব।

এখন, OAP সমকোণী ত্রিভুজের $OP = 433.013$ মিটার এবং $AP = 250$ মিটার

(খ) হতে পাই,

$\therefore OAP$ সমকোণী ত্রিভুজে,

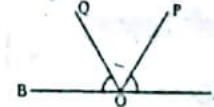
$$OA = \sqrt{AP^2 + OP^2}$$

$$= \sqrt{(250)^2 + (433.013)^2}$$

$$= \sqrt{62500 + 187500.2582}$$

$$= 500 \text{ মিটার।}$$

অতএব, A বিন্দু থেকে হেলিকপ্টারের সরাসরি দূরত্ব 500 মিটার। (Ans.)



৩। ওপরের চিত্রের O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোন কোনটি ?

ক) $\angle QOB$ খ) $\angle POA$ গ) $\angle QOA$ ঘ) $\angle POB$

উত্তর : খ) $\angle POA$

৪। i) ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা।

ii) উর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের ওপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা।

iii) ভূমিতলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে এ তলকে উল্লম্ব তল বলে।

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii

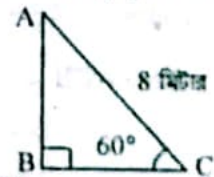
খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

উত্তর : (ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্র অনুযায়ী ৫ - ৬ প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও।



৫। BC এর দৈর্ঘ্য হবে -

ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}m$ খ) $4m$ গ) $4\sqrt{2}m$ ঘ) $\frac{4}{\sqrt{3}}m$

উত্তর : খ) $4m$

৬। AB এর দৈর্ঘ্য হবে -

ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}m$ খ) $4m$ গ) $4\sqrt{2}m$ ঘ) $4\sqrt{3}m$

উত্তর : ঘ) $4\sqrt{3}m$

৭। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিনারটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষবিন্দু A.

মনে করি, মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব $OB = X$ মিটার।

$\therefore \angle AOB = 30^\circ$ এবং $AB = 26$ মিটার।

এখন, $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{26}{X}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{X}$$

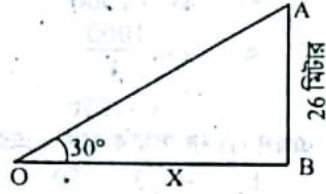
$$\text{বা, } X = 26\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } X = 26 \times 1.73205$$

$$\text{বা, } X = 45.03332098$$

$$\text{বা, } X = 45.033$$

\therefore মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব = 45.033 মিটার (প্রায়)। (Ans.)



৮। একটি গাছের পাদদেশ থেকে ২০ মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ায় উন্নতি কোন 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের পাদদেশ B এবং ভূতলের নির্দিষ্ট বিন্দু C এবং চূড়া A

এখানে, $BC = 20$ মিটার

এবং $\angle ACB = 60^\circ$

ধরি, গাছের উচ্চতা, $AB = h$

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BCA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{20} = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = 20\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = 20 \times 1.732050807$$

$$\text{বা, } h = 34.64101614$$

$$\text{বা, } h = 34.641$$

অতএব, গাছের নির্ণেয় উচ্চতা = 34.641 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৯। 18 মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত?

সমাধান : মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা, $AB = h$ মিটার এবং ছাদের সাথে মই-এর স্পর্শবিন্দু B। এখানে, মইয়ের দৈর্ঘ্য, $OB = 18$ মিটার এবং $\angle AOB = 45^\circ$

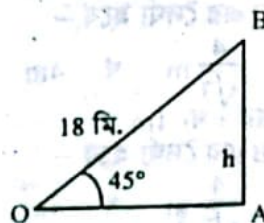
$$\therefore \frac{AB}{OB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle AOB$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{OB} = \sin 45^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{18}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$



$$\text{বা, } h = \frac{18\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{বা, } h = 9\sqrt{2}$$

$$= 9 \times 1.414213562$$

$$= 12.72792205$$

$$\therefore h = 12.728$$

অতএব, দেওয়ালের উচ্চতা, $h = 12.728$ মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১০। একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ঘরটির উচ্চতা $BC = h$ মিটার। বিন্দুতে A বিন্দুর অবনতি কোণ $\angle OBA = 30^\circ$

তাহলে, $\angle CAB = 30^\circ$

[একান্তর কোণ বলে]

এখানে, $AB = 20$ মিটার

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{BC}{AB} = \sin \angle CAB$$

$$\text{বা, } \frac{BC}{AB} = \sin 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } h = \frac{20}{2}$$

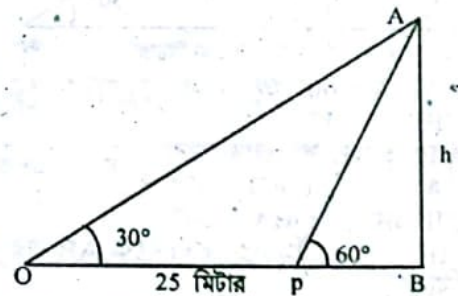
$$\therefore h = 10$$

অতএব, ঘরটির নির্ণেয় উচ্চতা 10 মিটার। (Ans.)

১১। ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি 60° । ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা, $AB = h$ মিটার



এবং স্তম্ভের প্রস্থ, $BP = x$ মিটার।

এখানে, $\angle BPA = 60^\circ$, $\angle BOA = 30^\circ$

এবং $OP = 25$ মিটার।

$\therefore BO = (BP + PO) = (x + 25)$ মিটার

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{AB}{BO} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BOA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BO} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{BP + PO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{h}{x + 25} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x + 25 = h\sqrt{3} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{আবার, } \frac{AB}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BPA$$

৭। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি 30° এবং মিনারটির উচ্চতা ২৬ মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিনারটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষবিন্দু A.

মনে করি, মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব $OB = X$ মিটার।

$\therefore \angle AOB = 30^\circ$ এবং $AB = 26$ মিটার।

এখন, $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$

$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{26}{X}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{X}$$

$$\text{বা, } X = 26\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } X = 26 \times 1.73205$$

$$\text{বা, } X = 45.03332098$$

$$\text{বা, } X = 45.033$$

\therefore মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব = ৪৫.০৩৩ মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৮। একটি গাছের পাদদেশ থেকে ২০ মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ায় উন্নতি কোন 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছের পাদদেশ B এবং ভূতলের নির্দিষ্ট বিন্দু C এবং চূড়া A

এখানে, $BC = 20$ মিটার

এবং $\angle ACB = 60^\circ$

ধরি, গাছের উচ্চতা, $AB = h$

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BCA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{20} = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = 20\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = 20 \times 1.732050807$$

$$\text{বা, } h = 34.64101614$$

$$\text{বা, } h = 34.641$$

অতএব, গাছের নির্ণেয় উচ্চতা = ৩৪.৬৪১ মিটার (প্রায়)। (Ans.)

৯। ১৮ মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত?

সমাধান : মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা, $AB = h$ মিটার এবং ছাদের সাথে মই-এর স্পর্শবিন্দু B। এখানে, মইয়ের দৈর্ঘ্য, $OB = 18$ মিটার এবং $\angle AOB = 45^\circ$

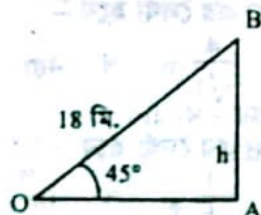
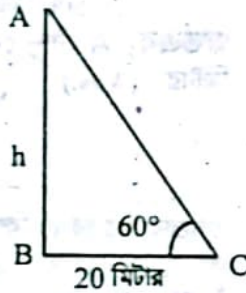
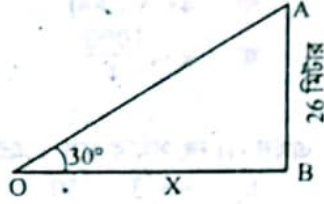
$$\therefore \frac{AB}{OB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle AOB$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{OB} = \sin 45^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{18} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{18}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } h = \frac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$



$$\text{বা, } h = \frac{18\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{বা, } h = 9\sqrt{2}$$

$$= 9 \times 1.414213562$$

$$= 12.72792205$$

$$\therefore h = 12.728$$

অতএব, দেওয়ালের উচ্চতা, $h = 12.728$ মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১০। একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে ২০ মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ঘরটির উচ্চতা $BC = h$ মিটার। বিন্দুতে A বিন্দুর অবনতি কোণ $\angle OBA = 30^\circ$

তাহলে, $\angle CAB = 30^\circ$ [একান্তর কোণ বলে]

এখানে, $AB = 20$ মিটার

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{BC}{AB} = \sin \angle CAB$$

$$\text{বা, } \frac{BC}{AB} = \sin 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } h = \frac{20}{2}$$

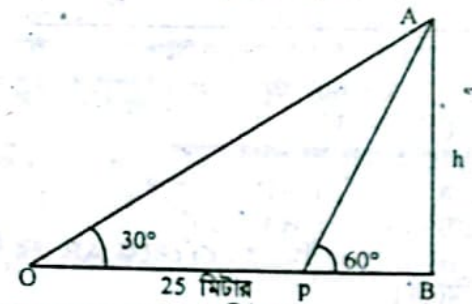
$$\therefore h = 10$$

অতএব, ঘরটির নির্ণেয় উচ্চতা ১০ মিটার। (Ans.)

১১। ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি 60° । ঐ স্থান থেকে ২৫ মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা, $AB = h$ মিটার



এবং স্তম্ভের প্রস্থ, $BP = x$ মিটার।

এখানে, $\angle BPA = 60^\circ$, $\angle BOA = 30^\circ$

এবং $OP = 25$ মিটার।

$\therefore BO = (BP + PO) = (x + 25)$ মিটার

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{AB}{BO} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BOA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BO} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{BP + PO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{h}{x + 25} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x + 25 = h\sqrt{3} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{আবার, } \frac{AB}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BPA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BP} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$\therefore h = x\sqrt{3} \text{ -----(ii)}$$

এখন, (i) নং সমীকরণে h এর মান বসিয়ে পাই,

$$x + 25 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } x + 25 = 3x$$

$$\text{বা, } x - 3x = -25$$

$$\text{বা, } -2x = -25$$

$$\text{বা, } 2x = 25$$

$$\therefore x = \frac{25}{2} = 12.5$$

(ii) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই,

$$h = \frac{25}{2} \times \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{25 \times 1.732050807}{2}$$

$$= \frac{43.30127017}{2}$$

$$= 21.65063508$$

$$= 21.651$$

অতএব, স্তম্ভটির উচ্চতা = 21.651 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১২। কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, AB মিনারের শীর্ষবিন্দু A ও পাদবিন্দু B. ভূতলের কোন বিন্দু O তে মিনারের শীর্ষবিন্দু A এর উন্নতি কোণ = $\angle AOB$ এবং C তে উন্নতি কোণ = $\angle ACB$. দেওয়া আছে, $\angle AOB = 45^\circ$

$$\angle ACB = 60^\circ$$

$$\text{এবং } OC = 60 \text{ মিটার}$$

মিনারটির উচ্চতা (AB) নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, মিনারটির উচ্চতা

$$AB = h \text{ মিটার এবং, } BC = x$$

$$\text{তাহলে, } BO = BC + CO =$$

$$(x + 60) \text{ মিটার}$$

এখন, সমকোণী $\triangle AOB$ এর,

$$\text{লম্ব} = AB \text{ ও ভূমি} = OB$$

$$\therefore \tan \angle AOB = \frac{AB}{BO}$$

$$\text{বা, } \tan 45^\circ = \frac{h}{x + 60} \quad [\because \angle AOB = 45^\circ]$$

$$\text{বা, } 1 = \frac{h}{x + 60} \quad [\because \tan 45^\circ = 1]$$

$$\text{বা, } x + 60 = h$$

$$\therefore x = h - 60 \text{ ----- (i)}$$

আবার, সমকোণী $\triangle ACB$ এর লম্ব = AB ও ভূমি = BC

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{বা, } \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \quad [\because \angle ACB = 60^\circ]$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad [\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\text{বা, } h = x\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = (h - 60)\sqrt{3}$$

[(i) নং থেকে x এর মান বসিয়ে পাই]

$$\text{বা, } h = h\sqrt{3} - 60\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h\sqrt{3} - h = 60\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h(\sqrt{3} - 1) = 60\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\text{বা, } h = \frac{60\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{3} + 1$ দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } h = \frac{60(\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}}{3 - 1}$$

$$\text{বা, } h = \frac{60(\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } h = 30\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{বা, } h = 30(\sqrt{3^2} + \sqrt{3})$$

$$= 30(3 + \sqrt{3})$$

$$= 30(3 + 1.732050807)$$

$$= 30 \times 4.732050807$$

$$= 141.9615242$$

$$= 141.962 \text{ মিটার}$$

অতএব, মিনারটির নির্ণয় উচ্চতা = 141.962 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১৩। একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60° । ঐ স্থান থেকে 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, টাওয়ারটির

উচ্চতা, AB = h মিটার

এবং নদীর প্রস্থ, BP = x

মিটার।

এখানে, $\angle BPA = 60^\circ$,

$\angle BOA = 30^\circ$

এবং OP = 96 মিটার।

$$\therefore BO = (BP + PO) = (x + 96) \text{ মিটার}$$

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\frac{AB}{BO} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BOA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BO} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{BP + PO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{h}{x + 96} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x + 96 = h\sqrt{3} \text{ ----- (i)}$$

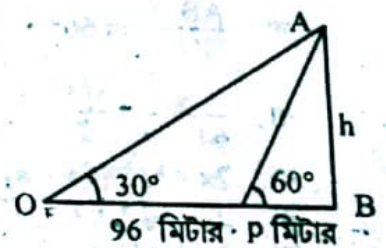
$$\text{আবার, } \frac{AB}{BP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle BPA$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BP} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$\therefore h = x\sqrt{3} \text{ ----- (ii)}$$

এখন, (i) নং সমীকরণে h এর মান বসিয়ে পাই,



$$x + 96 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } x + 96 = 3x$$

$$\text{বা, } x - 3x = -96$$

$$\text{বা, } -2x = -96$$

$$\text{বা, } 2x = 96$$

$$\therefore x = \frac{96}{2} = 48$$

(ii) নং সমীকরণে x -এর মান বসিয়ে পাই,

$$h = 48 \times \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } h = 48 \times 1.7320$$

$$= 83.138$$

অতএব, স্তম্ভটির উচ্চতা = 83.138 মিটার এবং নদীর বিস্তার = 48 মিটার (Ans.)

১৪। ৬৪ মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য $AC = 64$ মিটার, খুঁটিটি B বিন্দুতে ভেঙে গিয়ে ভূমির সাথে D বিন্দুতে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

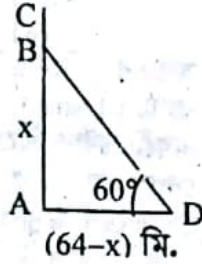
এখানে, খুঁটিটি x উচ্চতায় ভেঙে

থাকে তবে, $AB = AC - BC$

$$\text{বা, } AB = 64 - BD$$

$$\text{বা, } x = 64 - BD$$

$$\therefore BD = 64 - x$$



এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $\frac{AB}{BD} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle ADB$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BD} = \sin 60^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{x}{64 - x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } 2x = \sqrt{3}(64 - x)$$

$$\text{বা, } 2x = \sqrt{3} \cdot 64 - \sqrt{3}x$$

$$\text{বা, } 2x + \sqrt{3}x = 64 \times 1.73205080$$

$$\text{বা, } x(2 + \sqrt{3}) = 110.85$$

$$\text{বা, } x = \frac{110.85}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } x = \frac{110.85}{2 + 1.73205080}$$

$$\text{বা, } x = \frac{110.85}{3.732050808}$$

$$\therefore x = 29.702 \text{ (প্রায়)}$$

অতএব, খুঁটিটি 29.702 মিটার (প্রায়) উচুতে ভেঙেছিল। (Ans.)

১৫। একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গাছটি A বিন্দুতে ভেঙে গিয়ে AB অংশ দণ্ডায়মান অংশ AC এর সাথে $\angle CAB = 30^\circ$ উৎপন্ন করে CB দূরত্বে B বিন্দুতে মাটি স্পর্শ করে।

$$\therefore \text{গাছটির দৈর্ঘ্য} = AC + AD$$

এখানে, $\angle CAB = 30^\circ$ এবং $BC = 12$ মিটার



গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $(AC + AD)$ নির্ণয় করতে হবে।

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\frac{BC}{AC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan \angle CAB$

$$\text{বা, } \frac{BC}{AC} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{12}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } AC = 12\sqrt{3}$$

আবার, $\frac{BC}{AB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin \angle CAB$

$$\text{বা, } \frac{BC}{AB} = \sin 30^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{12}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } AB = 24 \text{ মিটার}$$

$$\therefore \text{গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, } CD = (AD + AC)$$

$$= (AB + AC)$$

$$= 24 + 12\sqrt{3}$$

$$= 12(2 + \sqrt{3})$$

$$= 12(2 + 1.732050807)$$

$$= 12 \times 3.732050807$$

$$= 44.785 \text{ মিটার (প্রায়)}$$

অতএব, গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য = 44.785 মিটার (প্রায়)। (Ans.)

১৬। একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখালো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° । লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছল।

ক) উপরিউক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

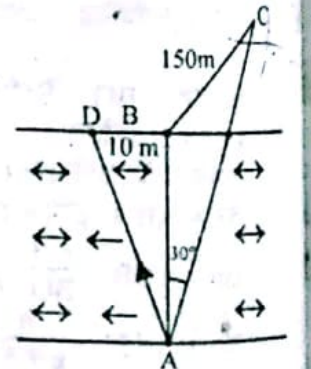
খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) উপরিউক্ত বর্ণনাটির চিত্র হলো—

মনে করি, একটি লোক A অবস্থানে থেকে $BC = 150$ m দৈর্ঘ্যের একটি গাছ লক্ষ্য করলো যার শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° । লোকটি গাছের দিকে যাত্রা শুরু করলে স্রোতের দরুন সে গাছ থেকে $BD = 10$ m দূরে গিয়ে উদ্ভিষ্ট তীরে পৌঁছাল।



খ) চিত্রে দেখা যাচ্ছে নদীর বিস্তার = AB

এখন $\triangle ABC$ -এ

$$\tan \angle BAC = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

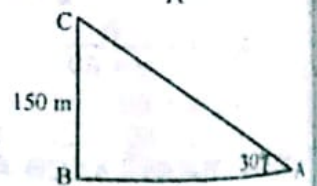
$$\text{বা, } \tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{AB}$$

$$\text{বা, } AB = 150\sqrt{3}$$

$$\therefore AB = 259.808 \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{নদীর বিস্তার } AB = 259.808 \text{ (প্রায়)}$$



৪. একটি B অবস্থানের গাড়ির দিকে যাত্রা শুরু করলে স্রোতের তানে সে গাড়ি থেকে 10 m দূরে D অবস্থানে তীরে পৌঁছায়। অর্থাৎ লোকটির যাত্রা ও গন্তব্য স্থানের দূরত্ব AD।



$$\begin{aligned} \text{বা, } AD &= \sqrt{AB^2 + BD^2} \\ \text{বা, } AD &= \sqrt{(259.808)^2 + (10)^2} \\ \text{বা, } AD &= \sqrt{67500.197 + 100} \\ \text{বা, } AD &= \sqrt{67600.197} \\ \therefore AD &\approx 260 \end{aligned}$$

\therefore লোকটির যাত্রা ও গন্তব্য স্থানের দূরত্ব 260 মিটার।



সৃজনশীল অংশ

৫. মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রদত্ত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $\sin 30^\circ =$ কত? [অরুণাচল পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ গ $\frac{1}{3}$ ঘ $\frac{1}{2}$ ⑤

২. $\tan \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{6}$ এর মান কত? [অরুণাচল পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $2\sqrt{3}$ খ 2 গ $\sqrt{3}$ ঘ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤

৩. $\tan^2 \theta - 4 \cos^2 \theta = 0$ হলে $\tan \theta =$ কত? [ডিউরির উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]

ক $\frac{1}{4}$ খ $\frac{4}{3}$ গ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ঘ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⑤

৪. ভূমি তলোন্নত কোনও সরল রেখাকে কী নামে অভিহিত করা হয়?

ক উর্ধ্বরেখা খ উল্লম্ব তল ⑤

গ অবনতি তল ঘ ভূ-রেখা

৫. ভূ-রেখার অপর নাম নিচের কোনটি?

ক উন্মুক্ত রেখা খ শয়ন রেখা ⑤

গ অবনতি রেখা ঘ উর্ধ্বরেখা

৬. উল্লম্ব রেখার আরেক নাম কোনটি?

ক ভূ-রেখা খ উর্ধ্বরেখা ⑤

গ শয়ন রেখা ঘ দৈর্ঘ্য রেখা

৭. কোন দুটি ত্রিকোণমিতিক উপাদান নিয়ে উল্লম্ব তল গঠিত হয়?

ক ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা ⑤

খ ভূ-রেখা ও শয়নরেখা

গ উন্মুক্ত রেখা ও অবনতি রেখা

ঘ দূরত্ব ও উচ্চতা

৮. সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 60° হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক ভূমি $>$ লম্ব খ ভূমি $<$ লম্ব ⑤

গ ভূমি $=$ লম্ব ঘ ভূমি \leq লম্ব

৯. সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 45° কোণের ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

ক ভূমি $>$ লম্ব খ ভূমি $<$ লম্ব ⑤

গ ভূমি $=$ লম্ব ঘ ভূমি \geq লম্ব

১০. $\tan 60^\circ$ এর মান কত?

ক $\frac{1}{2}$ খ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ $\sqrt{3}$ ⑤

১১. লম্বা একটি মই একটি দেওয়ালের উপর বরাবর দাঁড় করলে। মইর সর্বোচ্চ 45° কোণ উৎপন্ন করে। দেওয়ালের উচ্চতা কত? [প্রায়]

ক 11.78 (প্রায়) খ 12.77 (প্রায়) ⑤

গ 12.728 (প্রায়) ঘ 13.78 (প্রায়)

১২. একটি ঝুটিতে সূর্যের আলো পড়লে 2 মিটার দূরত্বে 45° উন্মুক্ত কোণ তৈরি করে। ঝুটিটির উচ্চতা কত মিটার?

ক 6 খ 4 গ 3 ঘ 2 ⑤

□ বহুপদী সমাপ্তিসূচক :

১৩. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর। [ডিউরির উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]

- $\cot \theta = \cos \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta$
 - পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin \theta)^n = \sin^n \theta$ লেখ।
 - $\sqrt{\frac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}} = \sqrt{2}$
- নিচের কোনটি সঠিক?
- ক i খ i ও iii ⑤
- গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১৪. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্রে— [চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল]

- $\sin 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ}$
- $\tan 45^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ}$
- $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ}$

উপরের তথ্যমতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ ii ⑤

গ i ও ii ঘ ii ও iii

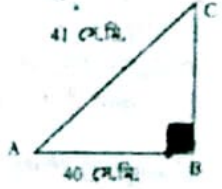
১৫. কোনো সমকোণী ত্রিভুজে ভূমি ও লম্বের ক্ষেত্রে—

- 45° কোণ অঙ্কনে এরা সমান
 - 30° কোণ অঙ্কনে ভূমি $>$ লম্ব
 - 60° কোণ অঙ্কনে ভূমি $<$ লম্ব
- নিচের কোনটি সঠিক?
- ক i ও ii খ i ও iii ⑤
- গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

■ অভিন্ন তথ্যভিত্তিক :

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ১৬ ও ১৭নং পর্যন্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\triangle ABC$ -এ $\angle Y = 90^\circ$
 $AB = 40$ সে.মি. এবং
 $AC = 41$ সে.মি.



১৬. BC এর মান কত সে.মি.?

ক 9 খ 29 গ 39 ঘ 49 ⑤

ব্যাখ্যা :

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{81} = 9$$

ক 9 খ 29 গ 39 ঘ 49 ⑤



MyMahbub..

□ অনুশীলনী- ১১.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

১। 3.5 : 5.6 কে 1 : a এবং b : 1 আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, 3.5 : 5.6

$$= 1 : \frac{5.6}{3.5} \quad [3.5 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$= 1 : 1.6$$

$$= 1 : a \quad [\text{যখন } a = 1.6]$$

∴ 3.5 : 5.6 কে 1 : a আকারে প্রকাশ করা হলো।

আবার, 3.5 : 5.6

$$= \frac{3.5}{5.6} : 1 \quad [5.6 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$= 0.625 : 1$$

$$= b : 1 \quad [\text{যখন } b = 0.625]$$

∴ 3.5 : 5.6 কে b : 1 আকারে প্রকাশ করা হলো।

□ কাজ : ২। x : y = 5 : 6 হলে 3x : 5y = কত? [পৃষ্ঠা-১৮০]

সমাধান :

দেওয়া আছে, x : y = 5 : 6

$$\text{বা, } \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$$

$$\text{বা, } \frac{3x}{y} = \frac{15}{6}$$

$$\text{বা, } \frac{3x}{5y} = \frac{15}{30}$$

$$\text{বা, } 3x : 5y = 15 : 30$$

$$\therefore 3x : 5y = 1 : 2 \quad (\text{Ans.})$$

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা-১৮২]

৩। মাতা ও কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি s বছর। তাদের বয়সের অনুপাত t বছর পূর্বে ছিল r : p, x বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান : মনে করি, মাতার বর্তমান বয়স a বছর এবং কন্যার বর্তমান বয়স b বছর। তাহলে

প্রশ্নানুসারে, a + b = s (i)

$$\frac{a-t}{b-t} = \frac{r}{p} \quad \text{..... (ii)}$$

এখন, ii নং থেকে পাই,

$$\frac{a-t}{r} = \frac{b-t}{p} = \frac{a+b-2t}{r+p} = \frac{s-2t}{r+p}$$

[i নং থেকে]

$$\therefore a-t = \frac{(s-2t)r}{r+p}$$

$$\text{বা, } a = \frac{(s-2t)r}{r+p} + t$$

$$\text{এবং } b-t = \frac{(s-2t)p}{r+p}$$

$$\text{বা, } b = \frac{(s-2t)p}{r+p} + t$$

∴ x বছর পরে মাতা ও কন্যার বয়সের অনুপাত

$$\begin{aligned} &= \frac{a+x}{b+x} \\ &= \frac{\frac{(s-2t)r}{r+p} + t + x}{\frac{(s-2t)p}{r+p} + t + x} \end{aligned}$$

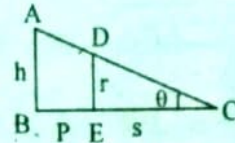
∴ x বছর পরে মাতা ও কন্যার বয়সের অনুপাত হবে,

$$\left\{ \frac{(s-2t)r}{r+p} + t + x \right\} : \left\{ \frac{(s-2t)p}{r+p} + t + x \right\} \quad (\text{Ans.})$$

□ কাজ :

৪। একটি ল্যাম্পপোস্ট থেকে p মিটার দূরে দাঁড়ানো r মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট এক ব্যক্তির ছায়ার দৈর্ঘ্য s মিটার। ল্যাম্পপোস্টের উচ্চতা h মিটার হলে, ঐ ব্যক্তি ল্যাম্পপোস্ট থেকে কত দূরে দাঁড়ানো ছিলেন? [পৃষ্ঠা-১৮২]

সমাধান :



মনে করি, ল্যাম্পপোস্টটির উচ্চতা, AB = h মিটার এবং

ব্যক্তির উচ্চতা, DE = r মিটার

ল্যাম্পপোস্ট থেকে ব্যক্তির দূরত্ব, BE = p মিটার

ব্যক্তির ছায়া, EC = s মিটার

∴ ল্যাম্পপোস্ট থেকে ছায়ার শেষ বিন্দুর দূরত্ব,

BC = (p + s) মিটার

যেহেতু, ছায়া উচ্চতার সমানুপাতিক

সূত্রাং, $r \propto s$

$$\text{বা, } r = ks \quad [k \text{ একটি ধ্রুবক}]$$

$$\text{বা, } \frac{r}{s} = k \quad \text{..... (i)}$$

আবার, চিত্র থেকে $h \propto (p + s)$

$$\text{বা, } h = k(p + s)$$

$$\text{বা, } \frac{h}{p + s} = k \quad \text{..... (ii)}$$

এখন (i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{h}{p + s} = \frac{r}{s}$

$$\text{বা, } hs = r(p + s)$$

$$\text{বা, } hs = rp + rs$$

$$\text{বা, } rp = hs - rs$$

$$\text{বা, } p = \frac{s(h - r)}{r}$$

$$\therefore p = \left(\frac{h}{r} - 1 \right) s \text{ মিটার}$$

∴ ল্যাম্পপোস্ট থেকে ব্যক্তির দূরত্ব,

$$p = \left(\frac{h}{r} - 1 \right) s \text{ মিটার।}$$

উত্তর : $\left(\frac{h}{r} - 1 \right) s$ মিটার।

বা, $\frac{a^2 - ab + b^2}{a - b + c} = a$ [উভয়পক্ষকে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = a(a - b + c)$ [আড়গুণন করে]

বা, $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + ac$

বা, $a^2 - ab + b^2 - a^2 + ab = ac$

বা, $b^2 = ac$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore a : b = b : c$

$\therefore a, b, c$ ক্রমিক সমানুপাতী। (প্রমাণিত)

উদাহরণ- ৯৯ যদি $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $c = a$

অথবা $a + b + c + d = 0$.

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$

বা, $\frac{a+b}{b+c} - 1 = \frac{c+d}{d+a} - 1$

বা, $\frac{a+b-b-c}{b+c} = \frac{c+d-d-a}{d+a} = 0$

বা, $\frac{a-c}{b+c} + \frac{a-c}{d+a} = 0$

বা, $(a-c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) = 0$

বা, $(a-c) \frac{(d+a+b+c)}{(b+c)(d+a)} = 0$

বা, $(a-c)(d+a+b+c) = 0$

হয় $a - c = 0$

বা, $a = c$

অর্থাৎ, $c = a$

অথবা, $a + b + c + d = 0$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ- ১০৯ যদি $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$ এবং x, y, z সকলে

পরস্পর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, প্রতিটি

অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

সমাধান: মনে করি, $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = k$

অতএব, $\frac{x}{y+z} = k$

$\therefore x = k(y+z)$ (i)

অনুরূপভাবে, $y = k(z+x)$ (ii)

এবং $z = k(x+y)$ (iii)

এখন, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$x - y = k(y+z) - k(z+x)$

বা, $x - y = k(y+z-z-x)$

বা, $x - y = k(y-x)$

বা, $x - y = -k(x-y)$

$\therefore k = -1$; [$\because x - y \neq 0$]

অর্থাৎ, প্রতিটি অনুপাতের মান $= -1$

আবার, সমীকরণ (i), (ii) এবং (iii) যোগ করে পাই,

$x + y + z = k(y+z) + k(z+x) + k(x+y)$

বা, $x + y + z = k(y+z+z+x+x+y)$

বা, $x + y + z = k(2x+2y+2z)$

বা, $x + y + z = 2k(x+y+z)$

বা, $2k = 1$ [$\because x + y + z \neq 0$]

$\therefore k = \frac{1}{2}$

\therefore প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান। (প্রমাণিত)

উদাহরণ- ১১১ যদি $ax = by = cz$ হয়, তবে দেখাও যে,

$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $ax = by = cz$

মনে করি, $ax = by = cz = k$;

তাহলে, $ax = k$ $by = k$ এবং $cz = k$

$\therefore x = \frac{k}{a}$ $\therefore y = \frac{k}{b}$ $\therefore z = \frac{k}{c}$

অতএব,

বামপক্ষ $= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$

$= \frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2}{\frac{k}{b} \cdot \frac{k}{c}} + \frac{\left(\frac{k}{b}\right)^2}{\frac{k}{c} \cdot \frac{k}{a}} + \frac{\left(\frac{k}{c}\right)^2}{\frac{k}{a} \cdot \frac{k}{b}}$

$= \frac{k^2}{a^2} \times \frac{bc}{k^2} + \frac{k^2}{b^2} \times \frac{ca}{k^2} + \frac{k^2}{c^2} \times \frac{ab}{k^2}$

$= \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} =$ ডানপক্ষ

\therefore বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$ (দেখানো হলো)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১১.১

১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার ও b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

সমাধান:

ধরি, ১ম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$

এবং ২য় " " " " $= b$

\therefore ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গমিটার

এবং ২য় " " " " $= b^2$ " "

অতএব, দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের নির্ণেয় অনুপাত $= a^2$

$: b^2$

২। একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর?

সমাধান: আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$,

এখানে $r =$ ব্যাসার্ধ

এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$,

এখানে $a =$ বর্গক্ষেত্রের বাহু।

প্রশ্নমতে, $a^2 = \pi r^2$

বা, $a = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$

এখন, বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$

এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $4a$

বৃত্তের পরিসীমা : বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $2\pi r : 4a$

$2\pi r : 4 \cdot r\sqrt{\pi} : [a \text{ এর মান বসিয়ে}]$

$$\frac{2\pi r}{2r} : \frac{2 \cdot 2r\sqrt{\pi}}{2r} = \pi : 2\sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{\pi} : 2 \text{ (Ans.)}$$

৬। দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ল. সা. গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, সংখ্যা দুটির অনুপাত = 3 : 4

মনে করি, একটি সংখ্যা = $3x$

\therefore অপর সংখ্যা = $4x$

এখন, $3x$ এবং $4x$ এর ল. সা. গু. = $12x$

প্রশ্নমতে, $12x = 180$

$$\therefore x = \frac{180}{12}$$

$$\therefore x = 15$$

\therefore একটি সংখ্যা = $3x = 3 \times 15 = 45$

এবং অপর সংখ্যা = $4x = 4 \times 15 = 60$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা দুটি হলো, 45 এবং 60

৮। একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা অনুপাত 1 : 4. অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

সমাধান :

অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত = 1 : 4

\therefore ধরি অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = x

এবং উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = $4x$

\therefore মোট ছাত্রসংখ্যা = $x + 4x = 5x$

\therefore অনুপস্থিত ছাত্র, মোট ছাত্র সংখ্যার = $\frac{x}{5x}$ অংশ

\therefore অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা, মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরা হার

$$= \frac{x}{5x} \times 100 = 20$$

\therefore নির্ণেয় অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার 20%

৯। একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হল। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ক্রয় মূল্য = 100 টাকা।

\therefore 28% ক্ষতিতে বিক্রয় মূল্য = $(100 - 28)$ টাকা

= 72 টাকা।

এখন বিক্রয় মূল্য : ক্রয় মূল্য = 72 : 100

$$= \frac{72}{4} : \frac{100}{4} \quad [4 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$= 18 : 25$$

\therefore নির্ণেয় অনুপাত = 18 : 25

৬। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5 : 2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

সমাধান :

মনে করি,

7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল = $5x$ বছর

7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল = $2x$ বছর

\therefore বর্তমানে পিতার বয়স হবে = $(2x + 7)$ বছর

\therefore বর্তমানে পুত্রের বয়স হবে = $(2x + 7)$ বছর

প্রশ্নমতে,

$$(5x + 7) + (2x + 7) = 70$$

$$\text{বা, } 5x + 7 + 2x + 7 = 70$$

$$\text{বা, } 7x + 14 = 70$$

$$\text{বা, } 7x = 70 - 14$$

$$\text{বা, } 7x = 56$$

$$\text{বা, } x = \frac{56}{7}$$

$$\therefore x = 8$$

$$\therefore \text{পিতার বর্তমান বয়স} = 5x + 7 = 40 + 7 = 47 \text{ বছর}$$

$$\therefore \text{পুত্রের বর্তমান বয়স} = 2x + 7 = 16 + 7 = 23 \text{ বছর}$$

$$5 \text{ বছর পর পিতার বয়স হবে} = 47 + 5 = 52 \text{ বছর}$$

$$5 \text{ বছর পর পুত্রের বয়স হবে} = 23 + 5 = 28 \text{ বছর}$$

$$\therefore 5 \text{ বছর পর পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে}$$

$$= 52 : 28$$

$$= 13 : 7 \text{ (Ans.)}$$

৭। যদি $a : b = b : c$ হয়, তবে নিম্নলিখিত দাবি গুলো প্রমাণ কর যে,

$$i) \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$$

সমাধান :

দেয়া আছে, $a : b = b : c$

মনে করি $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$; [এখানে k একটি ধ্রুবক]

$$\text{এখন } \frac{b}{c} = k \therefore b = ck$$

$$\text{এবং } \frac{a}{b} = k \therefore a = bk$$

$$= ck \cdot k \quad [b \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= ck^2$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2; [\because a = ck^2]$$

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{(ck^2)^2 + (ck)^2}{(ck)^2 + c^2}$$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{c^2k^4 + c^2k^2}{c^2k^2 + c^2}$$

$$= \frac{c^2k^2(k^2 + 1)}{c^2(k^2 + 1)} = k^2$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = k^2 = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

$$ii) a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = a^3 + b^3 + c^3$$

সমাধান : দেয়া আছে, $a : b = b : c$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\text{অর্থাৎ, } b^2 = ac$$

$$\text{এখন, বামপক্ষ} = a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{a} + \frac{a^2b^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2c^2}{c}$$

$$= \frac{a^2 \cdot ac \cdot c^2}{a} + \frac{(ac)^2 b^2}{b} + \frac{a^2 \cdot ac \cdot c^2}{c}$$

$$= \frac{a^3 \cdot c^3}{a} + \frac{(b^2)^2 b^2}{b} + \frac{a^3 c^3}{c}$$

$$= \frac{a^3 c^3}{a^3} + \frac{b^6}{b^3} + \frac{a^3 c^3}{c^3}$$

$$= \frac{a^3 c^3}{a^3} + \frac{b^3 \cdot b^3}{b^3} + \frac{a^3 c^3}{c^3} = c^3 + b^3 + a^3$$

অর্থাৎ, $a^3 + b^3 + c^3 =$ ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

এখন, $\frac{b}{c} = k \therefore b = ck$

এবং $\frac{a}{b} = k \therefore a = bk$

$= ck \cdot k; [\because b = ck]$

$= ck^2$

এখন, বামপক্ষ = $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}$

$= \frac{ck^2 \cdot ck \cdot c (ck^2 + ck + c)^3}{(ck^2 \cdot ck + ck \cdot c + c \cdot ck^2)^3}; [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}]$

$= \frac{c^3 k^3 (ck^2 + ck + c)^3}{(c^2 k^3 + c^2 k + c^2 k^2)^3}$

$= \frac{\{ck(ck^2 + ck + c)\}^3}{(c^2 k^3 + c^2 k + c^2 k^2)^3}$

$= \frac{(c^2 k^3 + c^2 k^2 + c^2 k)^3}{(c^2 k^3 + c^2 k + c^2 k^2)^3}$

$= \frac{(c^2 k^3 + c^2 k^2 + c^2 k)^3}{(c^2 k^3 + c^2 k^2 + c^2 k)^3}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

iv) $a - 2b + c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a : b = b : c$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\therefore a = bk, b = ck$

অর্থাৎ, $a = ck \cdot k = ck^2$

এখন, ১ম অংশ = $a - 2b + c$

$= ck^2 - 2ck + c$

$= c(k^2 - 2k + 1)$

$= c(k-1)^2$

২য় অংশ = $\frac{(a-b)^2}{a}$

$= \frac{(ck^2 - ck)^2}{ck^2} = \frac{\{ck(k-1)\}^2}{ck^2}$

$= \frac{c^2 k^2 (k-1)^2}{ck^2} = c(k-1)^2$

এবং ৩য় অংশ = $\frac{(b-c)^2}{c} = \frac{(ck - c)^2}{c}$

$= \frac{\{c(k-1)\}^2}{c} = \frac{c^2 (k-1)^2}{c} = c(k-1)^2$

\therefore ১ম অংশ = ২য় অংশ = ৩য় অংশ (প্রমাণিত)

৮। সমাধান কর :

i) $\frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

সমাধান: $\frac{1 - \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 - \sqrt{1-x} + 1 + \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt{1-x} - 1 - \sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$; [উভয়পক্ষকে (-2) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\sqrt{1-x} = 1$

বা, $(2\sqrt{1-x})^2 = (1)^2$; [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4(1-x) = 1$

বা, $4 - 4x = 1$

বা, $-4x = 1 - 4$

বা, $-4x = -3$

$\therefore x = \frac{3}{4}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান : $\frac{3}{4}$

ii) $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = b$

সমাধান: $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = b$

বা, $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

বা, $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

বা, $\left(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\right)^2 = \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{(b+1)^2}{(b-1)^2}$

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{b^2 + 2b + 1}{b^2 - 2b + 1}$

বা, $\frac{a+x+a-x}{a+x-a-x} = \frac{b^2 + 2b + 1 + b^2 - 2b + 1}{b^2 + 2b + 1 - b^2 + 2b - 1}$

[পুনঃ যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a}{2x} = \frac{2b^2 + 2}{2 \cdot 2b}$

বা, $\frac{a}{x} = \frac{2(b^2 + 1)}{2 \cdot 2b}$

বা, $\frac{a}{x} = \frac{b^2 + 1}{2b}$

বা, $x(b^2 + 1) = 2ab$ [বিক্রমগুণন করে]

বা, $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$

$$80) \frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x} \quad 2a > b > 0 \text{ এবং } x \neq 0$$

সমাধান : এখানে, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$

$$\text{বা, } \frac{(a+x-\sqrt{a^2-x^2}) + (a+x+\sqrt{a^2-x^2})}{(a+x-\sqrt{a^2-x^2}) - (a+x+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2} + a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2} - a-x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{2a+2x}{-2(\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{2(a+x)}{2(-\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} \right)^2 = \left(\frac{b+x}{b-x} \right)^2 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{(a^2+2ax+x^2) + (a^2-x^2)}{(a^2+2ax+x^2) - (a^2-x^2)} = \frac{(b^2+2bx+x^2) + (b^2-2bx+x^2)}{(b^2+2bx+x^2) - (b^2-2bx+x^2)} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{a^2+2ax+x^2+a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2-a^2+x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{2a^2+2ax}{2ax+2x^2} = \frac{2b^2+2x^2}{4bx}$$

$$\text{বা, } \frac{2(a^2+ax)}{2(ax+x^2)} = \frac{2(b^2+x^2)}{2 \cdot 2bx}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2+ax}{ax+x^2} = \frac{b^2+x^2}{2bx}$$

$$\text{বা, } \frac{a(a+x)}{x(a+x)} = \frac{b^2+x^2}{2bx}$$

$$\text{বা, } a = \frac{b^2+x^2}{2b}$$

$$\text{বা, } 2ab = b^2+x^2$$

$$\text{বা, } x^2 = 2ab - b^2$$

$$\text{বা, } x = \pm \sqrt{2ab - b^2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } x = \pm \sqrt{2ab - b^2}$$

$$91) \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-6}} = 5$$

সমাধান : $\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-6}} = 5$

$$\text{বা, } \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6}) + (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-6})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6}) - (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-6})} = \frac{5+1}{5-1}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-6}} = \frac{6}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-6}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{x-1}{x-6} = \frac{9}{4} \quad [\text{উভয় পক্ষে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 9x - 54 = 4x - 4$$

$$\text{বা, } 9x - 4x = -4 + 54$$

$$\text{বা, } 5x = 50$$

$$\text{বা, } x = \frac{50}{5} \therefore x = 10$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } x = 10$$

$$92) \frac{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b} - \sqrt{ax-b}} = C$$

সমাধান : $\frac{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b} - \sqrt{ax-b}} = \frac{c}{1}$

বা, $\frac{(\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b}) + (\sqrt{ax+b} - \sqrt{ax-b})}{(\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b}) - (\sqrt{ax+b} - \sqrt{ax-b})} = \frac{c+1}{c-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b} + \sqrt{ax+b} - \sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b} - \sqrt{ax+b} + \sqrt{ax-b}} = \frac{c+1}{c-1}$

বা, $\frac{2\sqrt{ax+b}}{2\sqrt{ax-b}} = \frac{c+1}{c-1}$

বা, $\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax-b}} = \frac{c+1}{c-1}$

বা, $\frac{ax+b}{ax-b} = \frac{(c+1)^2}{(c-1)^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{ax+b}{ax-b} = \frac{c^2+2c+1}{c^2-2c+1}$

বা, $(ax+b)(c^2-2c+1) = (ax-b)(c^2+2c+1)$

বা, $axc^2 - 2acx + ax + bc^2 - 2bc + b$

$= axc^2 + 2acx + ax - bc^2 - 2bc - b$

বা, $axc^2 - 2acx + ax + bc^2 - 2bc + b - axc^2$

$- 2acx - ax + bc^2 + 2bc + b = 0$

বা, $-4acx + 2bc^2 + 2b = 0$

বা, $-2acx + bc^2 + b = 0$

বা, $-2acx = -bc^2 - b$ [(-) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2acx = bc^2 + b$

$\therefore x = \frac{b(c^2+1)}{2ac}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{b(c^2+1)}{2ac}$

vi. $81 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

সমাধান : $81 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

বা, $81 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

বা, $81 = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}$

[উভয় পক্ষকে $\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^3$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^4 = \frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$

বা, $3^4 = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4$

বা, $\pm 3 = \frac{1+x}{1-x}$

এখন, যদি $\frac{1+x}{1-x} = 3$ হয় তবে

$1+x = 3(1-x)$

বা, $1+x = 3-3x$

বা, $x+3x = 3-1$

বা, $4x = 2$

আবার,

$\frac{1+x}{1-x} = -3$ হলে,

$1+x = -3(1-x)$

বা, $1+x = -3+3x$

বা, $1+3 = 3x-x$

বা, $4 = 2x$

$\therefore x = 2$

বা, $x = \frac{2}{4}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{2}, 2$

৯। $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে দেখাও যে,

i) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

সমাধান : দেয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk, c = dk$

এখন, বামপক্ষ = $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$

$= \frac{(bk)^2 + bk \cdot b + b^2}{(bk)^2 - bk \cdot b + b^2}$ [a-এর মান বসিয়ে]

$= \frac{b^2k^2 + b^2k + b^2}{b^2k^2 - b^2k + b^2}$

$= \frac{b^2(k^2 + k + 1)}{b^2(k^2 - k + 1)} = \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$

এবং ডানপক্ষ = $\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

$= \frac{(dk)^2 + dk \cdot d + d^2}{(dk)^2 - dk \cdot d + d^2}$

$= \frac{d^2k^2 + d^2k + d^2}{d^2k^2 - d^2k + d^2}$

$= \frac{d^2(k^2 + k + 1)}{d^2(k^2 - k + 1)} = \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{ac+bd}{ac-bd} = \frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

সমাধান : দেয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk, c = dk$

বামপক্ষ = $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(bk)^2 + b^2}{(bk)^2 - b^2}$

$= \frac{b^2k^2 + b^2}{b^2k^2 - b^2} = \frac{b^2(k^2 + 1)}{b^2(k^2 - 1)} = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$

মধ্যপক্ষ = $\frac{ac+bd}{ac-bd}$

$= \frac{bk \cdot dk + bd}{bk \cdot dk - bd}$

[মান বসিয়ে]

$= \frac{bdk^2 + bd}{bdk^2 - bd}$

$= \frac{bd(k^2 + 1)}{bd(k^2 - 1)} = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$

শেষ পক্ষ = $\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

$= \frac{(dk)^2 + d^2}{(dk)^2 - d^2}$

[মান বসিয়ে]

$$= \frac{d^2 k^2 + d^2}{d^2 k^2 - d^2}$$

$$= \frac{d^2 (k^2 + 1)}{d^2 (k^2 - 1)} = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

∴ বামপক্ষ = মধ্যপক্ষ = শেষপক্ষ

অর্থাৎ $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{ac + bd}{ac - bd} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 - d^2}$ (দেখানো হলো)

১০। $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

i) $\frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{b^3 + c^3}{c^3 + d^3}$

সমাধান :

দেয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k =$

∴ $a = bk, b = ck, c = dk$

অর্থাৎ $a = ck.k = dk.k^2 = dk^3$

এবং $b = ck = dk.k = dk^2$

এখন, বামপক্ষ, $\frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3}$

$$= \frac{(dk^3)^3 + (dk^2)^3}{(dk^2)^3 + (dk)^3} = \frac{d^3 k^9 + d^3 k^6}{d^3 k^6 + d^3 k^3}$$

$$= \frac{d^3 k^6 (k^3 + 1)}{d^3 k^3 (k^3 + 1)} = k^3$$

এবং ডানপক্ষ,

$$\frac{b^3 + c^3}{c^3 + d^3}$$

$$= \frac{(dk^2)^3 + (dk)^3}{(dk)^3 + d^3} = \frac{d^3 k^6 + d^3 k^3}{d^3 k^3 + d^3}$$

$$= \frac{d^3 k^3 (k^3 + 1)}{d^3 (k^3 + 1)} = k^3$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

ii) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

সমাধান : দেয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

∴ $a = bk, b = ck, c = dk$

অর্থাৎ $a = bk = ck.k = dk.k.k = dk^3$

এবং $b = ck = dk.k = dk^2$

এখন, বামপক্ষ

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$$

$$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\} \{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$$

$$= (d^2 k^6 + d^2 k^4 + d^2 k^2)(d^2 k^4 + d^2 k^2 + d^2)$$

$$= d^2 k^2 (k^4 + k^2 + 1) \cdot d^2 (k^4 + k^2 + 1)$$

$$= d^4 k^2 (k^4 + k^2 + 1)^2$$

আবার, ডানপক্ষ

$$= (ab + bc + cd)^2$$

$$= (dk^3 \cdot dk^2 + dk^2 \cdot dk + dk \cdot d)^2$$

$$= (d^2 k^5 + d^2 k^3 + d^2 k)^2$$

$$= \{d^2 k (k^4 + k^2 + 1)\}^2 = d^4 k^2 (k^4 + k^2 + 1)^2$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

১১। $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2, a \neq b$

সমাধান : দেয়া আছে, $x = \frac{4ab}{a+b}$

∴ $\frac{x}{2a} = \frac{4ab}{2a(a+b)}$ [উভয় পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{3b+a}{b-a}$ ----- (i)

আবার, $x = \frac{4ab}{a+b}$

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{4ab}{2b(a+b)}$ [উভয় পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$ ----- (ii)

এখন, (i) এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a-3a-b}{b-a}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2b-2a}{b-a}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2(b-a)}{(b-a)}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$

∴ $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$ (দেখানো হল)

১২। $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

সমাধান : দেয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} + \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} - \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$$

$$\text{বা, } \frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \frac{(\sqrt[3]{m+1})^3}{(\sqrt[3]{m-1})^3} \quad [\text{উভয় পক্ষকে ঘন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{m+1}{m-1}$$

$$\text{বা, } \frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2x^3+2.3x}{2.3x^2+2} = \frac{2m}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)} = \frac{m}{1}$$

$$\text{বা, } \frac{x^3+3x}{3x^2+1} = \frac{m}{1}$$

$$\text{বা, } x^2+3x = m(3x^2+1) \quad [\text{বঙ্গগুণন করে}]$$

$$\text{বা, } x^3+3x = 3mx^2+m$$

$$\therefore x^3-3mx^2+3x-m = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

$$১৩। x = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}} \text{ হলে, দেখাও যে, } 3bx^2 - 4ax + 3b = 0$$

$$\text{সমাধান : দেয়া আছে, } x = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b} + \sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b} - \sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(\sqrt{2a+3b})^2}{(\sqrt{2a-3b})^2} \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = \frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$$

$$[\text{পুন: যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2x^2+2}{2.2x} = \frac{2.2a}{2.3b}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^2+1)}{2.2x} = \frac{2.2a}{2.3b}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$$

$$\text{বা, } 3b(x^2+1) = 2a.2x$$

$$\text{বা, } 3bx^2+3b = 4ax$$

$$\therefore 3bx^2-4ax+3b = 0 \quad (\text{দেখানো হলো})$$

$$১৪। \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } a, b, c \text{ ক্রমিক সমানুপাতী।}$$

$$\text{সমাধান : দেয়া আছে, } \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$$

$$\text{বা, } (a^2+b^2)(b+c)^2 = (b^2+c^2)(a+b)^2$$

$$\text{বা, } (a^2+b^2)(b^2+2bc+c^2) = (b^2+c^2)(a^2+2ab+b^2)$$

$$\text{বা, } a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2+b^4+2b^3c+b^2c^2 = a^2b^2+2ab^3+b^4+a^2c^2+2abc^2+b^2c^2$$

$$\text{বা, } a^2b^2-a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2-a^2c^2+b^4-b^4+2b^3c+b^2c^2-b^2c^2 = 2ab^3+2abc^2$$

$$\text{বা, } 2a^2bc+2b^3c = 2ab^3+2abc^2$$

$$\text{বা, } a^2c+b^2c = ab^2+ac^2$$

$$[\text{উভয় পক্ষকে } 2b \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } a^2c-ac^2 = ab^2-b^2c$$

$$\text{বা, } ac(a-c) = b^2(a-c)$$

$$\text{বা, } ac = b^2 \quad [\text{উভয় পক্ষকে } (a-c) \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\text{অর্থাৎ } a, b, c \text{ ক্রমিক সমানুপাতী (প্রমাণিত)}$$

$$১৫। \frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$$

$$\text{সমাধান : মনে করি, } \frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$$

$$\therefore x = k(b+c), y = k(c+a), z = k(a+b)$$

$$১ম পক্ষ = \frac{a}{y+z-x} = \frac{a}{k(c+a)+k(a+b)-k(b+c)}$$

$$= \frac{a}{k(c+a+a+b-b-c)} = \frac{a}{2ak} = \frac{1}{2k}$$

$$২য় পক্ষ = \frac{b}{z+x-y}$$

$$= \frac{b}{k(a+b)+k(b+c)-k(c+a)}$$

$$= \frac{b}{k(a+b+b+c-c-a)} = \frac{b}{2bk} = \frac{1}{2k}$$

$$৩য় পক্ষ = \frac{c}{x+y-z}$$

$$= \frac{c}{k(b+c)+k(c+a)-k(a+b)}$$

$$= \frac{c}{k(b+c+c+a-a-b)} = \frac{c}{2ck} = \frac{1}{2k}$$

$$\therefore ১ম পক্ষ = ২য় পক্ষ = ৩য় পক্ষ \quad (\text{প্রমাণিত})$$

$$১৬। \frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\text{সমাধান : ধরি, } \frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = k$$

$$\therefore bz-cy = ak \quad \text{-- (i)}$$

$$cx-az = bk \quad \text{-- (ii)}$$

$$ay-bx = ck \quad \text{-- (iii)}$$

সমীকরণ (i) কে a, (ii) কে b এবং (iii) কে c দ্বারা গুণ করে

$$\begin{aligned} \text{পাই, } abz - acy &= a^2k \\ bcx - abz &= b^2k \\ acy - bcx &= c^2k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+) \text{ করে } 0 &= a^2k + b^2k + c^2k \\ \text{বা, } a^2k + b^2k + c^2k &= 0 \\ \text{বা, } k(a^2 + b^2 + c^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

i) নং সমীকরণে $k = 0$ বসিয়ে পাই,

$$bz - cy = a \cdot 0$$

$$\text{বা, } bz - cy = 0$$

$$\text{বা, } bz = cy$$

$$\text{বা, } \frac{z}{c} = \frac{y}{b}$$

[উভয় পক্ষকে bc দ্বারা ভাগ করে]

ii) নং সমীকরণে $k = 0$ বসিয়ে পাই,

$$cx - az = b \cdot 0$$

$$\text{বা, } cx - az = 0$$

$$\text{বা, } cx = az$$

$$\text{বা, } \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$$

[উভয় পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে]

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$১৭। \frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a} \text{ এবং } a+b+c \neq 0$$

হলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

$$\text{সমাধান : এখানে আছে, } \frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c}$$

$$\text{বা, } \frac{a+b-c-a-b}{a+b} = \frac{b+c-a-b-c}{b+c}$$

[বয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{-c}{a+b} = \frac{-a}{b+c}$$

$$\text{বা, } \frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c}$$

$$\text{বা, } \frac{c+a+b}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c}$$

[যোজন করে]

যেহেতু, $a+b+c \neq 0$ সুতরাং $a+b+c$ দ্বারা উভয় পক্ষকে

$$\text{ভাগ করে পাই, } \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c}$$

$$\text{বা, } a+b = b+c$$

$$\text{বা, } a+b-b = c$$

$$\therefore a = c \text{ (i)}$$

$$\text{আবার, } \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$$

$$\text{বা, } \frac{b+c-a-b-c}{b+c} = \frac{c+a-b-c-a}{c+a}$$

[বয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{-a}{b+c} = \frac{-b}{c+a}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$$

$$\text{বা, } \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{b+c+a}{c+a}$$

[যোজন করে]

যেহেতু $a+b+c \neq 0$, সুতরাং $(a+b+c)$ দ্বারা উভয়

$$\text{পক্ষকে ভাগ করে পাই, } \frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a}$$

$$\text{বা, } c+a = b+c$$

$$\text{বা, } c+a-c = b$$

$$\therefore a = b \text{ (ii)}$$

(i) এবং (ii) থেকে পাই, $a = b = c$ (প্রমাণিত)

$$১৮। \frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc} \text{ এবং } x+y+z \neq 0 \text{ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাতের মান} = \frac{1}{a+b+c}$$

সমাধান : মনে করি,

$$\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc} = k$$

$$\therefore x = k(xa+yb+zc) \text{ (i)}$$

$$y = k(ya+zb+xc) \text{ (ii)}$$

$$\text{এবং } z = k(za+xb+yc) \text{ (iii)}$$

সমীকরণ (i), (ii) এবং (iii) নং যোগ করে পাই,

$$\begin{aligned} x+y+z &= k(xa+yb+zc+ya+zb+xc+za+xb+yc) \\ &= k(xa+xb+xc+ya+yb+yc+za+zb+zc) \\ &= k\{x(a+b+c)+y(a+b+c)+z(a+b+c)\} \\ &= k(a+b+c)(x+y+z) \end{aligned}$$

$$\therefore x+y+z = k(a+b+c)(x+y+z)$$

উভয় পক্ষকে $(x+y+z)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$1 = k(a+b+c)$$

$$\therefore k = \frac{1}{a+b+c}$$

যেহেতু প্রতিটি অনুপাতের মান k ধরা হয়েছে

$$\text{সেহেতু } k \text{ এর মান} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\text{অতএব, প্রতিটি অনুপাতের মান} = \frac{1}{a+b+c} \text{ (দেখানো হল)}$$

$$১৯। (a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s \text{ হয়,}$$

$$\text{তবে প্রমাণ কর যে, } \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$$

সমাধান : দেয়া আছে,

$$(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } \frac{1}{(a+b+c)p} &= \frac{1}{(b+c-a)q} \\ &= \frac{1}{(c+a-b)r} = \frac{1}{(a+b-c)s} \end{aligned}$$

[বিপরীতকরণ করে]

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } \frac{1}{(a+b+c)p} &= \frac{1}{(b+c-a)q} \\ &= \frac{1}{(c+a-b)r} = \frac{1}{(a+b-c)s} = k \end{aligned}$$

$$\text{এখন, } \frac{1}{(a+b+c)p} = k$$

$$\text{বা, } \frac{1}{p} = k(a+b+c) \text{ (i)}$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{(b+c-a)q} = k$$

$$\therefore \frac{1}{q} = k(b+c-a)$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{(c+a-b)r} = k$$

$$\therefore \frac{1}{r} = k(c+a-b)$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{(a+b-c)s} = k$$

$$\therefore \frac{1}{s} = k(a+b-c)$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$$

$$= k(b+c-a) + k(c+a-b) + k(a+b-c)$$

[q, r, s এর মান বসিয়ে]

$$= k(b+c-a+c+a-b+a+b-c)$$

$$= k(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{p} \text{ [(i) -এর সাহায্যে]}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}।$$

$$২০। \text{ যদি } lx = my = nz \text{ হয়, তবে দেখাও যে, } \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$$

$$= \frac{mn}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} + \frac{l^2}{n^2}$$

সমাধান : দেয়া আছে, $lx = my = nz$

$$\therefore lx = my$$

$$\text{বা, } \frac{x}{y} = \frac{m}{l} \text{ অথবা, } \frac{y}{x} = \frac{l}{m}$$

$$\text{আবার, } my = nz$$

$$\therefore \frac{y}{z} = \frac{n}{m} \text{ অথবা, } \frac{z}{y} = \frac{m}{n}$$

$$\text{এবং } lx = nz$$

$$\text{বা, } \frac{x}{z} = \frac{n}{l} \text{ অথবা, } \frac{z}{x} = \frac{l}{n}$$

$$\text{এখন, বাম পক্ষ} = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$$

$$= \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \cdot \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y}$$

$$= \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{l} + \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{m} + \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{n} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{mn}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} + \frac{l^2}{n^2} = \text{ডান পক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ (দেখানো হলো)}$$

$$২১। \text{ যদি } \frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2} \text{ এবং } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}} \text{ হয়, তবে দেখাও যে,}$$

$$\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$$

$$\text{সমাধান : দেওয়া আছে, } \frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}} \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ ও } (ii) \text{ নং থেকে পাই, } \frac{p}{q} = \frac{(\sqrt{a+q})^2}{(\sqrt{a-q})^2}$$

$$\text{বা, } \frac{p}{q} = \frac{a+q}{a-q}$$

$$\text{বা, } \frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-(a-q)} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$$

$$\text{বা, } \frac{p+q}{p-q} = \frac{2a}{2q}$$

$$\text{বা, } \frac{p+q}{p-q} = \frac{a}{q}$$

$$\text{বা, } \frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q} \text{ (দেখানো হলো)}$$

□ অনুশীলনী- ১১.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা-১১১]

১। তোমাদের শ্রেণিতে ৩৫ জন ছাত্র ও ২৫ জন ছাত্রী আছে। বনভোজনে খিচুরি খাওয়ার জন্য প্রত্যেক ছাত্র ও ছাত্রীর প্রদত্ত চাল ও ডালের অনুপাত যথাক্রমে ৩ : ১ এবং ৫ : ২ হলে, মোট চাল ও মোট ডালের অনুপাত বের কর।

সমাধান : মনে করি, প্রত্যেক ছাত্রের চালের পরিমাণ ৩x একক

\therefore ৩৫ জন ছাত্রের চালের পরিমাণ $(35 \times 3x)$ বা $105x$ একক
প্রত্যেক ছাত্রের ডালের পরিমাণ x একক

\therefore ৩৫ জন ছাত্রের ডালের পরিমাণ $(35 \times x)$ বা $35x$ একক
আবার, মনে করি, প্রত্যেক ছাত্রীর চালের পরিমাণ ৫x একক
 \therefore ২৫ জন ছাত্রীর চালের পরিমাণ $(25 \times 5x)$ বা $125x$ একক
এবং ডালের পরিমাণ ২x একক
২৫ ছাত্রীর ডালের পরিমাণ $(25 \times 2x)$ বা $50x$ একক
 \therefore মোট চালের পরিমাণ $(105x + 125x)$ বা $230x$ একক
মোট ডালের পরিমাণ $(35x + 50x)$ বা $85x$ একক
 \therefore মোট চাল : মোট ডাল = $230x : 85x = 46 : 17$

[5x দ্বারা ভাগ করে]

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ১২১ ক, খ ও গ এক জাতীয় রাশি এবং ক : খ = ৩ :

৪, খ : গ = ৬ : ৭ হলে, ক : খ : গ কত?

সমাধান: $\frac{ক}{খ} = \frac{৩}{৪} = \frac{৩ \times ৩}{৪ \times ৩} = \frac{৯}{১২}$ এবং $\frac{খ}{গ} = \frac{৬}{৭} = \frac{৬ \times ২}{৭ \times ২} = \frac{১২}{১৪}$ [এখানে ৪ ও ৬ এর ল.সা.গু: ১২]

∴ ক : খ : গ = ৯ : ১২ : ১৪. (Ans.)

উদাহরণ- ১৩১ একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত ৩ : ৪ : ৫; কোণ তিনটি ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = ১৮০°

মনে করি, প্রদত্ত অনুপাত অনুসারে কোণ তিনটি যথাক্রমে ৩x, ৪x এবং ৫x.

প্রশ্নানুসারে, ৩x + ৪x + ৫x = ১৮০° বা, x = ১৫°

অতএব, কোণ তিনটি হলো ৩x = ৩ × ১৫° = ৪৫°

$$৪x = ৪ \times ১৫° = ৬০°$$

$$\text{এবং } ৫x = ৫ \times ১৫° = ৭৫° \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ- ১৪১ যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ ১০% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান: মনেকরি, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার।

∴ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল a^২ বর্গমিটার।

১০% বৃদ্ধি পেলে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হয় (a + a এর ১০%) মিটার বা ১.১০a মিটার।

এক্ষেত্রে, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল (১.১০a)^২ বর্গমিটার বা ১.২১a^২ বর্গমিটার

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় (১.২১a^২ - a^২) = ০.২১a^২ বর্গমিটার

∴ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পাবে $\frac{০.২১a^২}{a^২} \times ১০০\% = ২১\%$

(Ans.)

উদাহরণ- ১৫১ তিন ব্যক্তির মধ্যে ৫১০০ টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন, ১ম ব্যক্তির অংশ : ২য় ব্যক্তির অংশ : ৩য় ব্যক্তির অংশ = $\frac{১}{২} : \frac{১}{৩} : \frac{১}{৯}$ হয়।

সমাধান: এখানে $\frac{১}{২} : \frac{১}{৩} : \frac{১}{৯} = \left(\frac{১}{২} \times ১৮\right) : \left(\frac{১}{৩} \times ১৮\right) : \left(\frac{১}{৯} \times ১৮\right)$ [২, ৩ ও ৯ এর ল.সা.গু. ১৮]

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = ৯ + ৬ + ২ = ১৭

১ম ব্যক্তির অংশ = $\frac{৩০০}{১৭} = \frac{৯}{১৭}$ টাকা = ২৭০০ টাকা

২য় ব্যক্তির অংশ = $\frac{৩০০}{১৭} = \frac{৬}{১৭}$ টাকা = ১৮০০ টাকা

৩য় ব্যক্তির অংশ = $\frac{৩০০}{১৭} = \frac{২}{১৭}$ টাকা = ৬০০ টাকা

অতএব তিন ব্যক্তি যথাক্রমে ২৭০০ টাকা, ১৮০০ টাকা এবং ৬০০ টাকা পাবেন।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১১২

১। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক $a^2 = bc$

খ $b^2 = ac$

গ $ab = bc$

ঘ $a = b = c$

উত্তর : খ $b^2 = ac$

২। আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত ৫ : ৩; আরিফের বয়স ২০ বছর হলে, কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত ৭ : ৫ হবে?

ক ৫ বছর

খ ৬ বছর

গ ৮ বছর

ঘ ১০ বছর

উত্তর : গ. ৮ বছর।

৩। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর :

i. সমানুপাতের চারটি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন হয় না।

ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের ভূমিখণ্ডের অনুপাতের সমান।

iii. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, এদের প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ ।

ওপরের তথ্যগুলোর ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii

খ ii ও iii

গ i ও iii

ঘ i, ii ও iii

উত্তর : গ. i ও iii

ΔABC এর কোণগুলোর অনুপাত ২ : ৩ : ৫ এবং ABCD

চতুর্ভুজের কোণ চারটির অনুপাত ৩ : ৪ : ৫ : ৬

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৪। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে উহার ক্ষেত্রফল কতগুণ বৃদ্ধি পাবে।

ক ২ গুণ

খ ৪ গুণ

গ ৮ গুণ

ঘ ৬ গুণ

উত্তর : খ. ৪।

৫। x : y = ৭ : ৫, y : z = ৫ : ৭ হলে x : z = কত ?

ক ৩৫ : ৪৯

খ ৩৫ : ৩৫

গ ২৫ : ৪৯

ঘ ৪৯ : ২৫

উত্তর : খ. ৩৫ : ৩৫.

৬। একটি কাঠের পুল তৈরির প্রাকল্পিত ব্যয় ৯০,০০০ টাকা। কিন্তু খরচ বেশি হয়েছে ২১,৬০০ টাকা। খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পেয়েছে?

সমাধান :

৯০০০০ টাকায় বৃদ্ধি ২১৬০০ টাকা

$$\therefore 1 \text{ " " } = \frac{21600}{90000} \text{ টাকা}$$

$$\therefore 100 \text{ " " } = \frac{21600 \times 100}{90000} = 24 \text{ টাকা}$$

অতএব, খরচ বৃদ্ধির নির্ণয় হার = ২৪% (Ans.)

৭। ধানে চাল ও তুণের অনুপাত ৭ : ৩ হলে, এতে শতকরা কি পরিমাণ চাল আছে?

সমাধান : মনে করি শতকরা চালের পরিমাণ = x

$$\therefore \text{তুণের পরিমাণ} = (100 - x)$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } x : (100 - x) = 7 : 3$$

$$\text{বা, } \frac{x}{100 - x} = \frac{7}{3}$$

$$\text{বা, } 3x = 7(100 - x)$$

$$\text{বা, } 3x = 700 - 7x$$

$$\text{বা, } 3x + 7x = 700$$

$$\text{বা, } 10x = 700$$

$$\text{বা, } x = \frac{700}{10}$$

$$\therefore x = 70$$

অতএব, চালের নির্ণয় পরিমাণ ৭০% (Ans.)

৮। ১ ঘন সে.মি. কাঠের ওজন ৭ ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

সমাধান : আমরা জানি,

১ ঘন সে.মি. পানির ওজন = ১০ ডেসিগ্রাম।

দেওয়া আছে ১ ঘন সে.মি. কাঠের ওজন ৭ ডেসিগ্রাম।

কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা ভাগ বলতে বুঝি

$$= \frac{\text{কাঠের ওজন}}{\text{পানির ওজন}} \times 100$$

$$= \frac{7}{10} \times 100 = 70\%$$

অতএব, কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের ৭০% (Ans.)

৯। ক, খ, গ ও ঘ এর মধ্যে ৩০০ টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = ২ : ৩, খ এর অংশ : গ এর অংশ = ১ : ২ এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ ৩ : ২ হয়।

সমাধান : এখানে, ক : খ = ২ : ৩ = ২ : ৩

$$\text{খ : গ} = ১ : ২ = ৩ : ৬$$

$$\text{এবং গ : ঘ} = ৩ : ২ = ৬ : ৪$$

$$\therefore \text{ক : খ : গ : ঘ} = ২ : ৩ : ৬ : ৪$$

$$\therefore \text{অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল} = (২ + ৩ + ৬ + ৪) = ১৫$$

এখানে, মোট টাকার পরিমাণ = ৩০০ টাকা

$$\therefore \text{ক এর টাকার পরিমাণ} = ৩০০ \text{ টাকার } \frac{২}{১৫} \text{ অংশ} = ৪০ \text{ টাকা}$$

$$\text{খ এর টাকার পরিমাণ} = ৩০০ \text{ টাকার } \frac{৩}{১৫} \text{ অংশ} = ৬০ \text{ টাকা}$$

$$\text{গ এর টাকার পরিমাণ} = ৩০০ \text{ টাকার } \frac{৬}{১৫} \text{ অংশ} = ১২০ \text{ টাকা}$$

\therefore ঘ এর টাকার পরিমাণ = ৩০০ টাকার $\frac{৪}{১৫}$ অংশ = ৮০ টাকা
অতএব, ক, খ, গ ও ঘ যথাক্রমে ৪০, ৬০, ১২০ ও ৮০ টাকা পাবে। (Ans.)

১০। তিনজন জেলে ৬৯০ টি মাছ ধরেছে। তাদের কাদের অনুপাত $\frac{২}{৩}$, $\frac{৪}{৫}$, এবং $\frac{৫}{৬}$ হলে কে কয়টি মাছ পেল?

সমাধান : দেওয়া আছে, জেলেদের মাছের অংশের অনুপাত

$$= \frac{২}{৩} : \frac{৪}{৫} : \frac{৫}{৬}$$

$$= \left(\frac{২}{৩} \times ৩০\right) : \left(\frac{৪}{৫} \times ৩০\right) : \left(\frac{৫}{৬} \times ৩০\right)$$

[প্রত্যেক অনুপাতকে ৩০ দ্বারা গুণ করে]

$$= ২০ : ২৪ : ২৫$$

$$\text{অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল} = ২০ + ২৪ + ২৫ = ৬৯$$

$$১ম জেলে পাবে = ৬৯০ এর $\frac{২০}{৬৯} = ২০০$ টি$$

$$২য় জেলে পাবে = ৬৯০ এর $\frac{২৪}{৬৯} = ২৪০$ টি$$

$$৩য় জেলে পাবে = ৬৯০ এর $\frac{২৫}{৬৯} = ২৫০$ টি$$

তিনজন জেলে মাছ পেল যথাক্রমে ২০০ টি, ২৪০ টি ও ২৫০ টি (Ans.)

১১। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা ৪৫ সে.মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত ৩:৫:৭ হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ত্রিভুজের পরিসীমা ৪৫ সে.মি.

$$\text{বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত} = ৩ : ৫ : ৭$$

$$\therefore \text{অনুপাতের যোগফল} = ৩ + ৫ + ৭ = ১৫$$

$$\text{এখন, প্রথম বাহুর পরিমাণ} = ৪৫ এর $\frac{৩}{১৫} = ৯$ সে.মি.$$

$$\text{দ্বিতীয় " " } = ৪৫ এর $\frac{৫}{১৫} = ১৫$ সে.মি.$$

$$\text{এবং তৃতীয় " " } = ৪৫ এর $\frac{৭}{১৫} = ২১$ সে.মি.$$

অতএব, তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে, ৯ সে.মি., ১৫ সে.মি., ও ২১ সে.মি. (Ans.)

১২। ১০১১ টাকাকে $\frac{৩}{৪} : \frac{৪}{৫} : \frac{৬}{৭}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

সমাধান : এখানে, প্রদত্ত অনুপাত $\frac{৩}{৪} : \frac{৪}{৫} : \frac{৬}{৭}$

$$= \frac{৩}{৪} \times ১৪০ : \frac{৪}{৫} \times ১৪০ : \frac{৬}{৭} \times ১৪০$$

$$= ১০৫ : ১১২ : ১২০$$

[৪, ৫ ও ৭ এর ল.সা.গু ১৪০ দ্বারা গুণ করে]

$$\therefore \text{অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল} = ১০৫ + ১১২ + ১২০ = ৩৩৭$$

$$\text{এখন, প্রথম অংশ} = ১০১১ এর $\frac{১০৫}{৩৩৭} = ৩১৫$ টাকা$$

$$\text{দ্বিতীয় " " } = ১০১১ এর $\frac{১১২}{৩৩৭} = ৩৩৬$ "$$

$$\text{এবং তৃতীয় " " } = ১০১১ এর $\frac{১২০}{৩৩৭} = ৩৬০$ "$$

অতএব বিভক্ত অংশগুলো হলো ৩১৫ টাকা, ৩৩৬ টাকা ও ৩৬০ টাকা। (Ans.)

১৩। দুইটি সংখ্যার অনুপাত ৫:৭ এবং তাদের গ.সা.গু ৪ হলে সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু কত?

সমাধান : দুইটি সংখ্যার অনুপাত = ৫ : ৭

মনেকরি, সংখ্যা দুইটি $5x$ ও $7x$ এর ল.সা.গু = $35x$

$$\text{বা, } 5x \times 7x = 4 \times 35x$$

$$\text{বা, } 35x^2 = 140x$$

$$\text{বা, } 35x = 140$$

$$\text{বা, } x = \frac{140}{35}$$

$$\therefore x = 4$$

$$\therefore \text{ল.সা.গু} = 35x = 35 \times 4 = 140$$

অতএব, সংখ্যা দুইটি ল.সা.গু ১৪০ (Ans.)

১৪। ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী একত্রে ১৭১ রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুর এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত ৩ : ২ হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান : দেয়া আছে, তিনজনের মোট রান = ১৭১

$$\text{আবার, সাকিবের রান : মুশফিকুর রান} = 3 : 2$$

$$\text{এক মুশফিকুর রান : মাশরাফীর রান} = 3 : 2$$

$$\therefore \text{সাকিব : মুশফিকুর} = 3 : 2 = 9 : 6 \text{ (৩ দ্বারা গুণ করে)}$$

$$\text{মুশফিকুর : মাশরাফী} = 3 : 2 = 6 : 4 \text{ (২ দ্বারা গুণ করে)}$$

$$\text{সাকিব : মুশফিকুর : মাশরাফী} = 9 : 6 : 4$$

মনে করি, সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফীর রান যথাক্রমে $9x$, $6x$ এবং $4x$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 9x + 6x + 4x = 171$$

$$\text{বা, } 19x = 171$$

$$\therefore x = \frac{171}{19} = 9$$

$$\therefore \text{সাকিবের রান} = 9 \times 9 = 81$$

$$\text{মুশফিকুর রান} = 6 \times 9 = 54$$

$$\text{মাশরাফীর রান} = 4 \times 9 = 36 \text{ (Ans.)}$$

১৫। একটি অফিসে ২ জন কর্মকর্তা, ৭ জন করণিক এবং ৩ জন পিওন আছে। একজন পিওন ১ টাকা পেলে একজন করণিক পায় ২ টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় ৪ টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন ১৫০,০০০ টাকা হলে, কে কত বেতন পাবে?

সমাধান : ১ জন পিওন ১ টাকা পেলে ৩ জন পিওন পায় ৩ টাকা

১ জন করণিক ২ টাকা পেলে ৭ জন করণিক পায় ১৪ টাকা

১ জন কর্মকর্তা ৪ টাকা পেলে ২ কর্মকর্তা পায় ৮ টাকা

৩ জন পিওন, ৭ জন করণিক ও ২ জন কর্মকর্তার বেতনের অনুপাত ৩ : ১৪ : ৮

$$\therefore \text{মোট আনুপাতিক ভাগ} = 3 + 14 + 8 = 25$$

এখানে, মোট টাকার পরিমাণ = ১৫০,০০০ টাকা

$$\text{সুতরাং, ৩ জন পিওনের মোট বেতনের অংশ} = \frac{3}{25} \times 150,000 = 18000 \text{ টাকা}$$

$$\therefore ১ জন পিওন বেতন পায় = (18000 \div 3) \text{ টাকা বা, } 6000 \text{ টাকা।}$$

$$৭ জন করণিকের মোট বেতনের অংশ = \frac{14}{25} \times 150,000 \text{ টাকা} = 84,000 \text{ টাকা}$$

$$\therefore ১ জন করণিকের বেতন = (84,000 \div 7) \text{ টাকা} = 12000 \text{ টাকা।}$$

$$২ জন কর্মকর্তার মোট বেতনের অংশ = \frac{8}{25} \times 150,000 \text{ টাকা} = 48,000 \text{ টাকা}$$

$$\therefore ১ জন কর্মকর্তার বেতন = (48,000 \div 2) \text{ টাকা} = 24,000 \text{ টাকা}$$

অতএব, প্রত্যেক কর্মকর্তা পাবে ২৪,০০০ টাকা

প্রত্যেক করণিক পাবে ১২০০০ টাকা

প্রত্যেক পিওন পাবে ৬০০০ টাকা

(Ans.)

১৬। একটি সমিতির নেতা নির্বাচনে দুইজন প্রতিদ্বন্দ্বীর মধ্যে জোনাল সাহেব ৪ : ৩ ভোটে জয়লাভ করলেন। যদি মোট সদস্য সংখ্যা ৫৪১ হয় এবং ৭১ জন সদস্য ভোট না দিয়ে থাকে, তবে জোনাল সাহেবের প্রতিদ্বন্দ্বী কত ভোটের ব্যবধানে পরাজিত হয়েছেন?

সমাধান : এখানে, জোনাল ও তার প্রতিদ্বন্দ্বীর প্রাপ্য ভোটের অনুপাত ৪ : ৩

মোট আনুপাতিক ভাগ = $4 + 3 = 7$

ভোটদাতা সদস্যের সংখ্যা = $(581 - 91)$ জন = ৪৯০ জন

সুতরাং, জোনালের প্রাপ্য ভোটের সংখ্যা = $\frac{4}{7} \times 490 = 280$

\therefore প্রতিদ্বন্দ্বীর ভোটের সংখ্যা = $\frac{3}{7} \times 490 = 210$

\therefore ভোটের ব্যবধান = $(280 - 210)$ বা ৭০ (Ans.)

১৭। যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ ২০% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান : মনে করি, বর্গক্ষেত্রে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = x

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ একক

এখন, বাহুর ১০০ এককে বৃদ্ধি পায় ২০ একক

$$\therefore \text{ " 1 " " " " } = \frac{20}{100} \text{ " "}$$

$$\therefore \text{ " x " " " " } = \frac{20 \times x}{100}$$

$$\text{বা, } = \frac{x}{5} \text{ " "}$$

প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ হবে, $\left(x + \frac{x}{5}\right)$ একক

$$= \frac{5x + x}{5} \text{ " "}$$

$$= \frac{6x}{5} \text{ একক।}$$

\therefore নতুন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\left(\frac{6x}{5}\right)^2$ বর্গ একক

$$= \frac{36x^2}{25} \text{ " "}$$

\therefore ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় = $\left(\frac{36x^2}{25} - x^2\right)$ " "

$$= \left(\frac{36x^2 - 25x^2}{25}\right) \text{ " "}$$

$$= \frac{11x^2}{25} \text{ বর্গ একক}$$

এখন x^2 বর্গ এককে বৃদ্ধি পায় $\frac{11x^2}{25}$ বর্গ একক

$$\therefore \text{ 1 " " " " } = \frac{11x^2}{25 \times x^2} \text{ " "}$$

$$\therefore \text{ 100 " " " " } = \frac{11x^2 \times 100}{25 \times x^2} \text{ " "}$$

$$= 44 \text{ বর্গ একক}$$

অতএব ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির নির্ণয় হার ৪৪%

১৮। একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত ৪ : ৭; ঐ মাঠে যে জমিতে আগে ৩০৪ কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পর তার ফলন কত হবে?

সমাধান : দেয়া আছে, সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত = ৪ : ৭

মনে করি, আগের ফলন = $4x$ কুইন্টাল

তাহলে, সেচের পর ফলন = $7x$ কুইন্টাল

প্রশ্নমতে, $4x = 304$

$$\text{বা, } x = \frac{304}{4} = 76$$

\therefore সেচের পর ফলন = $7x = 7 \times 76$ কুইন্টাল = ৫৩২ কুইন্টাল

অতএব, সেচ পাওয়ার পর ফলন ৫৩২ কুইন্টাল। (Ans.)

২০। ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত ৩:২ এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত ৪:৩ হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

সমাধান: এখানে, ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত = ৩ : ২

$$= \frac{3}{3} : \frac{2}{3} \quad [3 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$= 1 : \frac{2}{3}$$

আবার, গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত = ৪ : ৩

$$= \frac{4}{4} : \frac{3}{4} \quad [4 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$= 1 : \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{চাল : সুজি} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2 \times 12}{3} : \frac{3 \times 12}{4}$$

[অনুপাতের রাশিদ্বয়কে ১২ দ্বারা গুণ করে]

$$= 8 : 9 \quad (\text{Ans.})$$

২১। একটি জমির ক্ষেত্রফল ৪৩২ বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে ৩:৪ এবং ২:৫ হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান: প্রথম জমির দৈর্ঘ্য : দ্বিতীয় জমির দৈর্ঘ্য = ৩ : ৪

প্রথম জমির প্রস্থ : দ্বিতীয় জমির প্রস্থ = ২ : ৩

মনে করি, প্রথম জমির দৈর্ঘ্য $3x$ মিটার

ও দ্বিতীয় জমির দৈর্ঘ্য $4x$ মিটার

এক প্রথম জমির প্রস্থ $2y$ মিটার

ও দ্বিতীয় জমির প্রস্থ $5y$ মিটার

$$\therefore \text{প্রথম জমির ক্ষেত্রফল} = 3x \cdot 2y = 6xy \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\text{এক দ্বিতীয় জমির ক্ষেত্রফল} = 4x \cdot 5y = 20xy \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\therefore \text{প্রশ্নমতে, } 6xy = 432$$

$$\therefore xy = 72$$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় জমির ক্ষেত্রফল} = (20 \times 72) \text{ বর্গ মি.}$$

$$= 1440 \text{ বর্গ মি.}$$

অতএব, অপর জমির নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = ১৪৪০ বর্গমিটার।

২২। জেমি ও সিমি একই ব্যাংকে থেকে একই দিনে ১০% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি ২ বছর পর মুনাফা আসলে যত টাকা শোধ করে ৩ বছর পর সিমি মুনাফা আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত বের কর।

সমাধান: মনে করি, জেমি ধার করে p টাকা এবং সিমি ধার করে q টাকা।

জেমি ১০০ টাকায় ১ বছরে মুনাফা দেয় ১০ টাকা

$$\therefore \begin{array}{ccccccc} \text{"} & 1 & \text{"} & 1 & \text{"} & \text{"} & \frac{10}{100} \\ \text{"} & p & \text{"} & 2 & \text{"} & \text{"} & \frac{10 \times p \times 2}{100} \\ & & & & & & = \frac{p \times 20}{100} = \frac{p}{5} \text{ টাকা।} \end{array}$$

$$\text{মুনাফা-আসল} = \left(p + \frac{p}{5}\right) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{5p + p}{5} = \frac{6p}{5}$$

১০০ টাকায় ১ বছরে মুনাফা দেয় ১০ টাকা

$$\therefore \frac{10}{100} \times q \times 3 = \frac{3q}{10} \text{ টাকা।}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{সিমির মুনাফা} - \text{আসল} &= \left(q + \frac{3q}{10}\right) \text{ টাকা} \\ &= \frac{10q + 3q}{10} \\ &= \frac{13q}{10} \end{aligned}$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{6p}{5} = \frac{13q}{10}$$

$$\text{বা, } 60p = 65q$$

$$\text{বা, } \frac{p}{q} = \frac{65}{60}$$

$$\text{বা, } \frac{p}{q} = \frac{13}{12}$$

$$\therefore p : q = 13 : 12$$

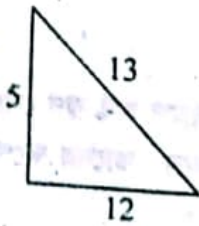
অতএব, জেমি ও সিমির ঋণের নির্ণেয় অনুপাত = 13 : 12.

২৩। একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5 : 12 : 13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.।

- ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণ ভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লেখ? ২
খ) বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪
গ) উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে? ৪

সমাধান :

ক) কোন ভেদে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। কারণ ত্রিভুজের এক বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।



খ) মনে করি,

$$1\text{ম বাহুর দৈর্ঘ্য} = 5x \text{ সে.মি.}$$

$$2\text{য় বাহুর দৈর্ঘ্য} = 12x \text{ সে.মি.}$$

$$3\text{য় বাহুর দৈর্ঘ্য} = 13x \text{ সে.মি.}$$

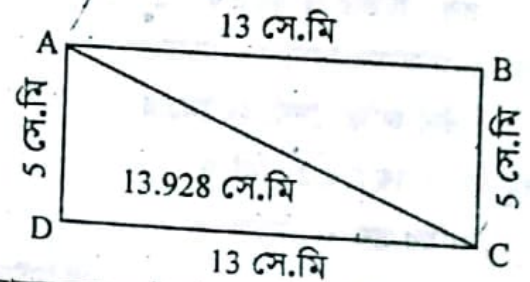
$$\text{প্রশ্নমতে, } 5x + 12x + 13x = 30$$

$$\text{বা, } 30x = 30$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore \text{ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য} = 5 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য} = 13 \text{ সে.মি.}$$



$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য} = 13 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ} = 5 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{আয়তক্ষেত্রের কর্ণ, } d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{(13)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{169 + 25}$$

$$= \sqrt{194} = 13.928 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য} = 13.928 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = (13.928)^2 \text{ সে.মি.}$$

$$= 194 \text{ বর্গ সে.মি. (Ans.)}$$

$$\text{গ) আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল } (13 \times 5) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 65 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$10\% \text{ বৃদ্ধিতে, নতুন আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য হয়}$$

$$= (13 + 13 \text{ এর } 10\%) \text{ সে.মি.}$$

$$= \left(13 + 13 \text{ এর } \frac{10}{100}\right) \text{ সে.মি.}$$

$$= \left(13 + 13 \text{ এর } \frac{1}{10}\right) \text{ সে.মি.}$$

$$= \left(13 + \frac{13}{10}\right) \text{ সে.মি.}$$

$$= \frac{130 + 13}{10} \text{ সে.মি.}$$

$$= \frac{143}{10} \text{ সে.মি.}$$

= 14.3 সে.মি.
20% বৃদ্ধিতে, নতুন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ
= (5 + 5 এর 20%) সে.মি.
= (5 + 5 এর $\frac{20}{100}$) সে.মি.
= (5 + 1) সে.মি.
= 6 সে.মি.
নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
= (14.3 × 6) বর্গ সে.মি.
= 85.8 বর্গ সে.মি.
∴ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায়
= (85.8 - 65) বর্গ সে.মি.
= 20.8 বর্গ সে.মি.

ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পায় = $\frac{20.8}{65} \times 100$
= 32

সুতরাং ক্ষেত্রফল 32% বৃদ্ধি পাবে। (Ans.)

২৪। একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর
অনুপাত 1 : 4।

- ক) অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায়
প্রকাশ কর। ২
খ) 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও
উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1 : 9 মোট শিক্ষার্থীর
সংখ্যা কত? ৪
গ) মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার ত্রিগুণ
অপেক্ষা 20 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত
নির্ণয় কর। ৪

সমাধান :

- ক) মনে করি,
অনুপস্থিত শিক্ষার্থী = x জন
উপস্থিত " = 4x "

∴ মোট " = x + 4x "
= 5x জন

∴ অনুপস্থিত শিক্ষার্থী মোট শিক্ষার্থীর = $\frac{x}{5x} \times 100\%$
= 20% (Ans.)

- খ) 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত থাকলে,
অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x - 10 জন
উপস্থিত " " = 4x + 10 জন
প্রশ্নমতে, x - 10 : 4x + 10 = 1 : 9

বা, $\frac{x - 10}{4x + 10} = \frac{1}{9}$

বা, 9x - 90 = 4x + 10

বা, 9x - 4x = 90 + 10

বা, 5x = 100

∴ x = 20

∴ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 5 × 20 = 100 (Ans.)

- গ) মনে করি, ছাত্রী সংখ্যা y জন

∴ ছাত্র সংখ্যা = (2y - 20) জন

শর্তানুসারে,

y + (2y - 20) = 100

বা, 3y = 120

বা, y = 40

∴ ছাত্রী সংখ্যা 40 জন

ছাত্র সংখ্যা = (2 × 40 - 20) জন

= 60 জন

∴ ছাত্র : ছাত্রী = 60 : 40 = 3 : 2

∴ ছাত্র ও ছাত্রীর সংখ্যার অনুপাত = 3 : 2 (Ans.)

সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. মা ও মেয়ের বয়সের অনুপাত 5 : 2, মায়ের বয়স 40 বছর
হলে, মেয়ের বয়স কত? [মৌলভীবাজার সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]
ক 16 বছর খ 18 বছর ৩
গ 12 বছর ঘ 24 বছর
২. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে কোন্টি সঠিক? [ছত্রাবাড়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]
ক a : b = c : b খ ab = bc ৩
গ a : c = b : c ঘ ac = b²
৩. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 ও সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 21
হলে বৃহত্তর সংখ্যাটি কত? [ছত্রাবাড়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]
ক 12 খ 18 ৩
ঘ 18

৪. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং ল. সা. গু. 180 সংখ্যা
দুটি কত? [বগুড়া জিলা স্কুল]
ক 60 ও 40 খ 45 ও 55 ৩
গ 45 ও 50 ঘ 45 ও 60
৫. কোনো কুলে ছাত্র ও ছাত্রীর অনুপাত 1 : 2 ঐ কুলে মোট
শিক্ষার্থী 900 হলে ছাত্রী সংখ্যা নিচের কোনটি? [বি এ এক-শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক 100 খ 200 ৩
গ 300 ঘ 600
৬. x : y = 2 : 3 হলে 3x : 4y এর মান নিচের কোনটি? [বি এ এক-শাহীন কলেজ, ঢাকা]
ক 1 : 2 খ 2 : 1 ৩
গ 2 : 3 ঘ 3 : 4
৭. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 15 এবং তাদের অনুপাত 1 : 2 হলে,
সংখ্যা দুইটি কত? [ইসলামাবাদ সরকারি স্কুল ও কলেজ]
ক 5 ও 10 খ 12 ও 5 ৩
গ 9 ও 6 ঘ 8 ও 7

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতি যাচাই করতে পারবে।
- দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই করতে পারবে।
- সমাধানের আড়গুণন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারবে।

I am here

MyMahbub.Com

যা মনে রাখতে হবে...



□ দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোড় : যদি দুই চলক বা অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট দুইটি সমীকরণ এরূপ হয় যে, চলকদ্বয়ের এক বা একাধিক কোনো মান দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়, তবে এদেরকে দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোড় বলে। যেমন—

$$4x + y = 2 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } 2x + 3y = -4 \dots\dots\dots (ii)$$

সমীকরণদ্বয় দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোড়। $x = 1, y = -2$ এর জন্য সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয় অর্থাৎ উভয় পার্শ্ব সমান হয়।

□ সঙ্গতিপূর্ণ ও অসঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ জোড় :

কোনো সমীকরণের এক বা একাধিক সমাধান থাকলে, সমীকরণ জোড়কে সঙ্গতিপূর্ণ বলা হয়।

কোনো সমীকরণ জোড়ের কোনো সমাধান না থাকলে এদেরকে অসঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ জোড় বলে।

□ কোনো সমীকরণ জোড় সঙ্গতিপূর্ণ ও অসঙ্গতিপূর্ণ হওয়ার শর্ত :

ক. $a_1x + b_1y = c_1$ এবং $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোড় সঙ্গতিপূর্ণ হবে যদি

i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ [এক্ষেত্রে একটি সমাধান আছে]

ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়, [এক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান আছে]

খ. $a_1x + b_1y = c_1$ এবং $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণ জোড় অসঙ্গতিপূর্ণ হবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

[এরূপ ক্ষেত্রে কোনো সমাধান নেই]

□ দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোড়ের সমাধান :

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোড়ের সমাধানের অনেক পদ্ধতি রয়েছে। যেমন—

1. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি
2. অপনয়ন পদ্ধতি

3. বস্তুগুণন পদ্ধতি
4. নির্ণায়ক পদ্ধতি
5. লৈখিক পদ্ধতি।

দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোড়ের সমাধানের ক্ষেত্রে পরীক্ষায় কোনো পদ্ধতির উল্লেখ করা না থাকলে নিজের সুবিধামতো উপরোল্লিখিত পদ্ধতিগুলোর যে কোনো একটি পদ্ধতি অনুসরণ করে অংকের সমাধান করলেই চলবে।

☺ প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে কোনো একটি থেকে একটি অজ্ঞাত রাশির মান অপরটিতে প্রতিস্থাপন করা হয়।

যেমন— $4x + y = 2 \dots\dots\dots (i)$

$2x + 3y = -4 \dots\dots\dots (ii)$

ওপরের সমীকরণদ্বয়ের যেকোনো একটি যেমন (i) থেকে যে কোনো একটি অজ্ঞাত রাশি যেমন y এর মান বের করলে দাঁড়ায় $y = 2 - 4x$ । এই y এর মান অপর সমীকরণ যেমন (ii) এ প্রতিস্থাপন করে সমাধান করা হয়।

☺ অপনয়ন পদ্ধতি

□ অপনয়ন পদ্ধতি : এ প্রক্রিয়ায় যোগ বা বিয়োগ করে দুটি অজ্ঞাত রাশির যে কোনো একটিকে অপসারণ করতে হয়। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোনো একটিকে সমান করার জন্য সমীকরণকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়। যেমন—

$4x + y = 2 \dots\dots\dots (i)$

$2x + 3y = -4 \dots\dots\dots (ii)$

এই সমীকরণদ্বয়ের ক্ষেত্রে (i) সমীকরণকে 3 দ্বারা গুণ করলে উভয় সমীকরণের y এর সহগ সমান হয়। এর পর বিয়োগ করে সহজেই y কে অপসারণ করা যায়। যেমন—

$12x + 3y = 6$

$2x + 3y = -4$

বিয়োগ করে, $10x = 10$

$\therefore x = 1$

❦ বজ্রগুণন বা আড়গুণন পদ্ধতি

বজ্রগুণন পদ্ধতি : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধানের ক্ষেত্রে

বজ্রগুণন সূত্রটি হল :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

অর্থাৎ, $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ (i)

এবং $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ (ii)

(i) এবং (ii) সমীকরণদ্বয় থেকে সমাধান করে x ও y এর মান পাওয়া যায়।

❦ লৈখিক পদ্ধতি

❑ লৈখিক পদ্ধতি : লৈখিক পদ্ধতির মাধ্যমে দুই চলক বা অজ্ঞাত রাশি x ও y বিশিষ্ট সমীকরণ জোড়ের সমাধান নির্ণয় করা যায়। সমীকরণ জোড়ের প্রতিটি একটি সরল সমীকরণ। এই সমীকরণ জোড়ের লেখ অংকন করলে দুটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এই সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর ভূজ ও কোটি প্রদত্ত সমীকরণের জোড়ের বীজ। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কের ভূজ x এর মান এবং কোটি y এর মান নির্দেশ করে।

❑ লেখচিত্রের মাধ্যমে সমীকরণ জোড়ের সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি :
লেখ অংকন করে দুটি সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের ধাপগুলো নিম্নরূপ-

- প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $y = ax + b$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।
যেমন : $ax + by + c = 0$ কে নিম্নরূপে প্রকাশ করতে হবে।
 $ax + by + c = 0$
বা, $by = -ax - c$
বা, $y = \frac{-ax - c}{b}$
 - প্রতিটি সমীকরণে x -এর কমপক্ষে 3 টি সুবিধাজনক মান বসিয়ে y -এর অনুরূপ মানসমূহ বের করতে হবে। প্রাপ্ত x ও y এর মানসমূহ নিম্নোক্ত টেবিলে স্থাপন করতে হবে।
- | x | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
- প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করতে হবে।
 - ভগ্নাংশের ছটিলতা পরিহারের জন্য ছক কাগজে বিন্দুগুলোর স্থানের জন্য সুবিধামতো এক একককে এক ঘর, দুই ঘর, তিন ঘর ইত্যাদি করে ভাগ করতে হবে।
 - প্রথম সমীকরণের জন্য বিন্দু তিনটিকে যুক্ত করে একটি সরলরেখা আঁকতে হবে।
 - অনুরূপে দ্বিতীয় সমীকরণ নির্দেশক সরলরেখাটিও ছক কাগজে অংকন করতে হবে।
 - প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর ভূজ ও কোটি নির্ণয় করতে হবে।
 - নির্ণয় ভূজ ও কোটিই প্রদত্ত সমীকরণ জোড়ের বীজ।
 - অংকিত সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, প্রদত্ত সমীকরণ জোড়ের কোনো বীজ বা সমাধান নেই এবং সমীকরণ জোড়টি অসংগতিপূর্ণ।

❑ অনুশীলনী- ১২.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

❑ কাজ : $x - 2y + 1 = 0$ ও $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটির পাঁচটি করে সমাধান লেখ যেন তন্মধ্যে সাধারণ সমাধানটিও থাকে। [পৃষ্ঠা-১৯৫]

সমাধান : প্রথমে আমরা, $x - 2y + 1 = 0$ সমীকরণটি বিবেচনা করি।

এখন, $x - 2y + 1 = 0$ সমীকরণটি থেকে নিচের ছকটি পূরণ করি :

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ ($x - 2y + 1$) এর মান	ডানপক্ষ
1	1	$1 - 2 + 1 = 0$	0
-1	0	$-1 - 0 + 1 = 0$	0
3	2	$3 - 4 + 1 = 0$	0
5	3	$5 - 6 + 1 = 0$	0
7	4	$7 - 8 + 1 = 0$	0
.....	 = 0	0

সমীকরণটির অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে পাঁচটি সমাধান $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 3)$ $(7, 4)$ ।

আবার অন্য একটি সমীকরণ $2x + y - 3 = 0$ নিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করি :

x এর মান	y এর মান	বামপক্ষ ($2x + y - 3$) এর মান	ডানপক্ষ
-2	7	$-4 + 7 - 3 = 0$	0
0	3	$0 + 3 - 3 = 0$	0
1	1	$2 + 1 - 3 = 0$	0
2	-1	$4 - 1 - 3 = 0$	0
3	-3	$6 - 3 - 3 = 0$	0
.....	 = 0	0

সমীকরণটিতে অসংখ্য সমাধান আছে। তার মধ্যে পাঁচটি সমাধান $(-2, 7)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, -3)$ ।
যদি আলোচ্য সমীকরণ দুটিকে একত্রে জোড় হিসেবে ধরা হবে একমাত্র $(1, 1)$ দ্বারা উভয় সমীকরণ যুগপৎ সিদ্ধ হয়।
∴ সমীকরণ জোড় $x - 2y + 1 = 0$ এবং $2x + y - 3 = 0$ এর সাধারণ সমাধান $(x, y) = (1, 1)$

যদি $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ সমীকরণজোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ
কি, পরস্পর নির্ভরশীল কিনা যাচাই কর এবং সমীকরণজোড়টির
সমাধান বাকতে পারে তা নির্দেশ কর।
[পৃষ্ঠা-১৯৮]

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ \text{বা, } x - 2y = -1 \\ \text{এবং } 2x + y - 3 = 0 \\ \text{বা, } 2x + y = 3 \end{array} \right\}$$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত = $\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত = $\frac{-2}{1}$ বা, -2

আমরা পাই, $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$

∴ সমীকরণজোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং
সমীকরণজোড়টির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

নিচের সমীকরণ জোড়গুলো সঙ্গতিপূর্ণ/অসঙ্গতিপূর্ণ,
নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না ব্যাখ্যা কর এবং এদের
সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর।

- ক) $x + 3y = 1$
 $2x + 6y = 2$
খ) $2x - 5y = 3$
 $x + 3y = 1$
গ) $3x - 5y = 7$
 $6x - 10y = 15$

সমাধান:

ক) প্রদত্ত সমীকরণজোড় : $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

y " " " $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

স্থবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

অতএব, সমীকরণজোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল।
সমীকরণজোড়টির অসংখ্য সমাধান আছে।

খ) প্রদত্ত সমীকরণজোড় : $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{1}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-5}{3}$

আমরা পাই, $\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3}$

∴ সমীকরণজোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল।
সমীকরণজোড়টির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।
অতএব, সমীকরণজোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল।
সমীকরণজোড়টির অসংখ্য সমাধান আছে।

গ) প্রদত্ত সমীকরণজোড় : $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 6x - 10y = 15 \end{cases}$

$$6x - 10y = 15$$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$

y " " " $\frac{-5}{-10}$ বা $\frac{3}{10}$

স্থবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{7}{15}$

$$\therefore \frac{3}{6} \neq \frac{-5}{-10} \neq \frac{7}{15}$$

∴ সমীকরণজোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল।
সমীকরণজোড়টির কোনো সমাধান নেই।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১২.১

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সঙ্গতিপূর্ণ/অসঙ্গতিপূর্ণ পরস্পর
নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং এগুলোর
সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর :

১। $x - y = 4$
 $x + y = 10$

সমাধান: $x - y = 4$ (i)

$x + y = 10$ (ii)

(i) নং সমীকরণকে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii) নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 4$ এবং $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ এবং $c_2 = 10$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

∴ সমীকরণ জোড় সঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল এবং সমাধান
একটি।

২। $2x + y = 3$

$4x + 2y = 6$

সমাধান: $2x + y = 3$ (i)

$4x + 2y = 6$ (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 3$ এবং $a_2 = 4, b_2 = 2$ এবং $c_2 = 6$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

সুতরাং সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ, নির্ভরশীল এবং অসংখ্য সমাধান বিদ্যমান।

৩। $x - y - 4 = 0$

$3x - 3y - 10 = 0$

সমাধান: $x - y - 4 = 0$ বা, $x - y = 4$ (i)

$3x - 3y - 10 = 0$ বা, $3x - 3y = 10$ (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 4$ এবং $a_2 = 3, b_2 = -3$ এবং $c_2 = 10$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

\therefore সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল, সমাধান নেই।

৪। $3x + 2y = 0$

$6x + 4y = 0$

সমাধান: $3x + 2y = 0$ (i)

$6x + 4y = 0$ (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 0$ এবং $a_2 = 6, b_2 = 4, c_2 = 0$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{0} = 0$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

অর্থাৎ সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল এবং এর কোনো সমাধান নেই।

৫। $3x + 2y = 0$

$9x - 6y = 0$

সমাধান: $3x + 2y = 0$ (i)

$9x - 6y = 0$ (ii)

(i)নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 0$ এবং $a_2 = 9, b_2 = -6$ এবং $c_2 = 0$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{0} = 0$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

অতএব, সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল এবং একটি মাত্র সমাধান আছে।

৬। $5x - 2y - 16 = 0$

$3x - \frac{6}{5}y = 2$

সমাধান: $5x - 2y - 16 = 0$ বা, $5x - 2y = 16$ (i)

$3x - \frac{6}{5}y = 2$

বা, $\frac{15x - 6y}{5} = 2$ বা, $15x - 6y = 10$ (ii)

(i) নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii) নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 5, b_1 = -2, c_1 = 16$ এবং $a_2 = 15, b_2 = -6, c_2 = 10$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

অতএব সমীকরণ জোট অসঙ্গতিপূর্ণ, পরস্পর অনির্ভরশীল এবং কোনো সমাধান নেই।

৭। $-\frac{1}{2}x + y = -1$

$x - 2y = 2$

সমাধান: $-\frac{1}{2}x + y = -1$ (i)

$x - 2y = 2$ (ii)

(i) নং কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)নং কে $a_2x + b_2y = c_2$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = -\frac{1}{2}, b_1 = 1, c_1 = -1$ এবং $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 2$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

এক $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-1}{2}$

বোঝে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

অতএব, সমীকরণ জোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ এবং এরূপ জোড়ের
কোন সংখ্যার অসংখ্য সমাধান রয়েছে।

$\frac{1}{2}x - y = 0$

$x - 2y = 0$

সমাধান: $-\frac{1}{2}x - y = 0 \dots\dots\dots (i)$

$x - 2y = 0 \dots\dots\dots (ii)$

(i)কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং (ii)কে $a_2x + b_2y = c_2$
সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1, c_1 = 0$ এবং $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 0$

সুতরাং $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

এক $\frac{c_1}{c_2} = \frac{0}{0} = 0$

বোঝে $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ জোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ এবং এর সমাধান
অনন্য।

৯। $-\frac{1}{2}x + y = -1$

$x + y = 5$

সমাধান: $-\frac{1}{2}x + y = -1 \dots\dots\dots (i)$

$x + y = 5 \dots\dots\dots (ii)$

এই সমীকরণ জোড়টি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1$

∴ এখানে, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ জোড়ের সমাধান অনন্য।

১০। $ax - cy = 0$

$cx - ay = c^2 - a^2$

সমাধান: $ax - cy = 0 \dots\dots\dots (i)$

$cx - ay = c^2 - a^2 \dots\dots\dots (ii)$

প্রদত্ত সমীকরণে x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{a}{c}$

এবং y " " " $= \frac{-c}{-a} = \frac{c}{a}$

ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{0}{c^2 - a^2}$

সুতরাং $\frac{a}{c} \neq \frac{c}{a}$

অতএব সমীকরণটি সঙ্গতিপূর্ণ, অনির্ভরশীল, যার একটি
মাত্র সমাধান আছে।

□ অনুশীলনী- ১২.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-৩: $\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ সমীকরণজোড়কে

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ সমীকরণজোড়ের আকারে প্রকাশ করে

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ এর মান বের কর। [পৃষ্ঠা ২০১]


সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোড় $\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

প্রদত্ত সমীকরণজোড়কে $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

সমীকরণজোড়ের আকারে প্রকাশ করলে পাওয়া যায়,

∴ $a_1 = 4, b_1 = -1, c_1 = -7,$

$a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = 0$ (Ans.)

 I am here
MyMahbub.Com

$$\text{বা, } \frac{x}{-552} = \frac{y}{-276} = \frac{1}{-46}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{552} = \frac{y}{276} = \frac{1}{46}$$

$$\therefore \frac{x}{552} = \frac{1}{46} \text{ বা, } x = \frac{552}{46} = 12$$

$$\text{আবার, } \frac{y}{276} = \frac{1}{46} \text{ বা, } y = \frac{276}{46} = 6$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (12, 6)$$

উদাহরণ-৬। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$$\text{সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, } \begin{cases} ax - by = ab \\ bx - ay = ab \end{cases} \text{ বা,}$$

$$\begin{cases} ax - by - ab = 0 \\ bx - ay - ab = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{(-b) \times (-ab) - (-a)(-ab)}{1} = \frac{y}{(-a) \times b - (-ab) \times a}$$

$$\frac{ab(-b) - (-a)(-ab)}{1} = \frac{y}{-ab + ab}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{ab^2 - a^2b} = \frac{y}{-ab^2 - a^2b} = \frac{1}{-a^2 + b^2}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-ab(a-b)} = \frac{y}{-ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$$

$$\therefore \frac{x}{ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$$

$$\text{বা, } x = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a+b}$$

$$\text{আবার, } \frac{y}{-ab(a-b)} = \frac{1}{(a+b)(a-b)}$$

$$\text{বা, } y = \frac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-ab}{a+b}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{-ab}{a+b} \right)$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১২.২

উদাহরণ পদ্ধতিতে সমাধান কর (১-৩) :

$$১। 7x - 3y = 31$$

$$9x - 5y = 41$$

$$\text{সমাধান : } 7x - 3y = 31 \dots\dots\dots (i)$$

$$9x - 5y = 41 \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ নং হতে পাই, } 7x = 31 + 3y$$

$$\text{বা, } x = \frac{31 + 3y}{7} \dots\dots\dots (iii)$$

$$x \text{ এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,}$$

$$9\left(\frac{31 + 3y}{7}\right) - 5y = 41$$

$$\text{বা, } \frac{279 + 27y}{7} - 5y = 41$$

$$\text{বা, } \frac{279 + 27y - 35y}{7} = 41$$

$$\text{বা, } 279 - 8y = 287$$

$$\text{বা, } -8y = 287 - 279$$

$$\text{বা, } -8y = 8$$

$$\text{বা, } y = \frac{8}{-8}$$

$$\therefore y = -1$$

$$\text{এখন } y \text{ এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,}$$

$$x = \frac{31 + 3(-1)}{7}$$

$$= \frac{31 - 3}{7}$$

$$= \frac{28}{7}$$

$$= 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (4, -1)$$

$$২। \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\text{সমাধান : } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{3x + 2y}{6} = 1$$

$$\text{বা, } 3x + 2y = 6 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{2x + 3y}{6} = 1$$

$$\text{বা, } 2x + 3y = 6 \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ নং হতে পাই, } 3x = 6 - 2y$$

$$\therefore x = \frac{6 - 2y}{3} \dots\dots\dots (iii)$$

$$x \text{ এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,}$$

$$2\left(\frac{6 - 2y}{3}\right) + 3y = 6$$

$$\text{বা, } \frac{12 - 4y}{3} + 3y = 6$$

$$\text{বা, } \frac{12 - 4y + 9y}{3} = 6$$

$$\text{বা, } 12 + 5y = 18$$

$$\text{বা, } 5y = 18 - 12$$

$$\text{বা, } 5y = 6$$

$$\therefore y = \frac{6}{5}$$

$$y \text{ এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,}$$

এখন, $\frac{x}{-21} = \frac{1}{-7}$ আবার, $\frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$

বা, $-7x = -21$

বা, $-7y = -14$

বা, $x = \frac{21}{7}$

$\therefore y = \frac{14}{7} = 2$

$\therefore x = 3$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

শুদ্ধি পরীক্ষা :

$x + 2y = 7$ ---- (i)

$2x - 3y = 0$ ---- (ii)

(i) নং সমীকরণে $x = 3$ এবং $y = 2$ মান বসিয়ে পাই,

$x + 2y = 7$

বা, $3 + 2 \cdot 2 = 7$

বা, $3 + 4 = 7$

বা, $7 = 7$

আবার, (ii) নং সমীকরণে x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

$2x - 3y = 0$

বা, $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$

বা, $6 - 6 = 0$

বা, $0 = 0$

\therefore সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা প্রমাণিত হল।

১০। $4x + 3y = -12$

$2x = 5$

সমাধান : $4x + 3y = -12$

বা, $4x + 3y + 12 = 0$ (i)

এবং $2x = 5$

বা, $2x + 0 - 5 = 0$ (ii)

(i) ও (ii) নং কে আড়গুণন করে পাই,

$\frac{x}{-15 - (0 \cdot 12)} = \frac{y}{12 \cdot 2 - (-5 \cdot 4)} = \frac{1}{(4 \cdot 0) - (2 \cdot 3)}$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{y}{24 + 20} = \frac{1}{-6}$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{y}{44} = \frac{1}{-6}$

এখন, $\frac{x}{-15} = \frac{1}{-6}$ এবং $\frac{y}{44} = \frac{1}{-6}$

বা, $\frac{x}{15} = \frac{1}{6}$

বা, $y = \frac{44}{-6}$

বা, $x = \frac{15}{6}$

$\therefore y = -\frac{22}{3}$

$\therefore x = \frac{5}{2}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{22}{3}\right)$

১১। $-7x + 8y = 9$

$5x - 4y = -3$

সমাধান : দেয়া আছে,

$-7x + 8y = 9$

অর্থাৎ $-7x + 8y - 9 = 0$ ---- (i)

এবং $5x - 4y = -3$

অর্থাৎ $5x - 4y + 3 = 0$ ---- (ii)

বহুগুণন সূত্রানুসারে,

$\frac{x}{8 \times 3 - (-9) \times (-4)} = \frac{y}{-9 \times 5 - (-7) \times 3} = \frac{1}{-7 \times (-4) - 5 \times 8}$

বা, $\frac{x}{24 - 36} = \frac{y}{-45 + 21} = \frac{1}{28 - 40}$

বা, $\frac{x}{-12} = \frac{y}{-24} = \frac{1}{-12}$

এখন, $\frac{x}{-12} = \frac{1}{-12}$

আবার, $\frac{y}{-24} = \frac{1}{-12}$

বা, $-12x = -12$

বা, $-12y = -24$

$\therefore x = \frac{12}{12}$

বা, $y = \frac{24}{12}$

$\therefore x = 1$

$\therefore y = 2$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, 2)$

শুদ্ধি পরীক্ষা : সমীকরণ (i) এ বামপক্ষ $= -7x + 8y - 9$

$= -7 \times 1 + 8 \times 2 - 9$ [$\because x = 1, y = 2$ বসিয়ে]

$= -7 + 16 - 9 = -16 + 16 = 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore -7x + 8y = 9$ সমীকরণটি (1, 2) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 5x - 4y + 3$

$= 5 \times 1 - 4 \times 2 + 3$ [$\because x = 1, y = 2$ বসিয়ে]

$= 5 - 8 + 3 = 8 - 8 = 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore 5x - 4y + 3 = 0$ সমীকরণটি (1, 2) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

\therefore সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে। (প্রমাণিত)

১২। $3x - y - 7 = 0 = 2x + y - 3$

সমাধান : $3x - y - 7 = 0$ (i)

$2x + y - 3 = 0$ (ii)

(i) নং ও (ii) নং কে আড়গুণন করে পাই,

$\frac{x}{(-1) \cdot (-3) - 1 \cdot (-7)} = \frac{y}{-7(2) - (-3) \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)}$

বা, $\frac{x}{3 + 7} = \frac{y}{-14 + 9} = \frac{1}{3 + 2}$

বা, $\frac{x}{10} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

এখন, $\frac{x}{10} = \frac{1}{5}$ এবং $\frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

বা, $x = \frac{10}{5}$ বা, $y = \frac{-5}{5}$

$\therefore x = 2$ $\therefore y = -1$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, -1)$

১৩। $ax + by = a^2 + b^2$

$2bx - ay = ab$


সমাধান : দেয়া আছে, $ax + by = a^2 + b^2$ (i)

$2bx - ay = ab$ (ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণকে পক্ষান্তর করে পাই,

$ax + by - (a^2 + b^2) = 0$

$2bx - ay - ab = 0$

 I am here
MyMahbub.Com

সমীকরণদ্বয়ে বহুগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{b \times (-ab) - (-a) \{-(a^2 + b^2)\}} = \frac{y}{-(a^2 + b^2) \times 2b - (-ab) \times a} = \frac{1}{-a \times a - 2b \times b}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-ab^2 - a^2 - ab^2} = \frac{y}{-2a^2b - 2b^3 + a^2b} = \frac{1}{-a^2 - 2b^2}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-a^3 - 2ab^2} = \frac{y}{-a^2b - 2b^3} = \frac{1}{-a^2 - 2b^2}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-a(a^2 + 2b^2)} = \frac{y}{-b(a^2 + 2b^2)} = \frac{1}{-(a^2 + 2b^2)}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{1} \text{ [ত্রিপক্ষকে } -(a^2 + 2b^2) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\therefore x = \frac{a}{1} = a \text{ এবং } y = \frac{b}{1} = b.$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (a, b)$.

শুদ্ধ পরীক্ষা :

(i) নং সমীকরণ এর বামপক্ষ $= ax + by$

$$= a \times a + b \times b \text{ [} x = a, y = b \text{ বসিয়ে]}$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore ax + by = a^2 + b^2$ সমীকরণটি (a, b) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 2bx - ay$

$$= 2b \times a - a \times b \text{ [} \because x = a, y = b \text{ বসিয়ে]}$$

$$= 2ab - ab = ab$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore 2bx - ay = ab$ সমীকরণটি (a, b) দ্বারা সিদ্ধ হয়।

\therefore সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শূন্য হয়েছে।

$$18) y(3+x) = x(6+y)$$

$$3(3+x) = 5(y-1)$$

সমাধান : দেয়া আছে,

$$y(3+x) = x(6+y) \dots\dots\dots(i)$$

$$3(3+x) = 5(y-1) \dots\dots\dots(ii)$$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$3y + xy = 6x + xy$$

$$\text{বা, } 6x + xy - 3y - xy = 0$$

$$\text{বা, } 6x - 3y = 0$$

$$19) (x+7)(y-3) + 7 = (y+3)(x-1) + 5$$

$$5x - 11y + 35 = 0$$

সমাধান : দেয়া আছে, $(x+7)(y-3) + 7 = (y+3)(x-1) + 5 \dots\dots\dots(i)$

$$5x - 11y + 35 = 0 \dots\dots\dots(ii)$$

সমীকরণ (i) হইতে পাই, $(x+7)(y-3) + 7 = (y+3)(x-1) + 5$

$$\text{বা, } xy - 3x + 7y - 21 + 7 = xy + 3x - y - 3 + 5$$

$$\text{বা, } xy - 3x + 7y - 14 - xy - 3x + y - 2 = 0$$

$$\text{বা, } -6x + 8y - 16 = 0$$

$$\text{বা, } -2(3x - 4y + 8) = 0$$

$$\text{বা, } 3x - 4y + 8 = 0 \dots\dots\dots(iii) \text{ [উভয় পক্ষকে } -2 \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

সমীকরণ (ii) ও (iii) হইতে পাই

$$5x - 11y + 35 = 0 \dots\dots\dots(ii)$$

$$3x - 4y + 8 = 0 \dots\dots\dots(iii)$$

$$\text{বহুগুণন সূত্রানুসারে, } \frac{x}{-11 \times 8 - (-4) \times 35} = \frac{y}{3 \times 35 - 5 \times 8} = \frac{1}{-4 \times 5 - 3 \times (-11)}$$

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $9 + 3x = 5y - 5$

$$\text{বা, } 3x - 5y + 9 + 5 = 0$$

$$\text{বা, } 3x - 5y + 14 = 0$$

অর্থাৎ (i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ দুটির ভিন্ন রূপ হল-

$$6x - 3y + 0 = 0 \dots\dots\dots(iii)$$

$$3x - 5y + 14 = 0 \dots\dots\dots(iv)$$

এখন, (iii) নং এবং (iv) নং সমীকরণে বহুগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-3) \times 14 - (-5) \times 0} = \frac{y}{3 \times 0 - 6 \times 14} = \frac{1}{6 \times (-5) - 3 \times (-3)}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-42 + 0} = \frac{y}{0 - 84} = \frac{1}{-30 + 9}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-42} = \frac{y}{-84} = \frac{1}{-21}$$

$$\therefore x = \frac{-42}{-21} = 2 \text{ এবং } y = \frac{-84}{-21} = 4.$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 4)$

শুদ্ধ পরীক্ষা:

সমীকরণ (i) ও (ii) এ x ও y এর মান যথাক্রমে 2 ও 4 বসালে যদি

উভয়পক্ষ অর্থাৎ বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সমান হয়, তবে সমীকরণ

দুইটি $(2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

সমীকরণ (i) এর বামপক্ষ $= y(3+x)$

$$= 4(3+2) = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = x(6+y)$$

$$= 2(6+4) = 2 \times 10 = 20$$

$\therefore y(3+x) = x(6+y)$ সমীকরণটি $(2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

আবার, সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ $= 3(3+x)$

$$= 3(3+2) = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = 5(y-1)$$

$$= 5(4-1)$$

$$= 5 \times 3 = 15$$

$\therefore 3(3+x) = 5(y-1)$ সমীকরণটি $(2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

\therefore সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শূন্য হয়েছে।

Mymahbub.Com

$$\text{বা, } \frac{x}{-88+140} = \frac{y}{105-40} = \frac{1}{-20+33}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{52} = \frac{y}{65} = \frac{1}{13}$$

$$\text{এখন, } \frac{x}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\text{বা, } 13x = 52$$

$$\text{বা, } x = \frac{52}{13}$$

$$\therefore x = 4$$

$$\text{আবার, } \frac{y}{65} = \frac{1}{13}$$

$$\text{বা, } 13y = 65$$

$$\text{বা, } y = \frac{65}{13}$$

$$\therefore y = 5$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (4, 5)$

শুদ্ধ পরীক্ষা:

সমীকরণ (i) এর বামপক্ষ = $(x+7)(y-3)+7$

$$= (4+7)(5-3)+7; [x \text{ ও } y \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= 11 \times 2 + 7 = 22 + 7 = 29$$

$$\text{ডানপক্ষ} = (y+3)(x-1)+5$$

$$= (5+3)(4-1)+5; [x \text{ ও } y \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= 8 \times 3 + 5 = 24 + 5 = 29$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore (x+7)(y-3)+7 = (y+3)(x-1)+5$ সমীকরণটি $(4, 5)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

আবার, সমীকরণ (ii) এর বামপক্ষ = $5x - 11y + 35$

$$= 5 \times 4 - 11 \times 5 + 35 [x \text{ ও } y \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= 20 - 55 + 35 = 55 - 55 = 0$$

= ডানপক্ষ

$\therefore 5x - 11y + 35 = 0$ সমীকরণটি $(4, 5)$ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

\therefore সমীকরণদ্বয়ের সমাধান শূন্য হয়েছে।

□ অনুশীলনী- ১২.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

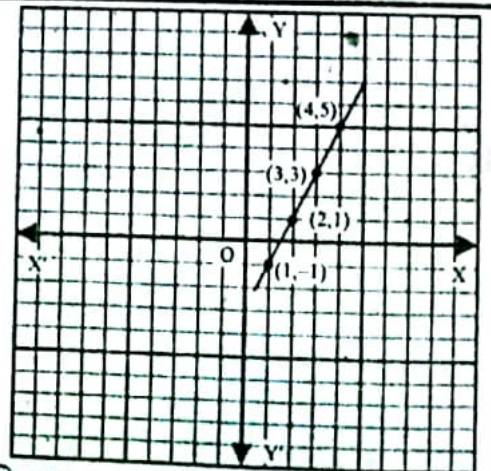
- কাজ : $2x - y - 3 = 0$ সমীকরণের লেখের উপর ছকের মাধ্যমে চারটি বিন্দু নির্ণয় কর। অতঃপর ছক কাগজে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একক নিয়ে বিন্দুগুলো স্থাপন কর ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত কর। লেখটি কি সরলরেখা হয়েছে?

[পৃষ্ঠা- ২১০]

সমাধান : $2x - y - 3 = 0$ সমীকরণের x এর চারটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ চারটি মান বের করি এবং ছকে উপস্থাপন করি।

x	1	2	3	4
y	-1	1	3	5

\therefore সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু $(1, -1)$ $(2, 1)$ $(3, 3)$ $(4, 5)$



মনে করি XOX' ও YOY' যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গ প্রত্যাহার কর।

এখন ছক কাগজে সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত $(1, -1)$ $(2, 1)$ $(3, 3)$ $(4, 5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

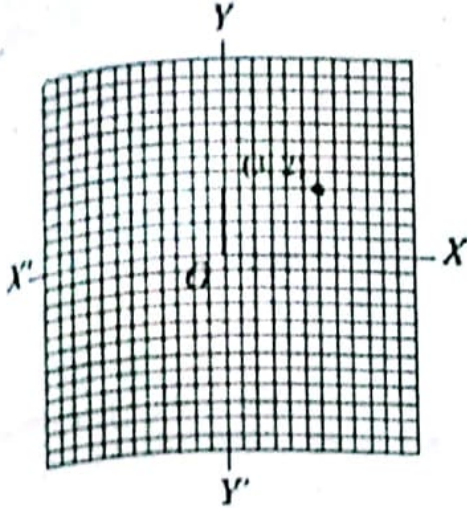
উদাহরণ-৭। সমাধান কর ও সমাধান লেখাচিত্রে দেখাও :

$$2x + y = 8$$

$$3x - 2y = 5$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x + y - 8 = 0$ (i)

$3x - 2y - 5 = 0$ (ii)



অনুপস্থাপন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{1 \times (-5) - (-2) \times (-8)} = \frac{y}{(-8) \times 3 - (-5) \times 2} = \frac{1}{2(-2) - 3 \times 1}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-5-16} = \frac{y}{-24+10} = \frac{1}{-4-3}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-21} = \frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{x}{21} = \frac{1}{7}, \text{ বা, } x = \frac{21}{7} = 3$$

$$\text{আবার, } \frac{y}{14} = \frac{1}{7}, \text{ বা } y = \frac{14}{7} = 2$$

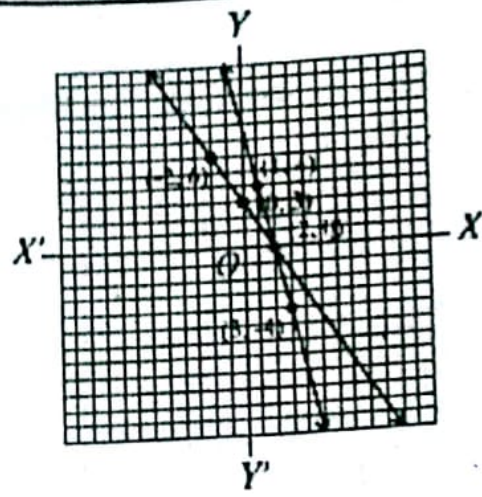
$$\therefore \text{সমাধান } (x, y) = (3, 2)$$

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

হক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (3, 2) বিন্দুটি স্থাপন করি।

উদাহরণ-১০। লেখের সাহায্যে সমাধান কর : $3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$



$$\text{ধরি, } y = 3 - \frac{3}{2}x = 8 - 4x$$

$$\therefore y = 3 - \frac{3}{2}x \text{ (i)}$$

$$\text{এবং } y = 8 - 4x \text{ (ii)}$$

এখন, সমীকরণ (i) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর

অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	-2	0	2
y	6	3	0

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু (-2, 6), (0, 3), (2, 0)

আবার, সমীকরণ (ii) এ x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর

অনুরূপ মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	1	2	3
y	4	0	-4

\therefore সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু (1, 4), (2, 0),

(3, -4)

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

হক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।

এখন, হক কাগজে সমীকরণ (i) থেকে প্রাপ্ত (-2, 6), (0, 3), (2, 0) বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরপর সংযুক্ত করি।

তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা। একইভাবে, সমীকরণ (ii) থেকে প্রাপ্ত (1, 4), (2, 0), (3, -4) বিন্দুগুলো

স্থাপন করে এগুলো পরপর সংযুক্ত করি। তাহলে, লেখটি হবে একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P

বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে দেখা যায়, ছেদবিন্দুটির স্থানাংক (2, 0)।

\therefore সমাধান $x = 2$, বা সমাধান : 2

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১২.৩

□ লেখটির সাহায্যে সমাধান কর :

$$3x + 4y = 14$$

$$4x - 3y = 2$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $3x + 4y = 14$ (i)

$4x - 3y = 2$ (ii)

(i) কে হতে পাই,

$$3x = 14 - 4y$$

$$\therefore x = \frac{14 - 4y}{3}$$

এই সমীকরণটিকে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ

মান বের করি ও পাশের ছকটি তৈরি করি :

x	2	-2	6
y	2	5	-1

এবং (ii) নং হতে পাই,

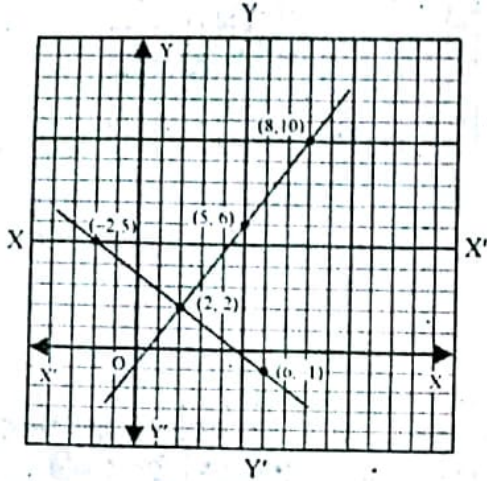
$$4x - 3y = 2$$

$$\text{বা, } 4x = 2 + 3y$$

$$\therefore x = \frac{2 + 3y}{4}$$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	2	5	8
y	2	6	10



মনে করি, XOX' ও YOY' কে যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং প্রাপ্ত $(2, 2)$, $(-2, 5)$, $(6, -1)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত $(2, 2)$, $(5, 6)$, $(8, 10)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায় p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 2)$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2)$

$$21 \quad 2x - y = 1$$

$$5x + y = 13$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x - y = 1$ (i)

$$5x + y = 13$$
 (ii)

(i) নং হতে পাই,

$$2x = 1 + y$$

$$\text{বা, } x = \frac{y + 1}{2}$$

এই সমীকরণ থেকে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	1	2	3
y	1	3	5

আবার (ii) নং হতে পাই,

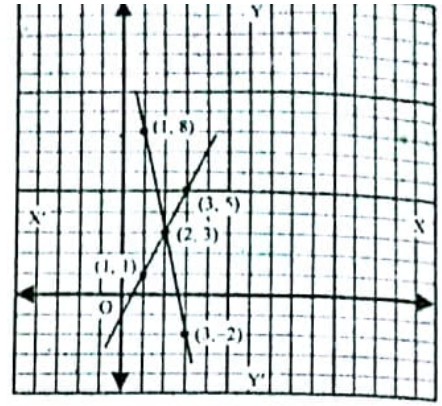
$$5x + y = 13$$

$$\text{বা, } 5x = 13 - y$$

$$\therefore x = \frac{13 - y}{5}$$

এই সমীকরণ থেকে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	2	3	1
y	3	-2	8



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং মূলবিন্দু O । ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত $(2, 3)$, $(3, -2)$, $(1, 8)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখার p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায় p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 3)$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 3)$

$$22 \quad 2x + 5y = 1$$

$$x + 3y = 2$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $2x + 5y = 1$ (i)

$$x + 3y = 2$$
 (ii)

(i) নং হতে পাই,

$$2x = 1 - 5y$$

$$\therefore x = \frac{1 - 5y}{2}$$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

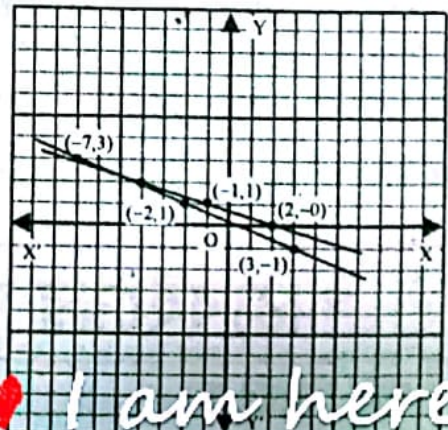
x	-2	3	-7
y	1	-1	3

(ii) নং হতে পাই,

$$x = 2 - 3y$$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে অনুরূপ x এর কয়েকটি মান নির্ণয় করি।

x	2	-1	-7
y	0	1	3



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং হতে প্রাপ্ত $(-2, 1)$, $(3, -1)$, $(-7, 3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরল রেখা।

একইভাবে সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত $(2, 0)$, $(-1, 1)$, $(-4, 2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখা পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-7, 3)$ ।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (-7, 3)$

৪। $3x - 2y = 2$

$5x - 3y = 5$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $3x - 2y = 2$ (i)

$5x - 3y = 5$ (ii)

(i) নং হতে পাই,

$3x = 2 + 2y$

∴ $x = \frac{2y + 2}{3}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান বের করি। ও ছকে স্থাপন করি।

x	2	4	6
y	2	5	8

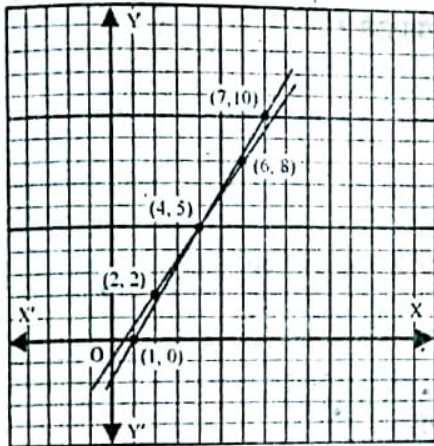
(ii) নং হতে পাই,

$5x = 5 + 3y$

∴ $x = \frac{3y + 5}{5}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান বের করি ও ছকে স্থাপন করি।

x	1	4	7
y	0	5	10



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূল বিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এক ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং হতে প্রাপ্ত $(2, 2)$, $(4, 5)$, $(6, 8)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা। একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত $(1, 0)$, $(4, 5)$, $(7, 10)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরল রেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 5)$ ।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (4, 5)$

৫। $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$

$2x + 3y = 13$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$ (i)

$2x + 3y = 13$ (ii)

(i) নং হতে পাই,

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$

বা, $\frac{3x + 2y}{6} = 2$

বা, $3x + 2y = 12$

বা, $3x = 12 - 2y$

∴ $x = \frac{12 - 2y}{3}$

এই সমীকরণ হতে, y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নিয়ে ছকে স্থাপন করি।

x	4	2	6
y	0	3	-3

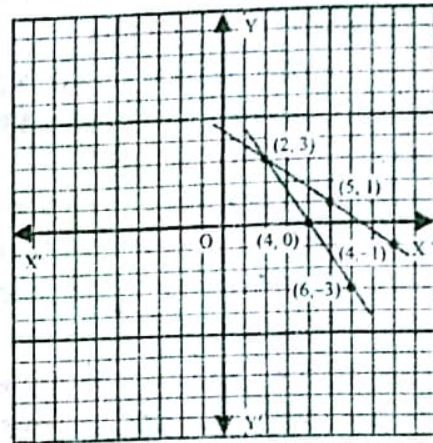
(ii) নং হতে পাই,

$2x = 13 - 3y$

∴ $x = \frac{13 - 3y}{2}$

এই সমীকরণ হতে, y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নিয়ে ছকে স্থাপন করি।

x	5	2	8
y	1	3	-1



মনে করি XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূল বিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত $(4, 0)$, $(2, 3)$, $(6, -3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা। একইভাবে, সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত $(5, 1)$, $(2, 3)$, $(8, -1)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 3)$ ।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 3)$

৬। $3x + y = 6$

$5x + 3y = 12$

সমাধান : দেয়া আছে, $3x + y = 6$ (i)

$5x + 3y = 12$ (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y = 6 - 3x$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি,

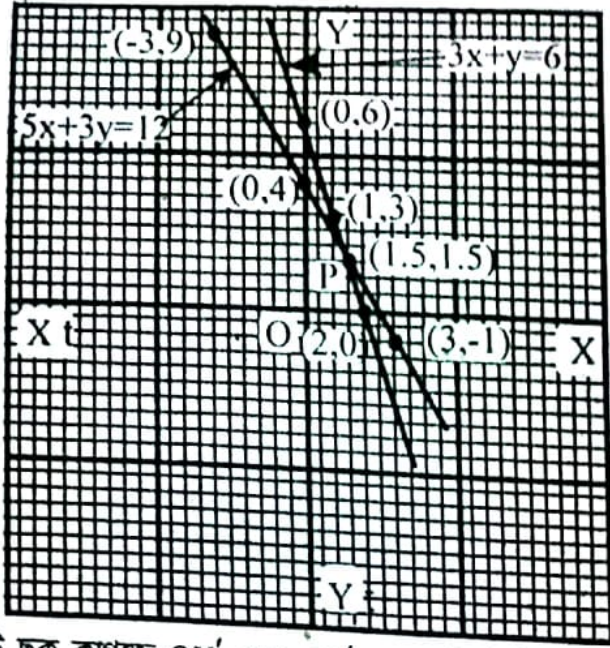
x	0	1	2
y	6	3	0

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $3y = 12 - 5x$

MyMahbub.Com

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	0	3	-3
y	4	-1	9



একটি ছক কাগজে OX' এবং OY' রেখা দুটি টানি। রেখা দুটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O হল মূল বিন্দু।

ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দিগুণকে একক ধরে প্রথম সমীকরণের লেখের $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করি। লেখটি একটি সরলরেখা।

আবার একই একক নিয়ে দ্বিতীয় সমীকরণের লেখের $(0, 4)$, $(3, -1)$, $(-3, 9)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুত্রয় যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সরলরেখাটিকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন প্রথমোক্ত রেখাকে ছেদ করে।

ছেদ বিন্দুর ভূজ ও কোটি নির্ণয় : ধরি সরলরেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। লেখ থেকে দেখা যায়, P বিন্দুর ভূজ ও কোটি যথাক্রমে 1.5 এবং 1.5

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1.5, 1.5)$

৭। $3x + 2y = 4$

$3x - 4y = 1$

সমাধান : দেয়া আছে, $3x - 4y = 1$ (i)

$3x + 2y = 4$ (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $3x - 4y = 1$

বা, $-4y = 1 - 3x$

বা, $y = \frac{1 - 3x}{4}$

$\therefore y = \frac{3x - 1}{4}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	-1	3	-9
y	-1	2	-7

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

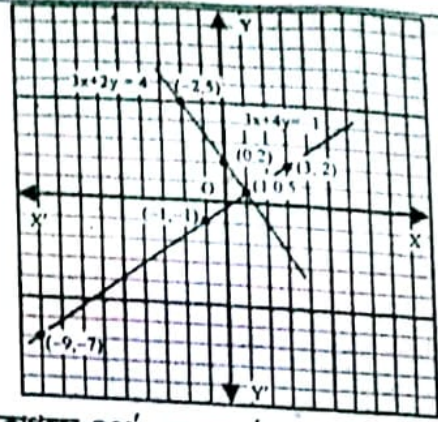
$3x + 2y = 4$

বা, $2y = 4 - 3x$

$\therefore y = \frac{4 - 3x}{2}$

এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করি,

x	0	2	-2
y	2	-1	5



একটি ছক কাগজে OX' এবং OY' রেখা দুটি টানি। রেখা দুটি O বিন্দুতে ছেদ করে। O হল মূল বিন্দু।

ধরি, ছক কাগজের এক ঘর = 1 একক

প্রথম সমীকরণের লেখ অংকন : প্রথম সমীকরণের লেখের $(-1, -1)$, $(3, 2)$, $(-9, -7)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুত্রয় যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সরলরেখাটিকে উভয়দিকে বর্ধিত করি।

দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ অংকন : দ্বিতীয় সমীকরণের লেখের $(0, 2)$, $(2, -1)$, $(-2, 5)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুত্রয় যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সরলরেখাটিকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন প্রথমোক্ত রেখাকে ছেদ করে।

ছেদ বিন্দুর ভূজ ও কোটি নির্ণয় : ধরি সরলরেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।

লেখ থেকে, P বিন্দুর ভূজ ও কোটি যথাক্রমে 1 এবং $\frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$

৮। $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$

$x + \frac{y}{6} = 3$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$ (i)

$x + \frac{y}{6} = 3$ (ii)

(i) নং হতে পাই, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3$

বা, $\frac{3x + 2y}{6} = 3$

বা, $3x + 2y = 18$

বা, $3x = 18 - 2y$

$\therefore x = \frac{18 - 2y}{3}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ কয়েকটি মান নির্ণয় করে ছকে স্থাপন করি।

x	6	4	2
y	0	3	6

(ii) নং হতে পাই, $x + \frac{y}{6} = 3$

বা, $\frac{6x + y}{6} = 3$

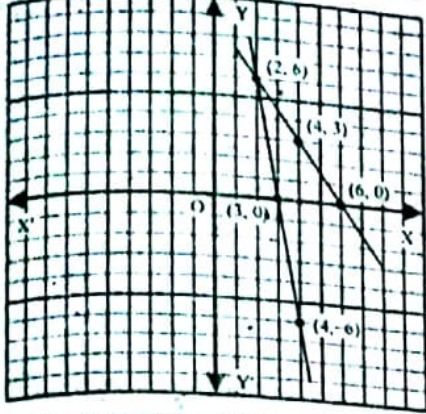
বা, $6x + y = 18$

বা, $6x = 18 - y$

$\therefore x = \frac{18 - y}{6}$

এই সমীকরণ হতে y এর কয়েকটি মান নিয়ে x এর অনুরূপ মান নির্ণয় করে ছকে স্থাপন করি।

x	3	2	4
y	0	6	-6



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত $(6, 0)$, $(4, 3)$, $(2, 6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখাটি একটি সরলরেখা।

একইভাবে সমীকরণ (ii) হতে প্রাপ্ত $(3, 0)$, $(2, 6)$, $(4, -6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রে লেখাটি একটি সরলরেখা। মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর p বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র থেকে দেখা যায়, p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 6)$ ।

∴ সমাধান : $(x, y) = (2, 6)$

১। $3x + 2 = x - 2$

সমাধান : $3x + 2 = x - 2$ সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষকে y ধরি।

অতএব, $y = 3x + 2$ (i)

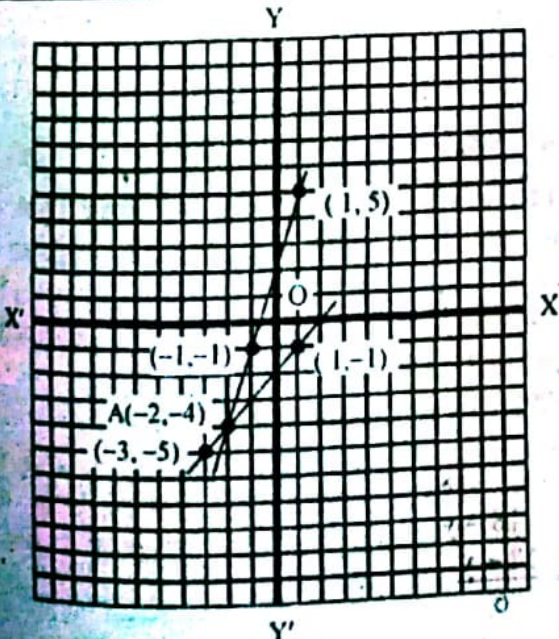
এবং $y = x - 2$ (ii)

(i) নং সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	-1	-2
y	5	-1	-4

আবার, (ii) নং সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	-2	-3
y	-1	-4	-5



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(1, 5)$; $(-2, -4)$ ও $(-1, -1)$ এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (i) নং সমীকরণের লেখ।

আবার, $(1, -1)$, $(-2, -4)$ ও $(-3, -5)$ এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলোর যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (ii) নং সমীকরণের লেখ।

এই সরলরেখা পূর্বোক্ত সরলরেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু। এর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

লেখ থেকে দেখা যায় যে, A বিন্দুর ভূজ = -2

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = -2$

১০। $3x - 7 = 3 - 2x$

সমাধান : $3x - 7 = 3 - 2x$ সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষকে y ধরি।

অতএব, $y = 3x - 7$ (i)

এবং $y = 3 - 7 = 3 - 2x$ সমীকরণটির প্রত্যেক পক্ষকে y ধরি।

অতএব, $y = 3x - 7$ (i)

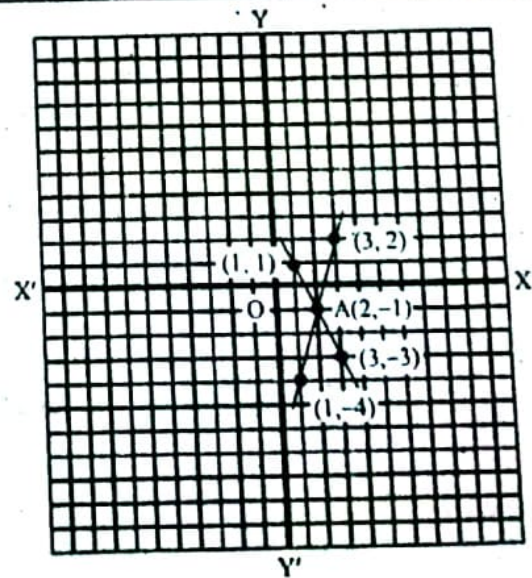
এবং $y = 3 - 2x$ (ii)

(i) নং সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	2	3
y	-4	-1	2

আবার, (ii) এই সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি :

x	1	3	2
y	1	-3	-1



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(1, -4)$, $(2, -1)$ ও $(3, 2)$ এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব, এটিই (i) নং সমীকরণের লেখ।

আবার, (1, 1); (3, -3) ও (2, -1) এর প্রতিরূপী বিন্দুগুলো লেখ
কাগজে স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলোর যোগ করে একটি সরলরেখা
পাওয়া গেল। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি। অতএব,
এটিই (ii) নং সমীকরণের লেখ। এই সরলরেখা পূর্বোক্ত
সরলরেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু উভয় সরলরেখার

সাধারণ বিন্দু। এর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকে সম্বন্ধ করে। দেখ
থেকে দেখা যায় যে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = 2
∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2$

□ অনুশীলনী- ১২.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : ABC ত্রিভুজে $\angle B = 2x$ ডিগ্রি, $\angle C = x$ ডিগ্রি,
 $\angle A = y$ ডিগ্রি এবং $\angle A = \angle B + \angle C$ হলে, x ও y এর
মান নির্ণয় কর।

[পৃষ্ঠা-২১২]

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\triangle ABC$ এর $\angle B = 2x$ ডিগ্রি,

$\angle C = x$ ডিগ্রি

$\angle A = y$ ডিগ্রি

এবং $\angle A = \angle B + \angle C$

বা, $y = 2x + x$

∴ $y = 3x$ (i)

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\text{বা, } y + 2x + x = 180^\circ$$

$$\text{বা, } y + 3x = 180^\circ$$

$$\text{বা, } 3x + 3x = 180^\circ \text{ [(i) নং এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } 6x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

$$\therefore y = 3 \times 30^\circ$$

$$= 90^\circ$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান, } x = 30^\circ \text{ এবং } y = 90^\circ$$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১১। দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের
সমষ্টির সাথে ৫ যোগ করলে যোগফল হবে সংখ্যাটির দশক
স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ। আর সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান
বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা মূল সংখ্যাটি
থেকে ৯ কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্ক
 x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y । অতএব, সংখ্যাটি $10x + y$,

$$\therefore 1ম শর্তানুসারে $x + y + 5 = 3x$ (i)$$

এবং ২য় শর্তানুসারে,

$$10y + x = (10x + y) - 9 \text{ (ii)}$$

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$y = 3x - x - 5, \text{ বা, } y = 2x - 5 \text{ (iii)}$$

আবার, সমীকরণ (ii) থেকে পাই,

$$10y - y + x - 10x + 9 = 0$$

$$\text{বা, } 9y - 9x + 9 = 0$$

$$\text{বা, } y - x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2y - 5 - x + 1 = 0 \text{ [(iii) থেকে } y\text{-এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } x = 4$$

(iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$10x + y = 10 \times 4 + 3$$

$$= 40 + 3$$

$$= 43$$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি 43

উদাহরণ-১২। আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের
আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ
হবে। বর্তমানে কান্নার বয়স কত?

সমাধান : মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর ও
পুত্রের বয়স y বছর।

$$\therefore 1ম শর্তানুসারে $x - 8 = 8(y - 8) \text{ (i)}$$$

$$\text{এবং ২য় শর্তানুসারে, } x + 10 = 2(y + 10) \text{ ... (ii)}$$

$$x - 8 = 8y - 64$$

$$\text{বা, } x = 8y - 64 + 8$$

$$x = 8y - 56 \text{ (iii)}$$

$$\text{আবার, } x + 10 = 2y + 20$$

$$\text{বা, } 8y - 56 + 10 = 2y + 20$$

$$\text{[(iii) থেকে } x \text{ এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } 8y - 2y = 20 + 56 - 10$$

$$\text{বা, } 6y = 66$$

$$\text{বা, } y = 11$$

$$\therefore \text{(iii) থেকে পাই,}$$

$$x = 8 \times 11 - 56 = 88 - 56 = 32$$

∴ বর্তমানে পিতার বয়স 32 বছর ও পুত্রের বয়স 11 বছর।

উদাহরণ-১৩। একটি আয়তাকার বাগানের প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য
অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা 100
মিটার।

ক) বাগানটির দৈর্ঘ্য x মি. ও প্রস্থ y মি. ধরে সমীকরণ
জোট গঠন কর।

খ) বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

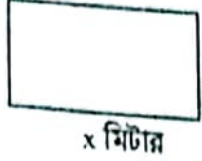
গ) বাগানটির সীমানার বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া
রাস্তা আছে। রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে
প্রতিবর্গমিটারে 110.00 টাকা হিসেবে মোট কত খরচ
হবে?

সমাধান :

আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

১ম শর্তানুসারে $2y = x + 10$ (i)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $2(x + y) = 100$ (ii)



সমীকরণ (i) থেকে পাই, $2y = x + 10$ (i)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $2x + 2y = 100$ (ii)

বা, $2x + x + 10 = 100$ [(i) থেকে $2y$ এর মান বসিয়ে]

বা, $3x = 90$

বা, $x = 30$

∴ (i) থেকে পাই, $2y = 30 + 10$ [x এর মান বসিয়ে]

বা, $2y = 40$

বা, $y = 20$

∴ বাগানটির দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার।

৯। রাস্তার বাইরের দৈর্ঘ্য $(30 + 2 + 2)$ মি. = 34 মি.

এবং প্রস্থ = $(20 + 2 + 2)$ মি. = 24 মি.

∴ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ

বাগানের ক্ষেত্রফল -

বাগানের ক্ষেত্রফল

= $(34 \times 24 - 20)$

বর্গমিটার।

= $(816 - 600)$

বর্গমিটার

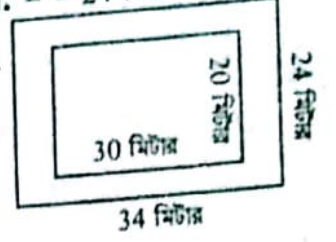
= 216 বর্গমিটার।

∴ ইট দিয়ে রাস্তা তৈরি

করার খরচ

= $216 \times 110 = 23760$

টাকা। (Ans.)



পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১২.৪

১। নিচের কোন শর্তে $ax + by + c = 0$ ও $px + qy + r = 0$ সমীকরণ জোড়টি সঙ্গতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে?

ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ খ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

গ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ ঘ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

উত্তর : ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$

২। $x + y = 4$, $x - y = 2$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি?

ক) (2, 4) খ) (4, 2)

গ) (3, 1) ঘ) (1, 3)

উত্তর : গ) (3, 1)

৩। $x + y = 6$ ও $2x = 4$ হলে, y মান কত?

ক) 2 খ) 4

গ) 6 ঘ) 8

উত্তর : খ) 4

৪। নিচের কোনটির জন্য পাশের ছকটি সঠিক?

x	0	2	4
y	-4	0	4

ক) $y = x - 4$ খ) $y = 8 - x$

গ) $y = 4 - 2x$ ঘ) $y = 2x - 4$

উত্তর : ঘ) $y = 2x - 4$

৫। $2x - y = 8$ এবং $x - 2y = 4$ হলে, $x + y =$ কত?

ক) 0 খ) 4

গ) 8 ঘ) 12

উত্তর : খ) 4

৬। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. $2x - y = 0$ ও $x - 2y = 0$ সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল

ii. $x - 2y + 3 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র $(-3, 0)$ বিন্দুগামী

iii. $3x + 4y = 1$ সমীকরণের লেখচিত্র একটি সরলরেখা

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও iii

খ) ii ও iii

গ) i ও iii

ঘ) i, ii ও iii

উত্তর : খ) ii ও iii

৭। আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা 20 মিটার।

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(১) ঘরটির দৈর্ঘ্য কত মিটার?

ক) 10 খ) 8

গ) 6 ঘ) 4

উত্তর : গ) 6

(২) ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

ক) 24 খ) 32

গ) 48 ঘ) 80

উত্তর : ক) 24

(৩) ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে 900 টাকা হিসেবে মোট কত খরচ হবে?

ক) 72000

খ) 43200

গ) 28800

ঘ) 21600

উত্তর : ঘ) 21600

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (৮ - ১৭)

৮। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ

করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি

থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয়

কর।

সমাধান : মনে করি লব = x এবং হর = y

∴ ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{y}$

$$১ম শর্তমতে, \frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots(i)$$

$$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(ii)$$

(i)নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$\text{বা, } 5(x+1) = 4(y+1)$$

$$\text{বা, } 5x+5 = 4y+4$$

$$\text{বা, } 5x-4y+5-4=0$$

$$\text{বা, } 5x-4y+1=0 \dots\dots\dots(iii)$$

আবার (ii)নং সমীকরণ থেকে পাই

$$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } 2(x-5) = 1(y-5)$$

$$\text{বা, } 2x-10 = y-5$$

$$\text{বা, } 2x-y-10+5=0$$

$$\text{বা, } 2x-y-5=0 \dots\dots\dots(iv)$$

এখন (iv)নং কে 4 দ্বারা গুণ করে (iii)নং এর সাথে বিয়োগ করি,

$$5x-4y+1=0$$

$$8x-4y-20=0$$

$$(-) \quad -3x+0+21=0$$

$$\text{বা, } -3x = -21$$

$$\text{বা, } x = \frac{-21}{-3}$$

$$\therefore x = 7$$

x এর মান (iii) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$5 \cdot 7 - 4y + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 35 - 4y + 1 = 0$$

$$\text{বা, } -4y + 36 = 0$$

$$\text{বা, } -4y = -36$$

$$\text{বা, } y = \frac{-36}{-4}$$

$$\therefore y = 9$$

অতএব নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$

৯। কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, লব = x এবং হর = y

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি} = \frac{x}{y}$$

$$\text{প্রথম শর্তানুসারে, } \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{দ্বিতীয় শর্তানুসারে, } \frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots(ii)$$

$$\text{সমীকরণ (i) থেকে পাই, } \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } 2(x-1) = y+2$$

$$\text{বা, } 2x-2 = y+2$$

$$\text{বা, } 2x-2-y-2=0$$

$$\text{বা, } 2x-y-4=0 \dots\dots\dots(iii)$$

$$\text{সমীকরণ (ii) থেকে পাই, } \frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{বা, } 3(x-7) = y-2$$

$$\text{বা, } 3x-21 = y-2$$

$$\text{বা, } 3x-21-y+2=0$$

$$\text{বা, } 3x-y-19=0 \dots\dots\dots(iv)$$

সমীকরণ (iii) এবং (iv) থেকে পাই,

$$2x-y-4=0$$

$$3x-y-19=0$$

$$(-) \text{ করে, } -x+15=0$$

$$\text{বা, } -x = -15$$

$$\therefore x = 15$$

(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$2x-y-4=0$$

$$\text{বা, } 2 \times 15 - y - 4 = 0$$

$$\text{বা, } 30 - y - 4 = 0$$

$$\text{বা, } -y + 26 = 0$$

$$\text{বা, } -y = -26$$

$$\therefore y = 26$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভগ্নাংশটি, } \frac{x}{y} = \frac{15}{26}$$

১০। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10x + y$$

$$\text{প্রথম শর্তানুসারে, } y = 3x + 1 \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি } 10y + x$$

$$\text{দ্বিতীয় শর্তানুসারে, } 10y + x = 8(x + y) \dots\dots\dots(ii)$$

এখন, (i) নং এর সাহায্যে (ii) নং থেকে পাই,

$$10(3x+1) + x = 8(x+3x+1)$$

$$\text{বা, } 30x + 10 + x = 8(4x+1)$$

$$\text{বা, } 31x + 10 = 32x + 8$$

$$\text{বা, } 31x - 32x = 8 - 10$$

$$\text{বা, } -x = -2$$

$$\therefore x = 2$$

সুতরাং, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$y = 3x + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি } 10x + y = 10 \cdot 2 + 7 = 27$$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 27.

১ম শর্তমতে, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ (i)

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$ (ii)

(i)নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$

বা, $5(x+1) = 4(y+1)$

বা, $5x+5 = 4y+4$

বা, $5x-4y+5-4=0$

বা, $5x-4y+1=0$ (iii)

আবার (ii)নং সমীকরণ থেকে পাই

$\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

বা, $2(x-5) = 1(y-5)$

বা, $2x-10 = y-5$

বা, $2x-y-10+5=0$

বা, $2x-y-5=0$ (iv)

এখন (iv)নং কে 4 দ্বারা গুণ করে (iii)নং এর সাথে বিয়োগ করি,

$5x-4y+1=0$

$8x-4y-20=0$

(-) $-3x+0+21=0$

বা, $-3x=-21$

বা, $x = \frac{-21}{-3}$

$\therefore x=7$

x এর মান (iii) সমীকরণে বসিয়ে পাই

$5 \cdot 7 - 4y + 1 = 0$

বা, $35 - 4y + 1 = 0$

বা, $-4y + 36 = 0$

বা, $-4y = -36$

বা, $y = \frac{-36}{-4}$

$\therefore y=9$

অতএব নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$

৯। কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, লব = x এবং হর = y

\therefore ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{y}$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$ (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$ (ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$

বা, $2(x-1) = y+2$

বা, $2x-2 = y+2$

বা, $2x-2-y-2=0$

বা, $2x-y-4=0$ (iii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$

বা, $3(x-7) = y-2$

বা, $3x-21 = y-2$

বা, $3x-21-y+2=0$

বা, $3x-y-19=0$ (iv)

সমীকরণ (iii) এবং (iv) থেকে পাই,

$2x-y-4=0$

$3x-y-19=0$

(-) করে, $-x+15=0$

বা, $-x=-15$

$\therefore x=15$

(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$2x-y-4=0$

বা, $2 \times 15 - y - 4 = 0$

বা, $30 - y - 4 = 0$

বা, $-y + 26 = 0$

বা, $-y = -26$

$\therefore y=26$

\therefore নির্ণেয় ভগ্নাংশটি, $\frac{x}{y} = \frac{15}{26}$

১০। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y

\therefore সংখ্যাটি = $10x + y$

প্রথম শর্তানুসারে, $y = 3x + 1$ (i)

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি $10y + x$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10y + x = 8(x + y)$ (ii)

এখন, (i) নং এর সাহায্যে (ii) নং থেকে পাই,

$10(3x+1) + x = 8(x+3x+1)$

বা, $30x + 10 + x = 8(4x+1)$

বা, $31x + 10 = 32x + 8$

বা, $31x - 32x = 8 - 10$

বা, $-x = -2$

$\therefore x=2$

সুতরাং, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$y = 3x + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

\therefore সংখ্যাটি $10x + y = 10 \cdot 2 + 7 = 27$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 27.

দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর ৪; সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল ১১০; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, এককের অংক = x

∴ দশকের অংক = $x + 4$

তাহলে, সংখ্যাটি দাঁড়ায়,

$$= 10 \times (x + 4) + x$$

$$= 10x + 40 + x = 11x + 40$$

আবার, অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে দাঁড়ায়

$$= 10 \times x + x + 4$$

$$= 10x + x + 4 = 11x + 4$$

প্রশ্নানুসারে, $11x + 40 + 11x + 4 = 110$

$$\text{বা, } 22x + 44 = 110$$

$$\text{বা, } 22x = 110 - 44$$

$$\text{বা, } 22x = 66$$

$$\text{বা, } x = \frac{66}{22}$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 11x + 40 = 11 \cdot 3 + 40$$

$$= 33 + 40 = 73$$

$$\text{আবার, স্থান পরিবর্তনকারী সংখ্যাটি} = 11x + 4$$

$$= 11 \cdot 3 + 4 = 33 + 4 = 37$$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি = ৭৩ অথবা, ৩৭

২। মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। ৫ বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, বর্তমানে দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি = x বছর

$$\therefore \text{বর্তমানে মাতার বয়স} = 4x \text{ বছর}$$

$$\text{আবার ৫ বছর পরে দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি} = (x + 5 \times 2) \text{ বছর}$$

$$\text{এবং ৫ বছর পরে মাতার বয়স} = (4x + 5) \text{ বছর হবে।}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 4x + 5 = (x + 10) \cdot 2$$

$$\text{বা, } 4x + 5 = 2x + 20$$

$$\text{বা, } 4x - 2x = 20 - 5$$

$$\text{বা, } 2x = 15$$

$$\text{বা, } x = \frac{15}{2}$$

$$\text{বা, } x = \frac{15}{2} \text{ বছর}$$

$$\therefore \text{মাতার বর্তমান বয়স} = \left(4 \times \frac{15}{2}\right) \text{ বছর}$$

$$= 30 \text{ বছর}$$

অতএব, মাতার বর্তমান বয়স ৩০ বছর।

১৩। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৫ মিটার কম ও প্রস্থ ৩ মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল ৯ বর্গমিটার কম হবে। আর দৈর্ঘ্য ৩ মিটার ও প্রস্থ ২ মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল ৬৭ বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য y মিটার এবং প্রস্থ x মিটার

তাহলে ক্ষেত্রফল = xy বর্গ মিটার

এখন, দৈর্ঘ্য ৫ মিটার কম এবং প্রস্থ ৩ মিটার অধিক হলে

$$\text{ক্ষেত্রফল} = (y - 5)(x + 3) \text{ বর্গ মিটার}$$

$$= (xy - 5x + 3y - 15) \text{ বর্গ মি.}$$

১ম শর্তানুসারে,

$$xy - (xy - 5x + 3y - 15) = 9$$

$$\text{বা, } xy - xy + 5x - 3y + 15 = 9$$

$$\text{বা, } 5x - 3y = 9 - 15$$

$$\therefore 5x - 3y = -6 \dots\dots(i)$$

আবার, দৈর্ঘ্য ৩ মিটার এবং প্রস্থ ২ মিটার বেশি

$$\text{হলে ক্ষেত্রফল} = (y + 3)(x + 2) \text{ বর্গ. মি.}$$

$$= (xy + 3x + 2y + 6) \text{ বর্গ. মি.}$$

২য় শর্তানুসারে,

$$xy + 3x + 2y + 6 - 67 = xy$$

$$\text{বা, } xy - xy + 3x + 2y - 61 = 0$$

$$\text{বা, } 3x + 2y = 61 \dots\dots(ii)$$

(i) সমীকরণকে ২ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$10x - 6y = -12 \dots\dots(iii)$$

(ii) কে ৩ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$9x + 6y = 183 \dots\dots(iv)$$

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$10x - 6y = -12$$

$$9x + 6y = 183$$

$$(+)\text{ করে } 19x = 171$$

$$\text{বা, } x = \frac{171}{19}$$

$$\therefore x = 9$$

এখন, x -এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 61$

$$\text{বা, } 3 \times 9 + 2y = 61$$

$$\text{বা, } 27 + 2y = 61$$

$$\text{বা, } 2y = 61 - 27$$

$$\text{বা, } 2y = 34$$

$$\text{বা, } y = \frac{34}{2}$$

$$\therefore y = 17$$

অতএব, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য ১৭ মিটার এবং প্রস্থ ৯ মিটার

১৪। একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় ১৫ কি.মি যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় ৫ কি.মি। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.
এবং স্রোতের বেগ " y কি.মি.

প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 15$ (i)

দ্বিতীয় " $x - y = 5$ (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই

$$x + y = 15$$

$$x - y = 5$$

$$(+)\ 2x = 20$$

$$\text{বা, } x = \frac{20}{2}$$

$$\therefore x = 10$$

এখন x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$10 + y = 15$$

$$\text{বা, } y = 15 - 10$$

$$\therefore y = 5$$

অতএব নৌকার বেগ ঘণ্টায় ১০ কি.মি

এবং স্রোতের " " ৫ কি.মি (Ans.)

১৫। একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতন বৃদ্ধি পান তার মাসিক বেতন ৪ বছর পর ৪৫০০ টাকা ও ৮ বছর পর ৫০০০ টাকা হয়। তাঁর চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, গার্মেন্টস শ্রমিকের মাসিক বেতন x টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি y টাকা।

\therefore ৪ বছর পর ঐ শ্রমিকের বেতন হবে $(x + 4y)$ টাকা

৮ " " " " " " $(x + 8y)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $x + 4y = 4500$ (i)

$x + 8y = 5000$ (ii)

এখন (i) নং কে ২ দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে বিয়োগ করে পাই

$$2x + 8y = 9000$$

$$x + 8y = 5000$$

$$(-)\ x + 0 = 4000$$

$$\therefore x = 4000 \text{ টাকা}$$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$4000 + 4y = 4500$$

$$\text{বা, } 4y = 4500 - 4000$$

$$\text{বা, } 4y = 500$$

$$\text{বা, } y = \frac{500}{4}$$

$$\therefore y = 125 \text{ টাকা}$$

অতএব, মাসিক বেতন ৪০০০ টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি ১২৫ টাকা। (Ans.)

১৬। একটি সরল সমীকরণদ্বয়

$$x + y = 10$$

$$3x - 2y = 0$$

ক) দেখাও যে, সমীকরণদ্বয়টি সঙ্গতিপূর্ণ। এর কয়টি সমাধান আছে?

খ) সমীকরণদ্বয়টি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ) সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x -অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $x + y = 10$ (i)

$3x - 2y = 0$ (ii)

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{1}{3}$

y " " " $= -\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$$

সমীকরণদ্বয়টি সঙ্গতিপূর্ণ। এর সমাধান আছে মাত্র একটি।

খ) সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,

$$x = 10 - y$$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$3(10 - y) - 2y = 0$$

$$\text{বা, } 30 - 3y - 2y = 0$$

$$\text{বা, } -5y = -30$$

$$\therefore y = 6$$

y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই

$$x = 10 - 6$$

$$\therefore x = 4$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান (4, 6)

গ) $x + y = 10$ (i)

$3x - 2y = 0$ (ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y = 10 - x$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	10	5
y	10	0	5

সমীকরণটির লেখের তিনটি বিন্দু হলো (0, 10), (10, 0), (5, 5)।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$-2y = -3x$$

$$\text{বা, } y = \frac{3x}{2}$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	4	-2
y	0	6	-3

সমীকরণটির রেখের তিনটি বিন্দু হলো

(0, 0), (4, 6) এবং (-2, -3).

১৪। একটি নৌকা পিছু বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় ১৫ কি.মি যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় ৫ কি.মি। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.
এবং স্রোতের বেগ y কি.মি.

প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 15$ (i)

দ্বিতীয় " $x - y = 5$ (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই

$$x + y = 15$$

$$x - y = 5$$

$$(+)\ 2x = 20$$

$$\text{বা, } x = \frac{20}{2}$$

$$\therefore x = 10$$

এখন x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$10 + y = 15$$

$$\text{বা, } y = 15 - 10$$

$$\therefore y = 5$$

অতএব নৌকার বেগ ঘণ্টায় ১০ কি.মি

এবং স্রোতের " " ৫ কি.মি (Ans.)

১৫। একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতন বৃদ্ধি পান তার মাসিক বেতন ৪ বছর পর ৪৫০০ টাকা ও ৮ বছর পর ৫০০০ টাকা হয়। তাঁর চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, গার্মেন্টস শ্রমিকের মাসিক বেতন x টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি y টাকা।

\therefore ৪ বছর পর ঐ শ্রমিকের বেতন হবে $(x + 4y)$ টাকা

৮ " " " " " " $(x + 8y)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $x + 4y = 4500$ (i)

$x + 8y = 5000$ (ii)

এখন (i) নং কে ২ দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে বিয়োগ করে পাই

$$2x + 8y = 9000$$

$$x + 8y = 5000$$

$$(-)\ x + 0 = 4000$$

$$\therefore x = 4000 \text{ টাকা}$$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$4000 + 4y = 4500$$

$$\text{বা, } 4y = 4500 - 4000$$

$$\text{বা, } 4y = 500$$

$$\text{বা, } y = \frac{500}{4}$$

$$\therefore y = 125 \text{ টাকা}$$

অতএব, মাসিক বেতন ৪০০০ টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি ১২৫ টাকা। (Ans.)

১৬। একটি সরল সমীকরণজোড়ি

$$x + y = 10$$

$$3x - 2y = 0$$

ক) দেখাও যে, সমীকরণজোড়িটি সঙ্গতিপূর্ণ। এর কয়টি সমাধান আছে?

খ) সমীকরণজোড়িটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ) সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x -অক্ষের সাথে যে জিন্দু গঠন করে তার কেন্দ্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $x + y = 10$ (i)

$3x - 2y = 0$ (ii)

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{1}{3}$

y " " " $= -\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$$

সমীকরণজোড়িটি সঙ্গতিপূর্ণ। এর সমাধান আছে মাত্র একটি।

খ) সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,

$$x = 10 - y$$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$3(10 - y) - 2y = 0$$

$$\text{বা, } 30 - 3y - 2y = 0$$

$$\text{বা, } -5y = -30$$

$$\therefore y = 6$$

y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই

$$x = 10 - 6$$

$$\therefore x = 4$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান (4, 6)

গ) $x + y = 10$ (i)

$3x - 2y = 0$ (ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y = 10 - x$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	10	5
y	10	0	5

সমীকরণটির রেখার তিনটি বিন্দু হলো (0, 10), (10, 0), (5, 5)।

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$-2y = -3x$$

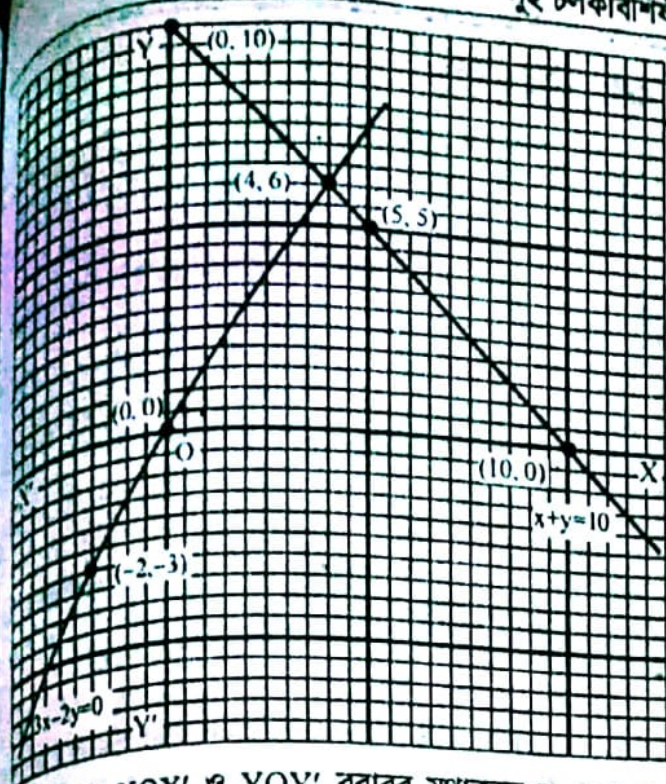
$$\text{বা, } y = \frac{3x}{2}$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান বের করি।

x	0	4	-2
y	0	6	-3

সমীকরণটির রেখার তিনটি বিন্দু হলো

(0, 0), (4, 6) এবং (-2, -3)।



ক কাগজের XOX' ও YOY' বরাবর যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং ক্ষুদ্রতম বর্গের ২ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণ (i) হতে প্রাপ্ত লেখের বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে পরস্পর কোণ করি। ফলে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল।

কখন, একই অক্ষযুগল ও একক ধরে (ii) নং সমীকরণ হতে প্রাপ্ত লেখের বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করি। এটিও একটি সরলরেখা।

দুটি রেখা দুটি পরস্পরকে $P(4, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। মনে করি, $x + y = 10$ ও $3x - 2y = 0$ সমীকরণ দুটির লেখ x অক্ষকে যথাক্রমে $R(10, 0)$ ও $O(0, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে $\triangle OPR$ -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। ছক কাগজ হতে দেখা যায়, উক্ত $\triangle OPR$ -এর ভূমি ১০ একক এবং উচ্চতা ৬ একক।

$$\therefore \triangle OPR \text{ ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30 \text{ বর্গ একক}$$

১৭। কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে ৭ যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা ২ হয়। আবার হর হতে, ২ বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা ১ হয়।

ক) ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণ জোট গঠন কর।

খ) সমীকরণ জোটটি আড়গুনন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত?

গ) সমীকরণ জোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান

১) যেহেতু ভগ্নাংশটি ধরা হয়েছে $\frac{x}{y}$

$$১ম শর্তমতে, \frac{x+7}{y} = 2$$

$$\text{বা, } x+7=2y$$

$$\text{বা, } x-2y+7=0$$

$$২য় শর্তমতে, \frac{x}{y-2} = 1$$

$$\text{বা, } x=y-2$$

$$\text{বা, } x-y+2=0$$

সুতরাং $x-2y+7=0$ এবং $x-y+2=0$ সমীকরণ দুইটি সমীকরণ জোট।

খ) "ক" থেকে সমীকরণ জোট দুইটি হলো

$$x-2y+7=0 \dots\dots\dots (i)$$

$$x-y+2=0 \dots\dots\dots (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) নং থেকে আড়গুনন করে পাই

$$\frac{x}{(-2) \times 2 - (-1) \times 7} = \frac{y}{7 \times 1 - 1 \times 2} = \frac{1}{1 \times (-1) - 1 \times (-2)}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-4+7} = \frac{y}{7-2} = \frac{1}{-1+2}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{1}{1}$$

$$\text{এখন, } \frac{x}{3} = 1 \text{ এবং } \frac{y}{5} = 1$$

$$\therefore x=3 \quad \therefore y=5$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (3, 5)$$

$$\text{অতএব ভগ্নাংশটি হলো } = \frac{3}{5} \quad (\text{Ans.})$$

গ) সমীকরণ জোট দুইটি হলো

$$x-2y+7=0 \dots\dots\dots (i)$$

$$x-y+2=0 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং থেকে পাই, $x=2y-7$

এই সমীকরণের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি

x	-5	-3	-1
y	1	2	3

আবার (ii) নং থেকে পাই,

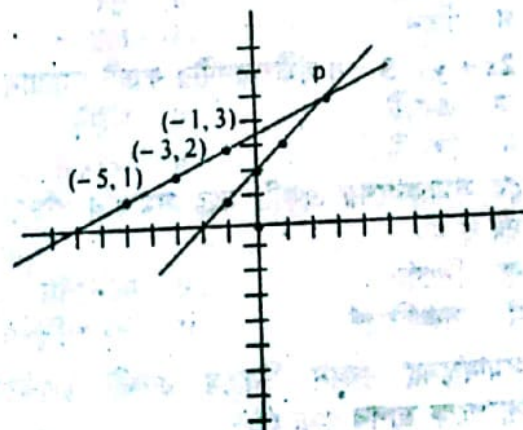
$$x=y-2$$

অতএব এই সমীকরণের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	-1	0	1
y	1	2	3

একটি ছক কাগজে Ox' ও Oy' রেখা দুইটি টানি। রেখা দুটি O বিন্দুতে ছেদ করে। O হলো মূল বিন্দু। ধরি, ছক কাগজের এক ঘর = ১ একক প্রথমে (i) নং সমীকরণের লেখের $(-5, 1)$, $(-3, 2)$, $(-1, 3)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। দেখা যায় তারা একটি সরলরেখা উৎপন্ন করেছে। সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করি।

আবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, প্রদত্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এখন সরলরেখাটিকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন প্রথমোক্ত রেখাকে ছেদ করে।



ধরি, সরলরেখা দুটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। লেখ থেকে P বিন্দুর ভূজ ও ক্রান্তি যথাক্রমে (৩ ও ৫)

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3, 5)$ (সত্যতা যাচাই হলো) (Ans.)

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা-

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও তাদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবে।
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



□ **অনুক্রম (Sequence) :** যদি কতগুলো সংখ্যা বা রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এভাবে পর পর সাজানো যায়, তবে এটিকে অনুক্রম বলে। যেমন :

- 1, 2, 3, 4, 5, 6,
- 1, 3, 9, 27,
- 1, 2, 4, 7, 11,
- 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3,

□ **ধারা (Series) :** যদি অনুক্রমের পদগুলোকে পর পর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হয়, তবে তাকে ধারা বলে। যেমন:

- 1 + 2 + 3 + 4 +
- 1 + 3 + 9 + 27 +
- 1 + 2 + 4 + 5 + 8 +
- 3 + 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) +

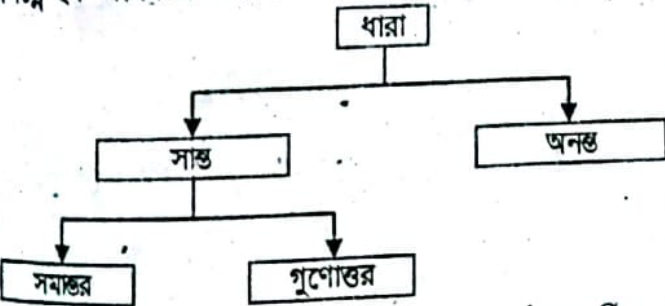
□ **ধারার প্রকারভেদ :** ধারা প্রধানত দুই প্রকার। যেমন-

- সান্ত বা সসীম ধারা এবং
- অনন্ত বা অসীম ধারা।

সান্ত ধারাকে আবার দুইভাগে ভাগ করা যায়। যেমন -

- সমান্তর ধারা।
- গুণোত্তর ধারা।

□ **নিম্নে ছক আকারে ধারার প্রকারভেদ দেখানো হলো :**



□ **সমান্তর ধারা :** যে ধারায় কোনো পদকে তার পরবর্তী পদ থেকে বিয়োগ করলে একই সংখ্যা বা রাশি পাওয়া যায়, তাকে সমান্তর ধারা বলে এবং এই বিয়োগফলকে ধারার সাধারণ অন্তর বলে। যেমন-

2 + 4 + 6 + 8 + 10 ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

কারণ পরপর দুটি পদের অন্তর সমান।

∴ সাধারণ অন্তর

$$= 2\text{য় পদ} - 1\text{ম পদ} = 3\text{য় পদ} - 2\text{য় পদ} = 8\text{র্থ পদ} - 7\text{ম পদ} = \dots$$

$$= 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = \dots$$

$$= 2 = 2 = 2 = \dots$$

□ **গুণোত্তর ধারা :** যে ধারার কোন পদের সাথে তার পরবর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে। যেমন-

3 + 6 + 12 + 24 + ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। কারণ পরপর দুটি পদের অনুপাত সমান।

$$\therefore \text{সাধারণ অনুপাত} = \frac{2\text{য় পদ}}{1\text{ম পদ}} = \frac{3\text{য় পদ}}{2\text{য় পদ}} = \frac{5\text{ম পদ}}{4\text{র্থ পদ}} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \dots = 2 = 2 = 2 = \dots$$

□ **অসীম ধারা :** যে ধারার পদসংখ্যা অসীম, তাকে অসীম ধারা বলে। যেমন :

$$1 + 2 + 3 + \dots \infty$$

□ **প্রয়োজনীয় সূত্র :**

সমান্তর ধারার সূত্র :

- কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে, প্রথম হতে n -তম পদ বা শেষ পদ, $p = a + (n - 1)d$
- কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে,

$$\text{প্রথম } n \text{ পদের সমষ্টি, } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

গুণোত্তর ধারার সূত্র :

- কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে, প্রথম হতে n -তম পদ $= aq^{n-1}$
- কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত q হলে,

প্রথম n পদের সমষ্টি

(i) $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ [যখন $q > 1$]

(ii) $S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ [যখন $q < 1$]

□ আরও কিছু গুরুত্বপূর্ণ সূত্র :

i. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ, $1 + 2$

$+ 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ii. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি অর্থাৎ,

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি অর্থাৎ,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

iv. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ

$1 + 3 + 5 + \dots + n = n^2$

v. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি অর্থাৎ

$2 + 4 + 6 + \dots + n = n(n+1)$

□ অনুশীলনী- ১৩.১

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

পৃষ্ঠা : ২১৬

১। নিচে ছয়টি অনুক্রমের সাধারণ পদ দেওয়া আছে। অনুক্রমগুলি লেখ :

i) $\frac{1}{n}$

ii) $\frac{n-1}{n+1}$

iii) $\frac{1}{2^n}$

iv) $\frac{1}{2^{n-1}}$

v) $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

vi) $(-1)^{n-1} \frac{n}{2n+1}$

সমাধান :

i) $\frac{1}{n}$

 $n = 1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{1} = 1$ $n = 2$ " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $n = 3$ " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ \therefore নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

ii) $\frac{n-1}{n+1}$

 $n = 1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$ $n = 2$ " " দ্বিতীয় পদ $\frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ $n = 3$ " " তৃতীয় পদ $\frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4}$ \therefore নির্ণেয় অনুক্রম $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

iii) $\frac{1}{2^n}$

 $n = 1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

$n = 2$ " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$n = 3$ " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

 \therefore নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \dots$

iv) $\frac{1}{2^{n-1}}$

 $n = 1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$ $n = 2$ " " দ্বিতীয় পদ $\frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ $n = 3$ " " তৃতীয় পদ $\frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ \therefore নির্ণেয় অনুক্রম $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

v) $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

 $n = 1$ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ $(-1)^{1+1} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$= (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

 $n = 2$ " " দ্বিতীয় পদ $(-1)^{2+1} \frac{2}{2+1} = -\frac{2}{3}$

$= (-1)^3 \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

 $n = 3$ " " তৃতীয় পদ $(-1)^{3+1} \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$= (-1)^4 \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

 \therefore নির্ণেয় অনুক্রম $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

$$(-1)^{n-1} \frac{n}{2n+1}$$

$$n=1 \text{ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ } (-1)^{1-1} \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$$

$$= (-1)^0 \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$n=2 \text{ " " দ্বিতীয় পদ } (-1)^{2-1} \frac{2}{2 \cdot 2 + 1}$$

$$= (-1)^1 \frac{2}{5} = (-1) \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$n=3 \text{ " " তৃতীয় পদ } (-1)^{3-1} \frac{3}{2 \cdot 3 + 1}$$

$$= \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় অনুক্রম } \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots$$

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লিখ।

সমাধান :

$$(-1)^n \frac{n+1}{4n-2}$$

$$n=1 \text{ হলে অনুক্রমটির প্রথম পদ } (-1)^{2 \cdot 1} \frac{1+1}{4 \cdot 1 - 2} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1$$

$$n=2 \text{ " " দ্বিতীয় পদ } (-1)^{2 \cdot 2} \frac{2+1}{4 \cdot 2 - 2} = 1 \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \text{ " " তৃতীয় পদ } (-1)^{3 \cdot 1} \frac{3+1}{4 \cdot 3 - 2} = 1 \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় অনুক্রম } 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots$$

□ কাজ :

পৃষ্ঠ : ২১৭

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 7 হলে, ধারাটির প্রথম ছয়টি পদ, ২২তম পদ, r-তম এবং (2p + 1) তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : কোনো সমান্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অন্তর d, পদ সংখ্যা n হলে,

$$\text{ধারাটির } n \text{ তম পদ} = a + (n-1)d$$

দেওয়া আছে,

$$\text{প্রথম পদ, } a = 5$$

$$\text{সাধারণ অন্তর, } d = 7$$

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = a + (2-1)d = 5 + 1 \cdot 7 = 12$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = a + (3-1)d = 5 + 2 \cdot 7 = 19$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ} = a + (4-1)d = 5 + 3 \cdot 7 = 26$$

$$\text{ধারাটির পঞ্চম পদ} = a + (5-1)d = 5 + 4 \cdot 7 = 33$$

$$\text{ধারাটির ষষ্ঠ পদ} = a + (6-1)d = 5 + 5 \cdot 7 = 40$$

$$\text{ধারাটির ২২ তম পদ} = a + (22-1)d = 5 + 21 \cdot 7 = 152$$

$$\text{ধারাটির } r \text{ তম পদ} = a + (r-1)d = 5 + (r-1)7$$

$$= 5 + 7r - 7$$

$$= 7r - 2$$

$$\text{ধারাটির } (2p+1) \text{ তম পদ} = a + (2p+1-1)d$$

$$= 5 + 2p \cdot 7$$

$$= 5 + 14p$$

$$= 14p + 5$$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১। $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 383?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$, সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 11 - 8 = 3$

\therefore ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 383

আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n-1)d$

$$\therefore a + (n-1)d = 383$$

$$\text{বা, } 5 + (n-1)3 = 383$$

$$\text{বা, } 5 + 3n - 3 = 383$$

$$\text{বা, } 3n = 383 - 5 + 3$$

$$\text{বা, } 3n = 381$$

$$\text{বা, } n = \frac{381}{3} \therefore n = 127$$

\therefore প্রদত্ত ধারার 127 তম পদ = 383. (Ans.)

উদাহরণ-২। প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$$

\therefore প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 1275 (Ans.)

উদাহরণ-৩। $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 =$ কত?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = 2 - 1 = 1$ এবং শেষ পদ $p = 99$

\therefore ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 99

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n-1)d$

$$\therefore a + (n-1)d = 99$$

$$\text{বা, } 1 + (n-1)1 = 99$$

$$\text{বা, } 1 + n - 1 = 99$$

$$\therefore n = 99$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\text{যেহেতু } S_n = \frac{n}{2}(a+p)$$

$$\therefore S_{99} = \frac{99}{2}(1+99)$$

$$= \frac{99 \times 100}{2} = 4950$$

(iv) নং সূত্র হতে, সমান্তর ধারার প্রথম n -সংখ্যক পদের

$$\text{সমষ্টি, } S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

সুতরাং, ধারাটির 99টি পদের সমষ্টি S_{99}

$$= \frac{99}{2} \{2 \times 1 + (99 - 1) 1\} = \frac{99}{2} (2 + 98)$$

$$= \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950 \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-৪। $7 + 12 + 17 + \dots$ ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

\therefore এটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n -সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1) d\}$$

তাহলে, 30টি পদের সমষ্টি S_{30}

$$= \frac{30}{2} \{2 \cdot 7 + (30 - 1) 5\} = 15 (14 + 29 \times 5)$$

$$= 15 (14 + 145) = 15 \times 159$$

$$= 2385 \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-৫। ক তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

- তিনি n তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?
- উপরোক্ত সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।
- তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?
- এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান :

i. প্রথম মাসে সঞ্চয় করেন 1200 টাকা

দ্বিতীয় মাসে সঞ্চয় করেন $(1200 + 100)$ টাকা = 1300 টাকা

তৃতীয় মাসে সঞ্চয় করেন $(1300 + 100)$ টাকা = 1400 টাকা

চতুর্থ মাসে সঞ্চয় করেন $(1400 + 100)$ টাকা = 1500 টাকা
সুতরাং, এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 1200$
সাধারণ অন্তর $d = 1300 - 1200 = 100$

$$\begin{aligned} \text{ধারাটির } n \text{ তম পদ} &= a + (n - 1)d \\ &= 1200 + (n - 1) 100 \\ &= 1200 + 100n - 100 \\ &= 100n + 1100 \end{aligned}$$

অতএব, তিনি n তম মাসে সঞ্চয় করেন $(100n + 1100)$ টাকা।

ii. এক্ষেত্রে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারাটি হবে $1200 + 1300 + 1400 + \dots + (100n + 1100)$

iii. তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে সঞ্চয় করেন

$$= \frac{n}{2} \{2a + (n - 1) d\} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} \{2 \times 1200 + (n - 1) 100\} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} (2400 + 100n - 100) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} (2300 + 100n) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} \times 2 (1150 + 50n) \text{ টাকা}$$

$$= n (50n + 1150) \text{ টাকা।}$$

iv. আমরা জানি, এক বছর = 12 মাস। এক্ষেত্রে, $n = 12$.

অতএব, [উপরের (iii) হতে] ক এক বছরে সঞ্চয় করেন 12 $(50 \times 12 + 1150)$ টাকা

$$= 12 (600 + 1150) \text{ টাকা} = 12 \times 1750 \text{ টাকা}$$

$$= 21000 \text{ টাকা। (Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৩.১

১। $2 - 5 - 12 - 19 - \dots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, এর প্রথম পদ $a = 2$
সাধারণ অন্তর $d =$ দ্বিতীয় পদ - প্রথম পদ

$$= (-5) - (2)$$

$$= -5 - 2$$

$$= -7$$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার, n তম পদ $= a + (n - 1) d$

$$\therefore \text{ধারাটির 12 তম পদ} = a + (12 - 1)d$$

$$= 2 + (11) (-7)$$

$$= 2 - 77$$

$$= -75$$

অতএব, ধারাটির সাধারণ অন্তর -7 এবং 12 তম পদ -75 .
(Ans.)

২। $8 + 11 + 14 + 17 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 392?

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 8$

সাধারণ অন্তর $d = 11 - 8 = 3$

মনে করি, r তম পদ $= 392$

$$\therefore a + (r - 1)d = 392$$

$$\text{বা, } 8 + (r - 1)3 = 392$$

$$\text{বা, } 8 + 3r - 3 = 392$$

$$\text{বা, } 5 + 3r = 392$$

$$\text{বা, } 3r = 387$$

$$\text{বা, } r = \frac{387}{3}$$

$$\therefore r = 129$$

অতএব ধারাটির 129 তম পদ 392. (Ans.)

৩। $4 + 7 + 10 + 13 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 301?

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 4$

সাধারণ অন্তর $d = 7 - 4 = 3$

মনে করি, r তম পদ $= 301$

$$\therefore a + (r - 1)d = 301$$

$$\text{বা, } 4 + 3r - 3 = 301$$

$$\text{বা, } 3r + 1 = 301$$

$$= \frac{99}{2} (2 \times 1 + (99 - 1) 1) = \frac{99}{2} (2 + 98)$$

$$= \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950 \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-৪। $7 + 12 + 17 + \dots$ ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$, সাধারণ অন্তর $d = 12 - 7 = 5$

∴ এটি একটি সমান্তর ধারা। এখানে পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n -সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1) d\}$$

তাহলে, 30টি পদের সমষ্টি S_{30}

$$= \frac{30}{2} \{2 \times 7 + (30 - 1) 5\} = 15 (14 + 29 \times 5)$$

$$= 15 (14 + 145) = 15 \times 159$$

$$= 2385 \text{ (Ans.)}$$

উদাহরণ-৫। ক তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

- তিনি n তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?
- উপরোক্ত সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর।
- তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?
- এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন?

সমাধান :

i. প্রথম মাসে সঞ্চয় করেন 1200 টাকা

দ্বিতীয় মাসে সঞ্চয় করেন $(1200 + 100)$ টাকা = 1300 টাকা

তৃতীয় মাসে সঞ্চয় করেন $(1300 + 100)$ টাকা = 1400 টাকা

চতুর্থ মাসে সঞ্চয় করেন $(1400 + 100)$ টাকা = 1500 টাকা

সুতরাং, এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 1200$

সাধারণ অন্তর $d = 1300 - 1200 = 100$

ধারাটির n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$= 1200 + (n - 1) 100$$

$$= 1200 + 100n - 100$$

$$= 100n + 1100$$

অতএব, তিনি n তম মাসে সঞ্চয় করেন $(100n + 1100)$ টাকা।

ii. এক্ষেত্রে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারাটি হবে $1200 + 1300 + 1400 + \dots + (100n + 1100)$

iii. তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে সঞ্চয় করেন

$$= \frac{n}{2} \{2a + (n - 1) d\} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} \{2 \times 1200 + (n - 1) 100\} \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} (2400 + 100n - 100) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} (2300 + 100n) \text{ টাকা}$$

$$= \frac{n}{2} \times 2 (1150 + 50n) \text{ টাকা}$$

$$= n (50n + 1150) \text{ টাকা।}$$

iv. আমরা জানি, এক বছর = 12 মাস। এক্ষেত্রে, $n = 12$.

অতএব, উপরের (iii) হতে ক এক বছরে সঞ্চয় করেন 12 $(50 \times 12 + 1150)$ টাকা

$$= 12 (600 + 1150) \text{ টাকা} = 12 \times 1750 \text{ টাকা}$$

$$= 21000 \text{ টাকা। (Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৩.১

১। $2 - 5 - 12 - 19 - \dots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, এর প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d =$ দ্বিতীয় পদ - প্রথম পদ

$$= (-5) - (2)$$

$$= -5 - 2$$

$$= -7$$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার, n তম পদ $= a + (n - 1) d$

$$\therefore \text{ধারাটির 12 তম পদ} = a + (12 - 1) d$$

$$= 2 + (11) (-7)$$

$$= 2 - 77$$

$$= -75$$

অতএব, ধারাটির সাধারণ অন্তর -7 এবং 12 তম পদ -75 .
(Ans.)

২। $8 + 11 + 14 + 17 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 392?

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 8$

সাধারণ অন্তর $d = 11 - 8 = 3$

মনে করি, r তম পদ $= 392$

$$\therefore a + (r - 1) d = 392$$

$$\text{বা, } 8 + (r - 1) 3 = 392$$

$$\text{বা, } 8 + 3r - 3 = 392$$

$$\text{বা, } 5 + 3r = 392$$

$$\text{বা, } 3r = 387$$

$$\text{বা, } r = \frac{387}{3}$$

$$\therefore r = 129$$

অতএব ধারাটির 129 তম পদ 392. (Ans.)

৩। $4 + 7 + 10 + 13 + \dots$ ধারাটির কোন পদ 301?

সমাধান : ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এর প্রথম পদ $a = 4$

সাধারণ অন্তর $d = 7 - 4 = 3$

মনে করি, r তম পদ $= 301$

$$\therefore a + (r - 1) d = 301$$

$$\text{বা, } 4 + 3r - 3 = 301$$

$$\text{বা, } 3r + 1 = 301$$

$$\text{বা, } 3r = 300$$

$$\text{বা, } r = \frac{300}{3}$$

$$\therefore r = 100$$

অতএব প্রদত্ত ধারাটির 100 তম পদ 301 (Ans.)

৪। কোনো সমান্তর ধারার p তম পদ p^2 এবং q তম পদ q^2 হলে, ধারাটির $(p+q)$ তম পদ কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d

$$\therefore p \text{ তম পদ} = a + (p-1)d = a + pd - d$$

$$\therefore q \text{ " " } = a + (q-1)d = a + qd - d$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } a + pd - d = p^2 \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{এবং } a + qd - d = q^2 \dots\dots\dots(ii)$$

$$(-) pd - qd = p^2 - q^2$$

$$\text{বা, } d(p-q) = (p+q)(p-q)$$

$$\therefore d = p+q$$

d এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$a + p(p+q) - (p+q) = p^2$$

$$\text{বা, } a + p^2 + pq - p - q - p^2 = 0$$

$$\therefore a = p+q - pq$$

$$\text{এখন, } (p+q) \text{ তম পদ} = a + (p+q-1)d$$

$$= p+q - pq + (p+q-1)(p+q) \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= p+q - pq + p^2 + pq - p + pq + q^2 - q$$

$$= p^2 + pq + q^2$$

$$\text{অতএব ধারাটির } (p+q) \text{ তম পদ} = (p^2 + pq + q^2) \text{ (Ans.)}$$

৫। কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n এবং n তম পদ m হলে, $(m+n)$ তম পদ কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d

$$\therefore m \text{ তম পদ} = a + (m-1)d = a + md - d$$

$$\therefore n \text{ " " } = a + (n-1)d = a + nd - d$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } a + md - d = n \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{এবং } a + nd - d = m \dots\dots\dots(ii)$$

$$(-) md - nd = n - m$$

$$\text{বা, } d(m-n) = n-m$$

$$\text{বা, } d(m-n) = -(m-n)$$

$$\therefore d = -1$$

d এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$a + m(-1) - (-1) = n$$

$$\text{বা, } a - m + 1 = n$$

$$\text{বা, } a = n + m - 1$$

$$\text{এখন, } (m+n) \text{ তম পদ} = a + (m+n-1)d$$

$$= m+n-1 + (m+n-1)(-1)$$

$$= m+n-1 - m - n + 1$$

$$= 0$$

অতএব ধারাটির $(m+n)$ তম পদ 0 (Ans.)

৬। $1+3+5+7+\dots$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$

$$\text{সাধারণ অন্তর, } d = 3 - 1 = 2$$

$$\text{পদসংখ্যা} = n$$

$$\therefore \text{ধারাটির সমষ্টি} = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2\}$$

$$= \frac{n}{2} (2 + 2n - 2)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 2n$$

$$= n^2$$

অতএব, প্রদত্ত ধারাটির n পদের নির্ণেয় সমষ্টি n^2 . (Ans.)

৭। $8 + 16 + 24 + \dots$ ধারাটির প্রথম ৭টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান :

এখানে,

$$\text{সমান্তর ধারার ১ম পদ, } a = 8$$

$$\text{সাধারণ অন্তর } d = 16 - 8 = 8$$

$$\text{পদ সংখ্যা } n = 9$$

$$n \text{ পদের সমষ্টি } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\therefore 9 \text{ পদের সমষ্টি } S_9 = \frac{9}{2} \{2 \cdot 8 + (9-1)8\}$$

$$= \frac{9}{2} \{16 + 64\}$$

$$= \frac{9}{2} \times 80$$

$$= 9 \times 40$$

$$= 360$$

\therefore প্রদত্ত ধারার ৭টি পদের সমষ্টি 360। (Ans.)

৮। $5 + 11 + 17 + 23 + \dots + 59 =$ কত?

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা,

এখানে প্রথম পদ, $a = 5$

$$\text{সাধারণ অন্তর, } d = 11 - 5 = 6$$

মনে করি,

$$n \text{ তম পদ} = 59$$

$$\therefore a + (n-1)d = 59$$

$$\text{বা, } 5 + (n-1)6 = 59 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } (n-1)6 = 59 - 5$$

$$\text{বা, } (n-1)6 = 54$$

$$\text{বা, } n-1 = 9$$

$$\text{বা, } n = 9 + 1$$

$$\therefore n = 10$$

$$\therefore \text{ধারাটির পদ সংখ্যা} = 10$$

$$\therefore \text{ধারাটির সমষ্টি, } S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{10}{2} \{2 \cdot 5 + (10-1) \cdot 6\} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{10}{2} \{10 + 9 \cdot 6\}$$

$$= 5(10 + 54)$$

$$= 5 \times 64$$

$$= 320$$

অতএব, প্রদত্ত ধারাটির সমষ্টি = 320 (Ans.)

৯। $29 + 25 + 21 + \dots - 23 =$ কত?

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ, $a = 29$

সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$

মনে করি, n -তম পদ $= -23$

$$\therefore a + (n-1)d = -23$$

$$\text{বা, } 29 + (n-1) \cdot (-4) = -23 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } 29 - 4n + 4 = -23$$

$$\text{বা, } 33 - 4n = -23$$

$$\text{বা, } -4n = -23 - 33$$

$$\text{বা, } -4n = -56$$

$$\therefore n = 14$$

$$\therefore \text{ধারাটির সমষ্টি, } S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{14}{2} \{2 \cdot 29 + (14-1) \cdot (-4)\} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 7 \{58 + 13 \cdot (-4)\}$$

$$= 7 \{58 - 52\}$$

$$= 7 \times 6$$

$$= 42$$

অতএব, ধারাটির সমষ্টি $= 42$ (Ans.)

১০। কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore 12 \text{ তম পদ} = a + (12-1)d$$

$$= a + 11d$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } a + 11d = 77$$

\therefore ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি,

$$S = \frac{23}{2} \{2a + (23-1)d\}$$

$$= \frac{23}{2} \{2a + 22d\}$$

$$= \frac{23}{2} \cdot 2(a + 11d)$$

$$= 23(a + 11d)$$

$$= 23 \times 77 [\because a + 11d = 77]$$

$$= 1771$$

অতএব, প্রথম 23 পদের নির্ণেয় সমষ্টি 1771.

১১। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore 16 \text{ তম পদ} = a + (16-1)d$$

$$= a + 15d$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } a + 15d = -20$$

\therefore ধারাটির -20 তম পদের সমষ্টি

$$S = \frac{31}{2} \{2a + (31-1)d\}$$

$$= \frac{31}{2} \{2a + 30d\}$$

$$= \frac{31}{2} \times 2 \{a + 15d\}$$

$$= 31 \times (-20)$$

$$= -620$$

অতএব, প্রথম 31 পদের নির্ণেয় সমষ্টি -620 ।

১২। $9 + 7 + 5 + \dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 9$

সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 9 = -2$

সমষ্টি, $S = -144$

পদ সংখ্যা, $n = ?$

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} \{2 \cdot 9 + (n-1) \cdot (-2)\}$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} (18 - 2n + 2)$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} (20 - 2n)$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} \cdot 2(10 - n)$$

$$\text{বা, } n(10 - n) = -144$$

$$\text{বা, } 10n - n^2 + 144 = 0$$

$$\text{বা, } -n^2 + 10n + 144 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 - 10n - 144 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$$

$$\text{বা, } n(n - 18) + 8(n - 18) = 0$$

$$\text{বা, } (n - 18)(n + 8) = 0$$

$$\therefore \text{হয়, } n - 18 = 0 \quad \text{অথবা, } n + 8 = 0$$

$$\therefore n = 18 \quad \therefore n = -8$$

$$[\text{এখন, } n = -8]$$

গ্রহণযোগ্য নয় কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$$\therefore n = 18 \text{ (Ans.)}$$

১৩। $12 + 4 + 6 + 8 + \dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$

সমষ্টি $S = 2550$

পদ সংখ্যা $n = ?$

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \{4 + 2n - 2\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \{2 + 2n\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \cdot 2\{n + 1\}$$

৯। $29 + 25 + 21 + \dots - 23 = \text{কত?}$

সমাধান : এটি একটি সমান্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ, $a = 29$

সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$

মনে করি, n -তম পদ $= -23$

$$\therefore a + (n-1)d = -23$$

$$\text{বা, } 29 + (n-1) \cdot (-4) = -23 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } 29 - 4n + 4 = -23$$

$$\text{বা, } 33 - 4n = -23$$

$$\text{বা, } -4n = -23 - 33$$

$$\text{বা, } -4n = -56$$

$$\therefore n = 14$$

$$\therefore \text{ধারাটির সমষ্টি, } S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{14}{2} \{2 \cdot 29 + (14-1) \cdot (-4)\} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 7 \{58 + 13 \cdot (-4)\}$$

$$= 7 \{58 - 52\}$$

$$= 7 \times 6$$

$$= 42$$

অতএব, ধারাটির সমষ্টি $= 42$ (Ans.)

১০। কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$
এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore 12 \text{ তম পদ} = a + (12-1)d$$

$$= a + 11d$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } a + 11d = 77$$

\therefore ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি,

$$S = \frac{23}{2} \{2a + (23-1)d\}$$

$$= \frac{23}{2} \{2a + 22d\}$$

$$= \frac{23}{2} \cdot 2(a + 11d)$$

$$= 23(a + 11d)$$

$$= 23 \times 77 [\because a + 11d = 77]$$

$$= 1771$$

অতএব, প্রথম 23 পদের নির্ণেয় সমষ্টি 1771.

১১। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$
এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore 16 \text{ তম পদ} = a + (16-1)d$$

$$= a + 15d$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } a + 15d = -20$$

\therefore ধারাটির -20 তম পদের সমষ্টি

$$S = \frac{31}{2} \{2a + (31-1)d\}$$

$$= \frac{31}{2} \{2a + 30d\}$$

$$= \frac{31}{2} \times 2 \{a + 15d\}$$

$$= 31 \times (-20)$$

$$= -620$$

অতএব, প্রথম 31 পদের নির্ণেয় সমষ্টি $= -620$ ।

১২। $9 + 7 + 5 + \dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 9$

সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 9 = -2$

সমষ্টি, $S = -144$

পদ সংখ্যা, $n = ?$

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} \{2 \cdot 9 + (n-1) \cdot (-2)\}$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} (18 - 2n + 2)$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} (20 - 2n)$$

$$\text{বা, } -144 = \frac{n}{2} \cdot 2(10 - n)$$

$$\text{বা, } n(10 - n) = -144$$

$$\text{বা, } 10n - n^2 + 144 = 0$$

$$\text{বা, } -n^2 + 10n + 144 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 - 10n - 144 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$$

$$\text{বা, } n(n-18) + 8(n-18) = 0$$

$$\text{বা, } (n-18)(n+8) = 0$$

$$\therefore \text{ হয়, } n-18=0 \quad \text{অথবা, } n+8=0$$

$$\therefore n=18 \quad \therefore n=-8$$

$$[\text{এখন, } n=-8]$$

গ্রহণযোগ্য নয় কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$$\therefore n=18 \text{ (Ans.)}$$

১৩। $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$

সমষ্টি $S = 2550$

পদ সংখ্যা $n = ?$

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \{4 + 2n - 2\}$$

$$\text{বা, } 2550 = \frac{n}{2} \{2 + 2n\}$$

$$\text{বা, } 2550 = n(n+1)$$

$$\text{বা, } 2550 = n^2 + n$$

$$\text{বা, } n^2 + n - 2550 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 52n - 51n - 2550 = 0$$

$$\text{বা, } n(n+52) - 51(n+52) = 0$$

$$\text{বা, } (n+52)(n-51) = 0$$

$$\text{হয়, } n+52 = 0 \text{ অথবা, } n-51 = 0$$

$$\therefore n = -52 \therefore n = 51$$

$$\therefore n = 51 \text{ (Ans.)}$$

[পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

১৪। কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেয়া আছে, n পদের সমষ্টি $= n(n+1)$
 $= n^2 + n$

এখন,

$$n=1 \text{ হলে, প্রথম পদ} = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2 \text{ হলে, প্রথম দুই পদের সমষ্টি} = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$n=3 \text{ হলে, প্রথম তিন পদের সমষ্টি} = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$

$$\therefore \text{প্রথম পদ} = 2$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = \text{দুই পদের সমষ্টি} - \text{প্রথম পদ} = 6 - 2 = 4$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = \text{তিন পদের সমষ্টি} - \text{দুই পদের সমষ্টি} = 12 - 6 = 6$$

$$\text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটি হবে, } 2 + 4 + 6 \dots \dots \dots \text{ (Ans.)}$$

১৫। কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $n(n+1)$ হলে, ধারাটির ১০টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম n সংখ্যক

$$\text{পদের সমষ্টি} = n(n+1) = n^2 + n$$

$$\therefore \text{ধারাটির ১০টি পদের সমষ্টি হবে} = 10^2 + 10$$

$$= 100 + 10$$

$$= 110$$

$$\text{অতএব, ধারাটির ১০টি পদের সমষ্টি } 110 \text{ (Ans.)}$$

১৬। একটি সমান্তর ধারার প্রথম ১২ পদের সমষ্টি ১৪৪ এবং প্রথম ২০ পদের সমষ্টি ৫৬০ হলে এর প্রথম ৬ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore 12\text{তম পদের সমষ্টি} = \frac{12}{2} \{2a + (12-1)d\}$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{12}{2} \{2a + (12-1)d\} = 144$$

$$\text{বা, } 6\{2a + 11d\} = 144$$

$$\text{বা, } 2a + 11d = \frac{144}{6}$$

$$\therefore 2a + 11d = 24 \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{আবার } 20\text{তম পদের সমষ্টি} = \frac{20}{2} \{2a + (20-1)d\}$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{20}{2} \{2a + (20-1)d\} = 560$$

$$\text{বা, } 10\{2a + 19d\} = 560$$

$$\text{বা, } 2a + 19d = \frac{560}{10}$$

$$\therefore 2a + 19d = 56 \dots \dots \dots (ii)$$

এখন, (ii)নং থেকে (i)নং বিয়োগ করে পাই,

$$2a + 19d = 56$$

$$2a + 11d = 24$$

$$(-) 8d = 32$$

$$\text{বা, } d = \frac{32}{8}$$

$$\therefore d = 4$$

d এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$2a + 11 \cdot 4 = 24$$

$$\text{বা, } 2a + 44 = 24$$

$$\text{বা, } 2a = 24 - 44$$

$$\text{বা, } 2a = -20$$

$$\text{বা, } a = \frac{-20}{2}$$

$$\therefore a = -10$$

$$\therefore \text{প্রথম ৬ পদের সমষ্টি} = \frac{6}{2} \{2a + (6-1)d\}$$

$$= \frac{6}{2} \{2(-10) + 5 \times 4\}$$

$$= 3 \{-20 + 20\}$$

$$= 3 \times 0$$

$$= 0$$

অতএব প্রথম ৬ পদের সমষ্টি ০ (Ans.)

১৭। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম $(m+n)$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$$\therefore m\text{তম পদের সমষ্টি} = \frac{m}{2} \{2a + (m-1)d\}$$

$$\text{অর্থাৎ } n = \frac{m}{2} \{2a + (m-1)d\}$$

$$\text{বা, } 2n = m \{2a + (m-1)d\}$$

$$\text{বা, } m \{2a + md - d\} = 2n$$

$$\therefore 2a + md - d = \frac{2n}{m} \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{আবার, } n \text{ তম পদের সমষ্টি} = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{অর্থাৎ } m = \frac{n}{2} \{2a + nd - d\}$$

$$\text{বা, } 2m = n \{2a + nd - d\}$$

$$\text{বা, } n \{2a + nd - d\} = 2m$$

$$\therefore 2a + nd - d = \frac{2m}{n} \dots\dots\dots (ii)$$

এখন (i) থেকে (ii)নং বিয়োগ করে পাই

$$2a + md - d = \frac{2n}{m}$$

$$2a + nd - d = \frac{2m}{n}$$

$$md - nd = \frac{2n}{m} - \frac{2m}{n}$$

$$\text{বা, } d(m-n) = \frac{2n^2 - 2m^2}{mn}$$

$$\text{বা, } d(m-n) = \frac{2\{(n+m)(n-m)\}}{mn}$$

$$\text{বা, } d = -\frac{2(m+n)(m-n)}{mn(m-n)}$$

$$\therefore d = -\frac{2(m+n)}{mn}$$

d এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$2a + m \left\{ -\frac{2(m+n)}{mn} \right\} - \left\{ -\frac{2(m+n)}{mn} \right\} = \frac{2n}{m}$$

$$\text{বা, } 2a - \frac{2(m+n)}{n} + \frac{2(m+n)}{mn} = \frac{2n}{m}$$

$$\text{বা, } a - \frac{(m+n)}{n} + \frac{m+n}{mn} = \frac{n}{m}$$

$$\text{বা, } a = \frac{n}{m} + \frac{m+n}{n} - \frac{m+n}{mn}$$

$$\text{বা, } a = \frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn}$$

$$\therefore a = \frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn}$$

$$\text{এখন, } m+n \text{ পদের সমষ্টি} = \frac{m+n}{2} \{2a + (m+n-1)d\}$$

$$= \frac{m+n}{2} \left\{ 2 \left(\frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn} \right) + (m+n-1) \left(-\frac{2(m+n)}{mn} \right) \right\}$$

$$= \frac{m+n}{2} \left\{ 2 \left(\frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn} - \frac{(m+n-1)2(m+n)}{mn} \right) \right\}$$

$$= \frac{m+n}{2} \left\{ 2 \left(\frac{n^2 + m^2 + mn - m - n}{mn} - \frac{m^2 + mn - m + mn + n^2 - n}{mn} \right) \right\}$$

$$= \frac{m+n}{2} \times 2 \left(\frac{n^2 + m^2 - m + mn - n - m^2 - mn + m - mn - n^2 + n}{mn} \right)$$

$$= (m+n) \left(\frac{-mn}{m} \right)$$

$$= (m+n) (-)$$

$$= -(m+n) \text{ (Ans.)}$$

কোনো সমান্তর ধারার p তম, q তম ও r তম পদ
বিক্রমিকমে a, b, c হলে, দেখাও যে, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$

সমাধান : মনে করি প্রথম পদ = x

সাধারণ অন্তর = d

p তম পদ = $x + (p-1)d$

অর্থাৎ $x + (p-1)d = a$

বা, $x + pd - d = a$ (i)

q তম পদ = $x + (q-1)d$

অর্থাৎ $x + (q-1)d = b$

বা, $x + qd - d = b$ (ii)

এবং r তম পদ = $x + (r-1)d$

অর্থাৎ $x + (r-1)d = c$

বা, $x + rd - d = c$ (iii)

এখন, (i) নং (-) (ii) নং করে পাই,

$pd - d - qd + d = a - b$

বা, $pd - qd = a - b$ (iv)

(ii) নং (-) (iii) নং করে পাই,

$qd - d - rd + d = b - c$

বা, $qd - rd = b - c$ (v)

এবং (iii) নং (-) (i) নং করে পাই,

$rd - d - pd + d = c - a$

বা, $rd - pd = c - a$ (vi)

\therefore L.H.S = $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$

= $aq - ar + br - bp + cp - cq$

= $-aq + ar - br + bp - cp + cq$ [- দ্বারা গুণ করে]

= $q(c-a) + p(b-c) + r(a-b)$

= $q(rd-pd) + p(qd-pd) + r(pd-qd)$

[\therefore iv, v, vi নং ব্যবহার করে]

= $qrd - pdd + pqd - prd + prd - qrd$

= 0

= R.H.S

$\therefore a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$ (Showed)

বিক্রম পদ্ধতি

সমাধান : সমান্তর ধারাটির 1ম পদ = x

এবং " " সাধারণ অন্তর = d

এখন, p -তম পদ = a

বা, $x + (p-1)d = a$ (i)

\therefore q -তম পদ = b

বা, $x + (q-1)d = b$ (ii)

এবং r -তম পদ = c

বা, $x + (r-1)d = c$ (iii)

এখন, L.H.S = $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$

= $\{x + (p-1)d\} (q-r) + \{x + (q-1)d\} (r-p) + \{x + (r-1)d\} (p-q)$

= $x(q-r) + (p-1)(q-r)d + x(r-p) + (q-1)(r-p)d + x(p-q) + (r-1)(p-q)d$

= $x(q-r+r-p+p-q) + d\{(p-1)(q-r) + (q-1)(r-p) + (r-1)(p-q)\}$

= $x \times 0 + d\{pq - pr - q + r + qr - pq + p - r + pr - p + q\}$

= $0 + d \times 0$

= $0 + 0 = 0$

= R.H.S

\therefore L.H.S = R.H.S (Showed)

১৯। দেখাও যে, $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 125 = 169 + 171 + 173 + \dots + 209$

সমাধান : L.H.S = $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 125$

এখানে, প্রথম পদ $a = 1$

সাধারণ অন্তর $d = 3 - 1 = 2$

\therefore n তম পদ, $a + (n-1)d = 125$

বা, $1 + (n-1)2 = 125$

বা, $1 + 2n - 2 = 125$

বা, $2n - 1 = 125$

বা, $2n = 125 + 1$

বা, $2n = 126$

বা, $n = \frac{126}{2}$

$\therefore n = 63$

\therefore ধারাটির সমষ্টি $S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

= $\frac{63}{2} \{2 \cdot 1 + (63-1)2\}$

= $\frac{63}{2} \{2 + 62 \times 2\}$

= $\frac{63}{2} \{2 + 124\}$

= $\frac{63}{2} \times 126$

= 63×63

R.H.S = $169 + 171 + 173 + \dots + 209$

এখানে, প্রথম পদ $a = 169$

সাধারণ অন্তর $d = 171 - 169 = 2$

\therefore n তম পদ, $a + (n-1)d = 209$

বা, $169 + (n-1)2 = 209$

বা, $169 + 2n - 2 = 209$

বা, $167 + 2n - 2 = 209$

বা, $167 + 2n = 209$

বা, $2n = 209 - 167$

বা, $2n = 42$

বা, $n = \frac{42}{2}$

$\therefore n = 21$

\therefore ধারাটির সমষ্টি $S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

= $\frac{21}{2} \{2 \cdot 169 + (21-1)2\}$

= $\frac{21}{2} \{338 + 40\}$

= $\frac{21}{2} \times 378$

= 21×189

= 3969

\therefore L.H.S = R.H.S (Showed)

২০। এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

সমাধান : প্রশ্নের বর্ণনা অনুযায়ী ধারাটি হবে একটি সমান্তর ধারা। আর তা হলো—

1 + 3 + 5 + 7 + ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2500, যেখানে n এর মানই হবে নির্ণেয় কিস্তির পরিমাণ।

এখন, মনে করি ধারাটির প্রথম পদ a = 1

এবং সাধারণ অন্তর d = 3 - 1 = 2

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{অর্থাৎ } 2500 = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{বা, } 2500 = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)2\}$$

$$\text{বা, } 2500 = \frac{n}{2} \{2 + 2n - 2\}$$

$$\text{বা, } 2500 = \frac{n}{2} \{2n\}$$

$$\text{বা, } 2500 = \frac{n}{2} \times 2n$$

$$\text{বা, } 2500 = n^2$$

$$\text{বা, } n^2 = 2500$$

$$\text{বা, } n = \sqrt{2500}$$

$$\therefore n = 50$$

অতএব, 50টি কিস্তিতে ঐ ব্যক্তির ঋণ শোধ করতে পারবেন। (Ans.)

□ অনুশীলনী- ১৩.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ :

পৃষ্ঠা : ২২৩

১। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি S_n

$$\text{অর্থাৎ } S_n = 2 + 4 + 6 + \dots + n$$

এখানে, প্রথম পদ a = 2

সাধারণ অন্তর d = 4 - 2 = 2

$$\therefore \text{সমষ্টি } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{n}{2} \{2 \cdot 2 + (n-1)2\}$$

$$= \frac{n}{2} \{4 + 2n - 2\}$$

$$= \frac{n}{2} \{2n + 2\}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 2(n+1)$$

$$= n(n+1)$$

$$\therefore n \text{ সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি} = n(n+1) \text{ (Ans.)}$$

২। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, 1ম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, S_n ।

$$\text{অর্থাৎ, } S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + n^2$$

$$\text{আমরা জানি, } (r-2)^3 = r^3 - 6r^2 + 12r - 8$$

$$\text{বা, } r^3 - (r-2)^3 = 6r^2 - 12r + 8$$

উপরের অভেদটিতে r = 1, 3, 5 n বসিয়ে পাই,

$$1^3 - (1-2)^3 = 6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8$$

$$3^3 - 1^3 = 6 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 8$$

$$5^3 - 3^3 = 6 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 8$$

.....

$$n^3 - (n-2)^3 = 6 \cdot n^2 - 12 \cdot n + 8$$

যোগ করে পাই, $n^3 - (-1)^3 = 6(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + n^2)$
 $- 12(1 + 3 + 5 + \dots) + 8(1 + 1 + 1 + \dots + n)$

$$\text{বা, } n^3 + 1 = 6 \cdot S_n - 12 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 8 \cdot n$$

$$\text{বা, } 6 \cdot S_n = n^3 + 6n(n+1) - 8n + 1$$

$$\text{বা, } S_n = \frac{n^3 + 6n(n+1) - 8n + 1}{6}$$

$$\therefore S_n = \frac{n^3 + 6n(n+1) - 8n + 1}{6} \text{ (Ans.)}$$

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা- ২২৩]

নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লেখ :

(i) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10 (ii) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$ (iii) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ (iv) প্রথম পদ

3, সাধারণ অনুপাত 1 (v) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$ (vi) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত -1.

সমাধান :

i) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10

মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে, প্রথম পদ, a = 4, সাধারণ অনুপাত r = 10

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = ar^{2-1} = ar = 4 \cdot 10 = 40$$

$$[\because a = 4, r = 10]$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = ar^{3-1} = ar^2 = 4 \cdot 10^2 = 400$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ} = ar^{4-1} = ar^3 = 4 \cdot 10^3 = 4000$$

$$\text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটি} = 4 + 40 + 400 + 4000 + \dots$$

৩) প্রথম পদ ৭, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r .

দেওয়া আছে, $a = 9; r = \frac{1}{3}$

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = ar^{2-1} = ar = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = ar^{3-1} = ar^2 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ} = ar^{4-1} = ar^3 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটি} = 9 + 3 + \frac{1}{3} + \dots$$

৪) প্রথম পদ ৭, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r .

দেওয়া আছে, $a = 7; r = \frac{1}{10}$

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ, } ar^{2-1} = ar = 7 \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ, } = ar^{3-1} = ar^2 = 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{7}{100}$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ, } = ar^{4-1} = ar^3 = 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{7}{1000}$$

$$\therefore \text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটি} = 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

৫) প্রথম পদ ৩, সাধারণ অনুপাত ১

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r .

দেওয়া আছে, $a = 3; r = 1$

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = ar^{2-1} = ar = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = ar^{3-1} = ar^2 = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ} = ar^{4-1} = ar^3 = 3 \cdot 1^3 = 3$$

$$\therefore \text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটির} = 3 + 3 + 3 + 3 + \dots$$

৬) প্রথম পদ ১, সাধারণ অনুপাত $\frac{-1}{2}$

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r .

দেওয়া আছে, $a = 1; r = \frac{-1}{2}$

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = ar^{2-1} = ar = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = ar^{3-1} = ar^2 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ} = ar^{4-1} = ar^3 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটি} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

৭) প্রথম পদ ৩, সাধারণ অনুপাত -1 .

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r .

দেওয়া আছে, $a = 3; r = -1$

$$\therefore \text{ধারাটির দ্বিতীয় পদ} = ar^{2-1} = ar = 3(-1) = -3$$

$$\text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = ar^{3-1} = ar^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$\text{ধারাটির চতুর্থ পদ} = ar^{4-1} = ar^3 = 3 \cdot (-1)^3 = 3(-1) = -3$$

$$\therefore \text{অতএব, নির্ণেয় ধারাটি} = 3 - 3 + 3 - 3 + \dots$$

□ কাজ :

[পৃষ্ঠা- ২২৫]

ক তার ছেলেকে কুলে নেয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো- প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন?

সমাধান :

প্রথম দিনের পারিশ্রমিক = ১ পয়সা,

দ্বিতীয় দিনের পারিশ্রমিক = $1 \times 2 = 2$ পয়সা

তৃতীয় দিনের পারিশ্রমিক = $2 \times 2 = 4$ পয়সা

এটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 1$

$$\text{সাধারণ অনুপাত } r = \frac{2}{1} = 2$$

পদসংখ্যা বা দিনের সংখ্যা, $n = 30$

$$n \text{ টি পদের সমষ্টি, } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$30 \text{ " " } S_{30} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{1(1073741824 - 1)}{1}$$

$$= 1073741823 \text{ পয়সা}$$

$$= 10737418.23 \text{ টাকা (An)}$$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n -সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n =$

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ যখন } r < 1$$

সুতরাং, ধারাটির ৪টি পদের সমষ্টি

$$S_4 = \frac{1 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left(\frac{256 - 1}{256} \right) = \frac{255}{128} = 1 \frac{127}{128} \text{ (Ans.)}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৩.২

১। a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $b = \frac{c+d}{2}$

খ) $a = \frac{b+c}{2}$

গ) $c = \frac{b+d}{2}$

ঘ) $d = \frac{a+c}{2}$

উত্তর : গ) $c = \frac{b+d}{2}$

২। i) $a + (a+d) + (a+2d) + \dots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

ii) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

উত্তর : খ) i ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots$$

৩। ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক) ২

খ) 4

গ) $\log 2$

ঘ) $2 \log 2$

উত্তর : গ) $\log 2$

৪। ধারাটির ৭ম পদ কত?

ক) $\log 32$

খ) $\log 64$

গ) $\log 128$

ঘ) $\log 256$

উত্তর : গ) $\log 128$

৫। $64 + 32 + 16 + 8 + \dots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা,

এর প্রথম পদ, $a = 64$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

পদ সংখ্যা $n = 8$

\therefore ধারাটির অষ্টম পদ $= ar^{n-1}$

$= ar^7$

$= 64 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^7$

$$= \frac{64}{27} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$$

অতএব, নির্ণেয় অষ্টম পদ $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

৬। $3 + 9 + 27 + \dots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা, এর প্রথম পদ, $a = 3$ সাধারণ অনুপাত $q = \frac{9}{3} = 3$ এবং পদ সংখ্যা $n = 14$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত, $3 > 1$

সুতরাং $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই

\therefore প্রথম 14 পদের সমষ্টি $s = \frac{3(3^{14} - 1)}{3 - 1}$

$= \frac{3(4782969 - 1)}{2}$

$= \frac{3 \times 4782968}{2}$

$= 7174452$ (Ans.)

৭। $128 + 64 + 32 + \dots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

সমাধান : ধরি, ধারাটির n তম পদ $= \frac{1}{2}$

এখানে ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$

সাধারণ অনুপাত $q = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

আমরা জানি, n তম পদ $= aq^{n-1}$

প্রশ্নমতে $aq^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $128 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2 \times 128}$

বা, $\frac{1}{(2)^{n-1}} = \frac{1}{256}$

বা, $\frac{1}{(2)^{n-1}} = \frac{1}{2^8}$

বা, $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{8}$

বা, $n-1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

$\therefore n = 9$

অতএব, ধারাটির নবম পদ $\frac{1}{2}$ (Ans.)

৮। একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$

হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ = a

এবং সাধারণ অনুপাত = r

তাহলে, পঞ্চম পদ = $ar^{5-1} = ar^4$

এবং দশম পদ = $ar^{10-1} = ar^9$

প্রশ্নানুসারে, $ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ (i)

এবং $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ (ii)

এখন, (i)নং সমীকরণকে (ii)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{81}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$\text{বা, } r^5 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } r^5 = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } r^5 = \frac{(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } r^5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

এখন, সমীকরণ (ii)নং এ r এর মান বসিয়ে পাই,

$$a \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{বা, } a \cdot \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$[\because (\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4]$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{ধারাটির তৃতীয় পদ} = ar^{3-1}$$

$$= ar^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad [a \text{ ও } r \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{অতএব, ধারাটির তৃতীয় পদ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{Ans.})$$

৯। $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}, \dots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

সমাধান : ধরি, ধারাটির n তম পদ = $8\sqrt{2}$

এখানে, প্রথম পদ, a = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, q = $-\sqrt{2}$

আমরা জানি, n তম পদ = aq^{n-1}

$$\therefore \text{প্রশ্নমতে, } aq^{n-1} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } (-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } (-\sqrt{2})^{n-1} = 8 \times 2$$

$$\text{বা, } \frac{(-\sqrt{2})^n}{-\sqrt{2}} = 16$$

$$\text{বা, } (-\sqrt{2})^n = -16 \times \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } (-\sqrt{2})^n = (-\sqrt{2})^9$$

$$\therefore n = 9$$

$$\therefore \text{ধারাটির নবম পদ} = 8\sqrt{2} \quad (\text{Ans.})$$

১০। $15 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাতন্ত্র হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, a = 5

মনে করি, সাধারণ অনুপাত = r

তাহলে, দ্বিতীয় পদ, ar = x

তৃতীয় পদ, ar² = y

এবং চতুর্থ পদ, ar³ = 135

$$\text{বা, } 5 \cdot r^3 = 135 \quad [\because a = 5]$$

$$\text{বা, } r^3 = 27 \quad [\text{উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } r^3 = 3^3$$

$$\therefore r = 3$$

$$\therefore \text{দ্বিতীয় পদ, } x = ar = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\text{এবং তৃতীয় পদ, } y = ar^2 = 5(3)^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

অতএব, x ও y এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 15 ও 45.

১১। $13 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাতন্ত্র হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ a = 3

মনে করি, সাধারণ অনুপাত = r

তাহলে, দ্বিতীয় পদ ar = x

তৃতীয় পদ ar² = y

চতুর্থ পদ ar³ = z

এবং পঞ্চম পদ ar⁴ = 243

$$\text{বা, } 3 \cdot r^4 = 243$$

$$\text{বা, } r^4 = \frac{243}{3}$$

$$\text{বা, } r^4 = 81$$

$$\text{বা, } r^4 = 3^4$$

$$\therefore r = 3$$

$$\text{অতএব, দ্বিতীয় পদ } 3 \cdot 3 = x \text{ বা, } 9 = x$$

$$\text{তৃতীয় পদ } 3 \cdot (3)^2 = y$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 9 = y$$

$$\text{বা, } 27 = y$$

$$\text{চতুর্থ পদ } 3 \cdot (3)^3 = z$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 27 = z$$

$$\text{বা, } 81 = z$$

সুতরাং x, y ও z এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 9, 27 ও 81. (Ans.)

১২। $1 - 4 + 8 - 16 + \dots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা, এর প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-4}{2} = -2$

পদসংখ্যা, $n = 7$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত $-2 < 1$,

সূত্রাং, $S = a \frac{(1-r^n)}{1-r}$ সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি, $S = 2 \cdot \frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)}$ [মান বসিয়ে]

$$= 2 \cdot \frac{1 + 2^7}{1 + 2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 + 128}{3}$$

$$= 2 \cdot \frac{129}{3}$$

$$= \frac{258}{3} = 86$$

অতএব, ধারাটির প্রথম সাতটি পদের নির্ণেয় সমষ্টি = 86. (Ans.)

১৩। $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ধারাটির $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা, এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{1} = -1$

পদ সংখ্যা = $2n + 1$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত $-1 < 1$, সূত্রাং $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

$$(2n + 1) \text{ পদের সমষ্টি} = 1 \cdot \frac{1 - (-1)^{2n+1}}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{1 - (-1)}{1 + 1}$$

[এখানে $2n + 1$ বিজোড় সংখ্যা]

$$= \frac{1 + 1}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

অতএব, ধারাটির $(2n + 1)$ পদের নির্ণেয় সমষ্টি = 1. (Ans.)

১৪। $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : মনে করি, ধারাটির সমষ্টি = S

তাহলে, $S = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots$ 10টি পদ।

$$= \log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots \text{দশম পদ}$$

$$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + \dots + \log 2^{10}$$

$$= \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + \dots + 10\log 2$$

[$\because \log a^n = n \log a$]

$$= \log 2 [1 + 2 + 3 + \dots + 10]$$

$$= [1 + 2 + 3 + \dots + 10] \times \log 2$$

$$\therefore S = [1 + 2 + 3 + \dots + 10] \times \log 2$$

$$= \frac{10(10+1)}{2} \times \log 2$$

$$[1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}] \text{ সূত্র প্রয়োগ করে}$$

$$= 55 \times \log 2$$

$$= 55 \log 2$$

অতএব, ধারাটির প্রথম দশটি পদের নির্ণেয় সমষ্টি =

$$55 \log 2. \text{ (Ans.)}$$

১৫। $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \dots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি ধারাটির সমষ্টি = S

তাহলে, $S = \log 2 + \log 16 + \log 512 + \dots$ 12টি পদ

$$= \log 2 + \log 16 + \log 512 + \dots \text{12তম পদ}$$

$$= \log 2 + \log 2^4 + \log 2^9 + \dots \text{12তম পদ}$$

$$= \log 2 + 4\log 2 + 9\log 2 + \dots \text{12তম পদ}$$

[$\because \log a^n = n \log a$]

$$= (1 + 4 + 9 + \dots \text{12তম পদ}) \times \log 2$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \text{12}^2) \times \log 2$$

$$= \left\{ \frac{12(12+1)(2 \times 12+1)}{6} \right\} \log 2$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} \times \log 2$$

$$\left[\because 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= 650 \log 2$$

\therefore প্রদত্ত ধারার প্রথম বার পদের সমষ্টি = $650 \log 2$ (Ans.)

১৬। $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ ধারাটির n -সংখ্যক পদের সমষ্টি

254 হলে, n এর মান কত?

সমাধান : দেয়া আছে, $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $q = \frac{4}{2} = 2$

দেয়া আছে, n তম পদের সমষ্টি = 254

আমরা জানি, n তম পদের সমষ্টি = $\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$

$$\text{বা, } 254 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$\text{বা, } 254 = \frac{2(2^n - 1)}{1}$$

$$\text{বা, } 2(2^n - 1) = 254$$

$$\text{বা, } 2^n - 1 = 127$$

$$\text{বা, } 2^n = 127 + 1$$

$$\text{বা, } 2^n = 128$$

$$\text{বা, } 2^n = 2^7$$

$$\therefore n = 7 \text{ (Ans.)}$$

১৭। $2 - 2 + 2 - 2 + \dots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা,

এখানে, প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-2}{2} = -1$

পদ সংখ্যা $= 2n + 2$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত $-1 < 1$ সুতরাং $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

$(2n + 2)$ পদের সমষ্টি $= \frac{2\{1 - (-1)^{2n+2}\}}{1 - (-1)}$

$= \frac{2\{1 - (1)\}}{1 + 1}$

(এখানে, $2n + 2$ জোড় সংখ্যা)

$= \frac{2(1-1)}{2}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$

অতএব, ধারাটির $(2n + 2)$ পদের সমষ্টি $= 0$ (Ans.)

১৮। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি ৪৪১ হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার

ঘনের সমষ্টি $= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = 441$

বা, $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = 21^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 21$

বা, $n(n+1) = 42$

বা, $n^2 + n = 42$

বা, $n^2 + n - 42 = 0$

বা, $n^2 + 7n - 6n - 42 = 0$

বা, $n(n+7) - 6(n+7) = 0$

বা, $(n+7)(n-6) = 0$

বা, $n+7 = 0$ অথবা $n-6 = 0$

$\therefore n = -7$ $\therefore n = 6$

কিন্তু n এর ঋণাত্মক মান হতে পারে না

$\therefore n = 6$ (Ans.)

২য় অংশ : আমরা জানি, n

সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{6(6+1)}{2}$ [$n = 6$ বসিয়ে]

$= \frac{6 \times 7}{2}$

$= \frac{42}{2}$

$= 21$ (Ans.)

১৯। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি ২২৫ হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান : আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার

ঘন-এর সমষ্টি $= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = 225$

বা, $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = (15)^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 15$ [বর্গমূল করে]

বা, $n(n+1) = 30$

বা, $n^2 + n = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$

বা, $n(n+6) - 5(n+6) = 0$

বা, $(n+6)(n-5) = 0$

বা, $n+6 = 0$ অথবা $n-5 = 0$

$\therefore n = -6$ অথবা 5

কিন্তু n এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না

$\therefore n = 5$

দ্বিতীয় অংশ : আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার

বর্গের সমষ্টি $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

এখানে, $n = 5$

\therefore নির্ণেয় সমষ্টি $= \frac{5(5+1)(2 \cdot 5+1)}{6}$

$= \frac{5 \times 6(10+1)}{6}$

$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$

$= 55$

অতএব, n এর নির্ণেয় মান ৫ এবং ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের নির্ণেয় সমষ্টি $= 55$

২০। দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1+2+3+\dots+10)^2$

সমাধান : বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর

সমষ্টি $= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

এখানে, পদ সংখ্যা, $n = 10$

\therefore ধারাটির সমষ্টি $= \left\{ \frac{10(10+1)}{2} \right\}^2$

$= (5 \times 11)^2$

$= (55)^2$

$= 3025$

আবার, ডানপক্ষ $= (1+2+3+4+\dots+10)^2$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি

অর্থাৎ, $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

এখানে, ধারাটির পদসংখ্যা, $n = 10$

\therefore ধারাটির সমষ্টি $= \left\{ \frac{10(10+1)}{2} \right\}^2$

$= (5 \times 11)^2$

$= (55)^2$

$= 3025$

\therefore বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো।)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 210 \text{ হলে } n \text{ এর মান কত?}$$

সমাধান :

$$\text{প্রদত্ত সমীকরণ, } \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = 210$$

$$\frac{\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = 210$$

$$\frac{n^2(n+1)(n+1)}{4} = 210$$

$$\frac{n^2(n+1)(n+1)}{4} \times \frac{2}{n(n+1)} = 210$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 210$$

$$\text{বা, } n^2 + n = 420$$

$$\text{বা, } n^2 + n - 420 = 0$$

$$\text{বা, } n^2 + 21n - 20n - 420 = 0$$

$$\text{বা, } n(n+21) - 20(n+21) = 0$$

$$\text{বা, } (n+21)(n-20) = 0$$

$$\text{বা, } n+21 = 0 \text{ বা, } n-20 = 0$$

$$\therefore n = -21 \text{ বা, } n = 20$$

এক্ষেত্রে n -এর ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\therefore n = 20$$

অতএব, n -এর নির্ণেয় মান = 20. (Ans.)

২১। মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দণ্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে লোহার দণ্ডের সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $s = 1$ মিটার = 1000 মিলিমিটার

ধরি, প্রথম টুকরার দৈর্ঘ্য = a দশম টুকরার দৈর্ঘ্য = ar^9 , যেখানে r সাধারণ অনুপাত।প্রশ্নমতে, $ar^9 = 10a$

$$\text{বা, } r^9 = 10$$

$$\text{বা, } r = 10^{1/9}$$

$$\therefore r = 1.29 \text{ প্রায় [ক্যালকুলেটরের সাহায্যে]}$$

$$\therefore \text{দশ পদের সমষ্টি, } S = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} \quad [\because r > 1]$$

$$\text{বা, } 100 = \frac{a(1.29^{10} - 1)}{(1.29 - 1)} \quad [S \text{ ও } r \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } 1000 = \frac{a(12.76 - 1)}{.29} \quad [\text{ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে}]$$

$$\text{বা, } 1000 = \frac{a \times 11.76}{.29}$$

$$\text{বা, } a \times 11.76 = 1000 \times .29$$

$$\text{বা, } a = \frac{1000 \times .29}{11.76}$$

$$\text{বা, } a = \frac{290}{11.76}$$

$$\text{বা, } a = 24.6598$$

$$\therefore a = 24.66 \text{ (প্রায়)}$$

ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 24.66 মিলিমিটার

Ans. 24.66 মিলিমিটার।

২৩। একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a , সাধারণ অনুপাত r , ধারাটির ৪র্থ পদ-2 এবং ৯ম পদ $8\sqrt{2}$ ।

ক) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ধারাটির 12তম পদ নির্ণয় কর।

গ) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, গুণোত্তর ১ম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r

$$\text{সুতরাং ৪র্থ পদ} = ar^{4-1} = ar^3$$

$$\text{এবং ৯ম পদ} = ar^{9-1} = ar^8$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } ar^3 = -2 \dots\dots\dots (i)$$

$$ar^8 = 8\sqrt{2} \dots\dots\dots (ii)$$

খ) সমাধান ক এর (ii) নং কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$$

$$\text{বা, } r^{8-3} = -4\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } r^5 = -4\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } r^5 = -\{(\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2}\}$$

$$\text{বা, } r^5 = -\{\sqrt{2}^5\}$$

$$\text{বা, } r^5 = -\sqrt{2}^5$$

$$\therefore r = -\sqrt{2}$$

 r -এর মান (ii)নং বসিয়ে পাই

$$a(-\sqrt{2})^8 = 8\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } a \cdot \sqrt{2}^8 = 8\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } a = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}^8}$$

$$\text{বা, } a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$[\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2]$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{ধারাটির 12তম পদ} = ar^{12-1}$$

$$= ar^{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^{11}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}^{11}}{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2}^{11-1}$$

$$= -\sqrt{2}^{10}$$

$$= -32 \text{ (Ans.)}$$

গ) যেহেতু $r < 1$ তাই $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম 7টি

পদের সমষ্টি $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - (-\sqrt{2})^7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - (-\sqrt{2})^7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2}^7)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}^7}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}^7}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}^7}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}^7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} \text{ (Ans.)}$$

২৪। কোনো ধারার n তম পদ $2n - 4$

ক) ধারাটির নির্ণয় কর।

খ) ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ) প্রাপ্ত ধারাটি প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) দেওয়া আছে, ধারার n তম পদ $2n - 4$

এখন $n = 1, 2, 3, \dots$ বসিয়ে ধারাটি নির্ণয় করা হলো

অর্থাৎ $n = 1$ হলে $2n - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2$

$n = 2$ হলে $2n - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

$n = 3$ হলে $2n - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

সুতরাং ধারাটি হলো, $-2 + 0 + 2 + \dots$

এটি একটি সমান্তর ধারা।

খ) মনে করি সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a = -2$

এবং সাধারণ অন্তর $d = 0 - (-2) = 2$

\therefore 10 তম পদ $= a + (10 - 1)d$

$$= -2 + 9d$$

$$= -2 + 9 \times 2$$

$$= 16 \text{ (Ans.)}$$

এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি $S_{20} = \frac{20}{2} \{2a + (20 - 1)d\}$

$$= 10 \{2a + 19 \times 2\}$$

$$= 10 \{2(-2) + 38\}$$

$$= 10 \{-4 + 38\}$$

$$= 10 \times 34$$

$$= 340 \text{ (Ans.)}$$

গ) গুণোত্তর ধারার 1ম পদ $a = -2$

" " সা: অনুপাত $r = 2$

" " ২য় পদ $= ar^{2-1}$

$$= ar$$

$$= -2 \times 2$$

$$= -4$$

" " 3য় পদ $= ar^{3-1}$

$$= ar^2$$

$$= -2 \times (2)^2$$

$$= -8$$

\therefore ধারাটি $-2 - 4 - 8 \dots$

গুণোত্তর ধারার 8 পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1}$

$$= \frac{-2(28 - 1)}{2 - 1}$$

$$= -2(256 - 1)$$

$$= -2 \times 255$$

$$= -510 \text{ (Ans.)}$$



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

১. $3 + 6 + 12 + \dots$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

[করগুনা জিলা স্কুল]

ক 3

খ 2

৩

গ 4

ঘ 12

২. $7 + 12 + 17 + \dots$ ধারাটির 25টি পদের সমষ্টি কত?

[শহীদ বীর উত্তম লে: আনোয়ার গার্লস কলেজ]

ক 1075

খ 1675

৩

গ 1225

ঘ 1600

৩. $\log_2 + \log_4 + \log_8 + \dots$ ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত?

[ভিক্টোরিয়া উচ্চ বিদ্যালয়, শ্রীমঙ্গল]

ক $55\log_2$

খ $21\log_2$

৩

গ $42\log_2$

ঘ $36\log_2$

৪. যদি কতগুলো সংখ্যাকে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এভাবে পরপর সাজানো হয়, তাহলে তাকে কী বলে?

ক ধারা

খ অনুরাশি

৩

গ অনুক্রম

ঘ অভিসৃত

৫. অনুক্রমের পদগুলোকে কোন চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়?

ক '+' যোগ

খ '-' বিয়োগ

৩

গ 'x' গুণন

ঘ '÷' ভাগ

৬. কোনো ধারার শেষ পদ না থাকলে তাকে কোন ধারা বলা হয়?

ক সসীম ধারা

খ অসীম ধারা

৩

গ সমান্তর ধারা

ঘ গুণোত্তর ধারা

৭. $20 + 18 + \dots + 6 + 4 + 2$ ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?

ক -2

খ -1

৩

গ 4

ঘ 5

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেখাংশের অঙ্কবিন্যাস ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- সাদৃশতার অনুপাত সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রতিসমতার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- হাতে-কলমে বাস্তব উপকরণের সাহায্যে রেখা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা যাচাই করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



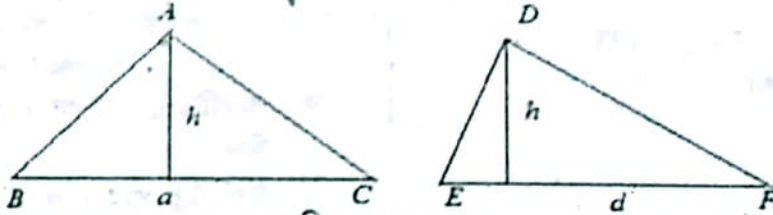
□ অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম

- $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$
- $a : b = b : a$ হলে, $a = b$
- $a : b = x : y$ হলে, $b : a = y : x$ (ব্যস্তকরণ)
- $a : b = x : y$ হলে, $a : x = b : y$ (একান্তরকরণ)
- $a : b = c : d$ হলে, $ad = bc$ (আড়গুণন)
- $a : b = x : y$ হলে, $a + b : b = x + y : y$ (যোজন)
এবং $a - b : b = x - y : y$ (বিয়োজন)
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

□ জ্যামিতিক সমানুপাত:

আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। এ থেকে দুইটি প্রয়োজনীয় অনুপাতের ধারণা তৈরি করা যায়।

১. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।

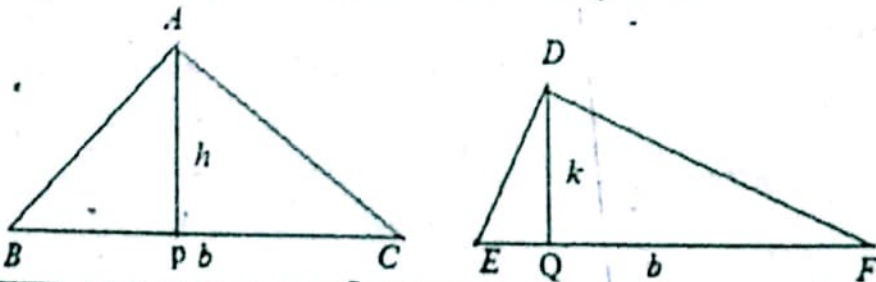


মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $BC = a$, $EF = d$ এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h । সুতরাং,

ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} d \times h$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h : \frac{1}{2} d \times h$
 $= a : d = BC : EF$ ।

২. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।



মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $AP = h$, $DQ = k$ এবং উভয় ক্ষেত্রের ভূমি b । সুতরাং,

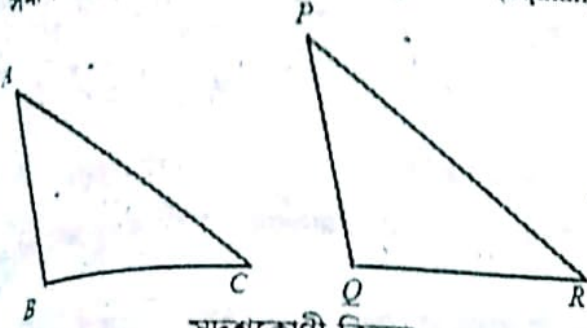
ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times h$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times k$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} b \times h : \frac{1}{2} b \times k$
 $= h : k = AP : DQ$ ।

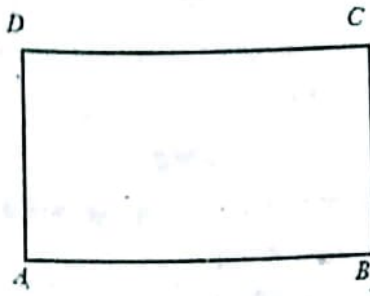
সদৃশতা (Similarity)

সমস্ত প্রোগিতে ত্রিভুজের সর্বসমতা ও সদৃশতা নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। সাধারণভাবে, সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ। তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।

সদৃশকোণী বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (equiangular) বলা হয়।



সদৃশকোণী ত্রিভুজ



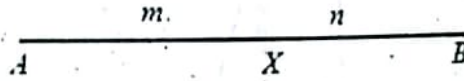
সদৃশকোণী চতুর্ভুজ

সদৃশ বহুভুজ : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) বহুভুজ বলা হয়।

উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ্য করি যে, ABCD আয়ত ও PQRS বর্গ সদৃশকোণী। কারণ, উভয় চিত্রে বাহুর সংখ্যা ৪ এবং আয়তের কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে বর্গটির কোণগুলোর সমান (সবগুলো কোণ সমকোণ)। কিন্তু চিত্রগুলোর অনুরূপ কোণগুলো সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়। ফলে সেগুলো সদৃশ নয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হলে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়। অর্থাৎ, সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

নির্দিষ্ট অনুপাতে রেখাংশের বিভক্তিকরণ

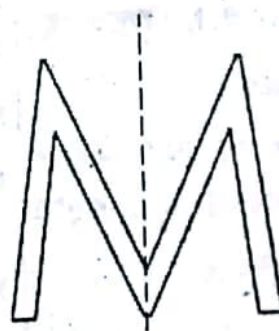
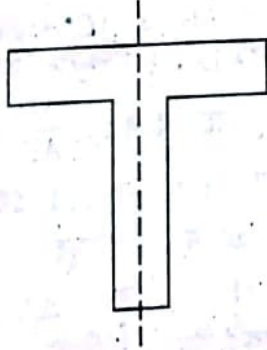
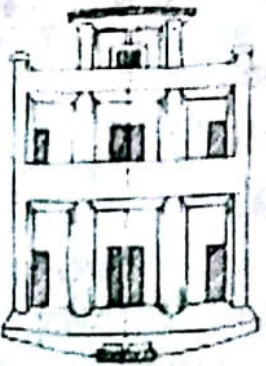
সমতলে দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আমরা স্বীকার করে নিই যে, AB রেখায় এমন অনন্য বিন্দু X আছে যে, X বিন্দুটি A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং $AX : XB = m : n$.



ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিন্ভক্ত হয়েছে। তাহলে, $AX : XB = m : n$.

প্রতিসমতা

প্রতিসমতা একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধারণা যা প্রকৃতিতে বিদ্যমান এবং যা আমাদের কর্মকাণ্ডে প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকি। প্রতিসমতার ধারণাকে শিল্পী, কারিগর, ডিজাইনার, সুতাররা প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকেন। গাছের পাতা, ফুল, মৌচাক, ঘরবাড়ি, টেবিল, চেয়ার সবকিছুর মধ্যে প্রতিসমতা বিদ্যমান। যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে, তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়।

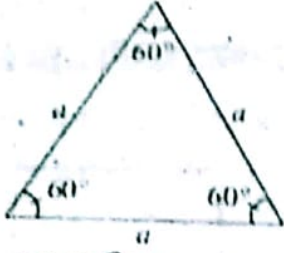


উপরের চিত্রগুলোর প্রতিটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে। শেষের চিত্রটির একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

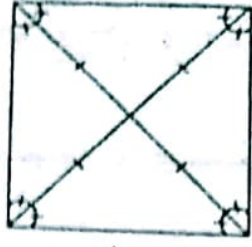
সুষম বহুভুজের প্রতিসাম্য রেখা

সুষম বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও কোণগুলো সমান হলে তাকে সুষম বহুভুজ বলা হয়। ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ। সমবাহু ত্রিভুজ হলো তিন বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ।

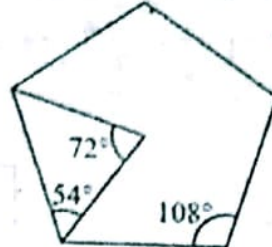
সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বাহুবিশিষ্ট সুখম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রেরও বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুরূপভাবে, সুখম পঞ্চভুজ ও সুখম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।



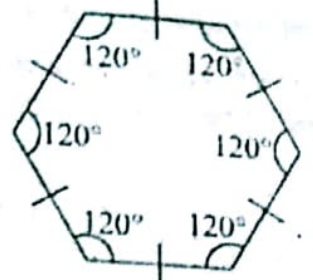
সমবাহু ত্রিভুজ



বর্গক্ষেত্র



সুখম পঞ্চভুজ



সুখম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুখম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যিক। সুখম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা
সমবাহু ত্রিভুজ	বর্গক্ষেত্র	সুখম পঞ্চভুজ	সুখম ষড়ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

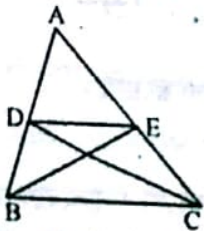


□ অনুশীলনী- ১৪.১

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্তের সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রধান : ধাপসমূহ
১। $\triangle ABC$ এবং $\triangle ADC$
একই উচ্চতা বিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \frac{AB}{AD}$$

$$২। \frac{\Delta ABC}{\Delta ABE} = \frac{AC}{AE}$$

$$৩। \text{কিন্তু } \Delta BDE = \Delta DEC$$

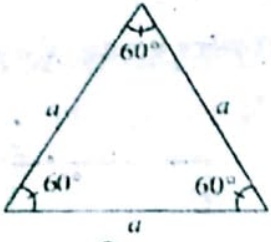
যথার্থতা

১। একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক।

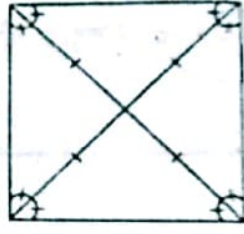
২। [একই]

৩। এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। চার বহুভুজই সুস্থম বহুভুজ হলো বর্গক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্রের বাহু ও কোণগুলো সমান। অনুরূপভাবে, সুস্থম পঞ্চভুজ ও সুস্থম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান।



সমবাহু ত্রিভুজ



বর্গক্ষেত্র



সুস্থম পঞ্চভুজ



সুস্থম ষড়ভুজ

প্রত্যেক সুস্থম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। সুতরাং তাদের প্রতিসাম্য রেখার সম্পর্কে জানা আবশ্যিক। সুস্থম বহুভুজের অনেক বাহুর পাশাপাশি একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

তিনটি প্রতিসাম্য রেখা	চারটি প্রতিসাম্য রেখা	পাঁচটি প্রতিসাম্য রেখা	ছয়টি প্রতিসাম্য রেখা
সমবাহু ত্রিভুজ	বর্গক্ষেত্র	সুস্থম পঞ্চভুজ	সুস্থম ষড়ভুজ

প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কার্যনিক আয়নার ব্যবহার রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

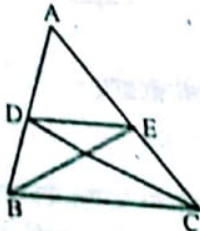


□ অনুশীলনী- ১৪.১

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্তের সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বহির্ভাগদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রধান : ধাপসমূহ

১। $\triangle ABC$ এবং $\triangle ADC$ একই উচ্চতা বিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{AB}{AD}$$

$$২। \frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE}$$

$$৩। \text{কিন্তু } \triangle BDE = \triangle DEC$$

যথার্থতা

১। একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক।

২। [একই]

৩। এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$$\Delta ADE + \Delta BDE = \Delta ADE + \Delta DEC$$

$$\Delta ABE = \Delta ADC$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

[১ নং ও ২ নং হতে]

[১ নং, ২ নং ও ৩ নং হতে]

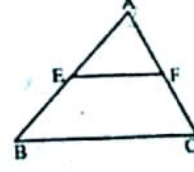
$$\frac{AB}{AB-AD} = \frac{AC}{AC-AE}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \text{ (প্রমাণিত)}$$

অনুসিদ্ধান্ত-২। ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু E । E বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল EF সরলরেখা AC কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AF = FC$ ।



প্রধান : ধাপসমূহ

১। ΔABC এ $EF \parallel BC$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC}$$

$$২। \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{AE}$$

৩। $AF = FC$ (প্রমাণিত)

যথার্থতা

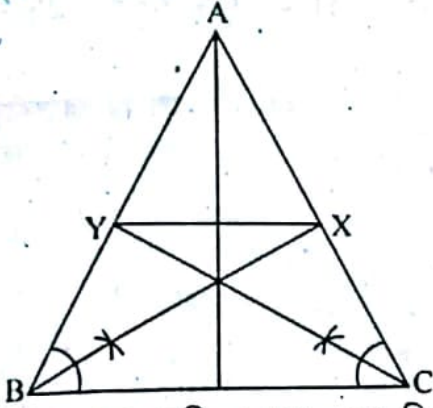
[ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।]
[$AE = BE$]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৪.১

১। কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY ভূমির সমান্তরাল হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর ভূমি সংলগ্ন $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে অর্থাৎ AC ও AB -কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY ভূমি BC -এর সমান্তরাল। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC সমদ্বিবাহু অর্থাৎ $AB = AC$ ।

প্রমাণ : ΔABC -এ $\angle B$ এর সমদ্বিখন্ডক BX ।

$$\therefore AB : BC = AX : XC \dots\dots\dots (i)$$

আবার, ΔABC -এ $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডক CY

$$\therefore AC : BC = AY : YB \dots\dots\dots (ii)$$

যেহেতু $XY \parallel BC$

$$\text{সেহেতু } AX : XC = AY : YB \dots\dots\dots (iii)$$

[\therefore ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

সমীকরণ (i) ও (iii) থেকে পাই,

$$AB : BC = AY : YB \dots\dots\dots (iv)$$

আবার সমীকরণ (ii) ও (iv) নং হতে পাই,

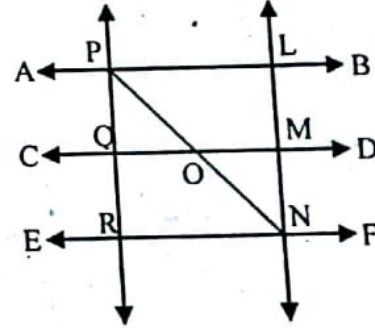
$$AB : BC = AC : BC.$$

$$\therefore AB = AC$$

অর্থাৎ ΔABC সমদ্বিবাহু (প্রমাণিত)

২। প্রমাণ কর যে; কতকগুলো পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AB, CD, EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা। PQR ও LMN দুইটি সরলরেখা উক্ত সরলরেখাগুলোকে যথাক্রমে $P, L; Q, M; R, N$ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ : QR = LM : MN$ ।

অঙ্কন : P, N যোগ করি। PN সরলরেখা QM সরলরেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔPRN -এ $QO \parallel RN$

$$\therefore PQ : QR = PO : ON \dots\dots\dots (i)$$

[\therefore ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

আবার, ΔNPL -এ $OM \parallel PL$

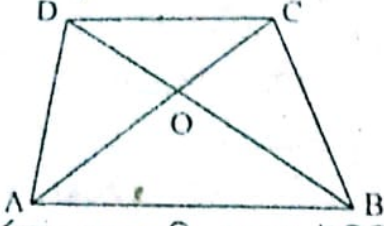
$$\therefore PO : ON = LM : MN \dots\dots\dots (ii) \text{ [একই কারণে]}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$PQ : QR = LM : MN \text{ (প্রমাণিত)}$$

- ৩। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদ বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও DC বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং এর কর্ণদ্বয় AC ও BD, O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, OA : OC = OB : OD

প্রমাণ : যেহেতু AB || DC এবং AC ছেদক।

∴ ∠BAC = ∠ACD [একান্তর কোণ বলে]

আবার AB || DC এবং BD তাদের ছেদক,

∴ ∠ABD = ∠BDC [একান্তর কোণ বলে]

এখন, ΔAOB ও ΔCOD-এ,

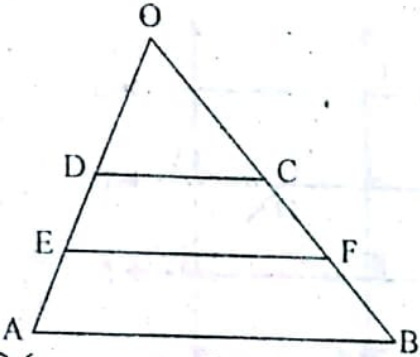
∠OAB = ∠OCD এবং ∠OBA = ∠ODC

∴ ΔAOB ও ΔCOD সদৃশ

সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হওয়ায়, OA : OC = OB : OD (প্রমাণিত)

- ৪। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, E ও F যথাক্রমে ABCD ট্রাপিজিয়ামে তির্যক বাহু AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু। E, F যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, EF রেখাংশ AB ও DC-এর সমান্তরাল।

অঙ্কন : AD ও BC বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করি যে বর্ধিত AD ও BC, O বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রমাণ : OAB ত্রিভুজে, DC || AB

∴ $\frac{OD}{DA} = \frac{OC}{CB}$ [যেহেতু ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{OD}{2DE} = \frac{OC}{2CF}$ [∵ E ও F যথাক্রমে AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু]

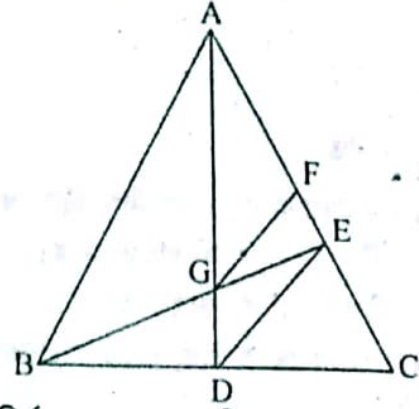
বা, $\frac{OD}{DE} = \frac{OC}{CF}$ [উভয়পক্ষকে ২ দ্বারা গুণ করে]

∴ EF || DC কিন্তু DC || AB

∴ EF রেখাংশটি DC ও AB উভয় বাহুরই সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

- ৫। ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE-এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = 6EF.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC-এর AD ও BE মধ্যমদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE-এর সমান্তরাল GF রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = 6EF.

প্রমাণ : ΔADE-এ GF || DE

∴ $\frac{AG}{GD} = \frac{AF}{EF}$ [যেহেতু ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল রেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।]

অর্থাৎ $\frac{2GD}{GD} = \frac{AF}{EF}$ [∵ ত্রিভুজের মধ্যমত্রয় পরস্পরকে ২ : ১ অনুপাতে বিভক্ত করে।]

বা, $\frac{2}{1} = \frac{AF}{EF}$

বা, $\frac{2+1}{1} = \frac{AF+EF}{EF}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{3}{1} = \frac{AF+EF}{EF}$

বা, $\frac{3}{1} = \frac{AE}{EF}$

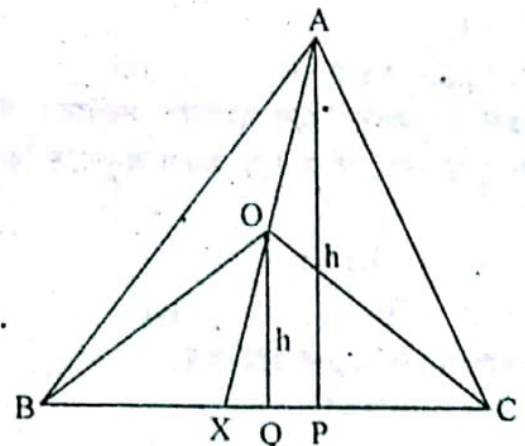
বা, AE = 3EF

বা, $\frac{1}{2} AC = 3EF$ [∵ E, AC-এর মধ্যবিন্দু]

∴ AC = 6EF (প্রমাণিত)

- ৬। ΔABC এর BC বাহুয় যেকোনো বিন্দু X এবং AX রেখাংশ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ΔAOB : ΔAOC = BX : XC.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ -এর BC বাহুতে যে কোনো বিন্দু X এবং AX রেখাংশ O একটি বিন্দু। O, B ও OC যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle AOB : \triangle AOC = BX : XC$ ।

প্রমাণ : A এবং O বিন্দু থেকে BC এর উপর যথাক্রমে AP ও OQ লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : $\triangle ABX$ এবং $\triangle ACX$ -এর উচ্চতা AP
 $\therefore \triangle ABX$ -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BX \cdot AP$ (1)

এক $\triangle ACX$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot CX \cdot AP$ (2)

আবার, $\triangle BOX$ ও $\triangle COX$ -এর উচ্চতা OQ
 $\therefore \triangle BOX$ -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BX \cdot OQ$ (3)

এক $\triangle COX$ -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot CX \cdot OQ$ (4)

এবন, (1) - (3) করে পাই,

$\triangle ABX - \triangle BOX = \frac{1}{2} \cdot BX \cdot AP - \frac{1}{2} \cdot BX \cdot OQ$
 $\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot BX (AP - OQ)$ (5)

আবার, (2) - (4) করে পাই,

$\triangle ACX - \triangle COX = \frac{1}{2} \cdot CX \cdot AP - \frac{1}{2} \cdot CX \cdot OQ$
 $\therefore \triangle AOC = \frac{1}{2} \cdot CX (AP - OQ)$ (6)

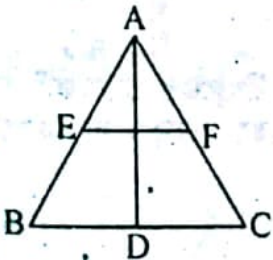
\therefore 5 নং কে 6 নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BX \cdot (AP - OQ)}{\frac{1}{2} \cdot CX \cdot (AP - OQ)}$$

$\therefore \triangle AOB : \triangle AOC = BX : XC$ (প্রমাণিত)

৮। $\triangle ABC$ এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BE : CF$

সমাধান :



দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ -এর $\angle A$ -এর সমদ্বিখণ্ডক AD , BC -কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC -এর সমান্তরাল EF রেখাংশ AB ও AC -কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BE : CF$ ।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর AD , $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখণ্ডক।

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ (i)}$$

[যেহেতু ত্রিভুজের যে কোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের অনুপাতে বিভক্ত করে]
 আবার, $\triangle ABC$ -এ $EF \parallel BC$ [কল্পনা অনুসারে]

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF} \text{ [}\therefore \text{ ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল}$$

সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

$$\text{বা, } \frac{AE + BE}{BE} = \frac{AF + CF}{CF} \text{ [যোজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} \text{ (ii) [একান্তকরণ করে]}$$

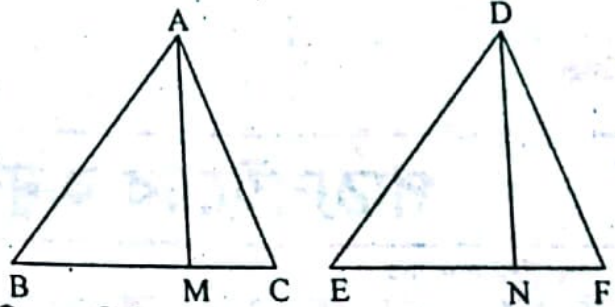
সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{CF}$$

অর্থাৎ $BD : DC = BE : CF$ (প্রমাণিত)

৮। ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ কর যে, $AM : DN = AB : DE$ ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী এবং উহাদের উচ্চতা যথাক্রমে AM ও DN অর্থাৎ AM ভূমি BC -এর ওপর এবং DN ভূমি EF -এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $AM : DN = AB : DE$ ।

প্রমাণ : $\triangle ABM$ ও $\triangle DEN$ -এ

$$\angle AMB = \angle DNE = 90^\circ$$

[$\therefore AM, BC$ -এর উপর এবং DN, EF এর উপর লম্ব]

$\angle ABM = \angle DEN$ [$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী বলে $\angle B = \angle E$]

এবং অবশিষ্ট $\angle BAM =$ অবশিষ্ট $\angle EDN$

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং এরা সদৃশ।

আবার, আমরা জানি, দুটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, উহাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AM}{DN}$$

অর্থাৎ $AM : DN = AB : DE$ (প্রমাণিত)

□ অনুশীলনী- ১৪.২

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-:

১। বিকল্প পদ্ধতিতে কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে

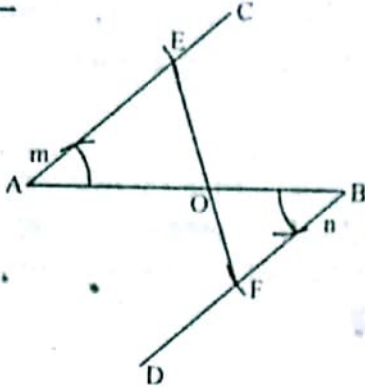
অন্তর্বিভক্ত কর। [পৃষ্ঠা-২৩৫]

বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, m ও n দুইটি রেখাংশ এবং AB

অন্য একটি রেখাংশ।

AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{AE}}{\text{BF}}$$



অঙ্কনের বিবরণ :

১। A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAC$ আঁকি।

২। B বিন্দুতে $\angle BAC$ এর সামান করে $\angle ABD$ আঁকি।

৩। AC হতে m এর সমান করে AE এবং BD হতে n এর সমান করে BF অংশ কেটে নিই।

৪। E ও F যোগ করি। EF , AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ O বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।

প্রমাণ : $\triangle AOE$ ও $\triangle BOF$ এ $\angle OAE = \angle OBF$ [অঙ্কনানুসারে]
এবং $\angle AOE = \angle BOF$ [বিক্রান্তীক কোণ]

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AE}{BF} = \frac{m}{n}$$

$\therefore AB$ রেখাংশ O বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে ভাগ হলো।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৪.২

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i) দুইটি রাশির তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়।

ii) অনুপাত নির্ণয়ের জন্য রাশি দুইটি একই এককে পরিমাপ করতে হয়।

iii) অনুপাত নির্ণয়ের ক্ষেত্রে রাশি দুটি একই জাতীয় হতে হয়।

নিচের কোনটি সঠিক?

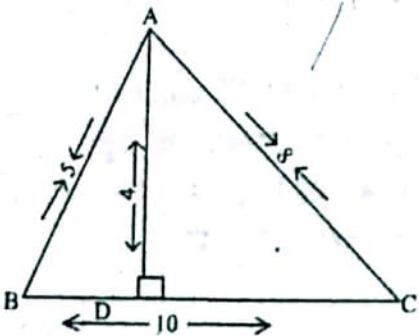
ক i ও ii

খ ii ও iii

ক

গ i ও iii

ঘ i, ii ও iii



ওপরের চিত্রের তথ্যানুসারে (২ ও ৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

২. $\triangle ABC$ এর উচ্চতা ও ভূমির অনুপাত কত?

ক $\frac{1}{2}$

খ $\frac{4}{5}$

গ

গ $\frac{2}{5}$

ঘ $\frac{5}{4}$

৩. $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক 6

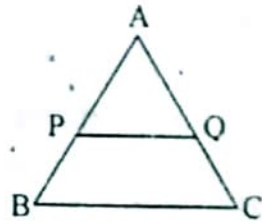
খ 20

গ

গ 40

ঘ 50

৪. $\triangle ABC$ -এ $PQ \parallel BC$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?



ক $AP:PB = AQ:QC$ খ $AB:PQ = AC:PQ$ ক

গ $AB:AC = PQ:BC$ ঘ $PQ:BC = BP:BQ$ গ

৫. একটি বর্গের সর্বোচ্চ (মোট) কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?

ক ১০টি

খ ৮টি

ঘ

গ ৬টি

ঘ ৪টি

৬। প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি অপর তৃতীয় একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ উভয়ই অপর তৃতীয় ত্রিভুজ $\triangle PQR$ এর সদৃশ। অর্থাৎ $\triangle ABC$ ও $\triangle PQR$ -এ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ এবং $\triangle DEF$ ও $\triangle PQR$ -এ $\angle D = \angle P$, $\angle E = \angle Q$ এবং $\angle F = \angle R$ প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle PQR$ -এ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ (i) [কল্পনা অনুসারে]

এবং $\triangle DEF$ ও $\triangle PQR$ -এ

$\angle D = \angle P$, $\angle E = \angle Q$ এবং $\angle F = \angle R$ (ii) [কল্পনা অনুসারে]

\therefore (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

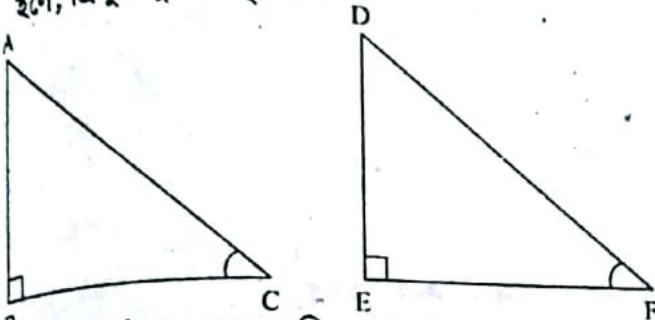
$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ। (প্রমাণিত)

প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষকোণ অপরটির একটি সূক্ষকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

সমাধান :

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষকোণ অপরটির একটি সূক্ষকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B$ ও $\angle E$ সমকোণ এবং সূক্ষকোণ $\angle C =$ সূক্ষকোণ $\angle F$. প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ -এ

$\angle B = \angle E$ [উভয়ই সমকোণ বলে]

$\angle C = \angle F$ [কল্পনা অনুসারে]

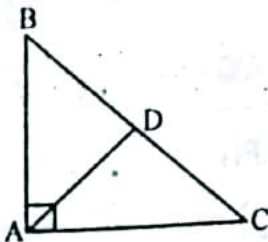
\therefore অবশিষ্ট $\angle A =$ অবশিষ্ট $\angle D$

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী

অর্থাৎ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ (প্রমাণিত)

প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

সমাধান :



সাধারণ নির্বচন : সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ হতে অতিভুজের উপর লম্ব টানলে যে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তারা পরস্পর সমান এবং মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমকোণী $\triangle ABC$ -এ $\angle BAC =$ একসমকোণ। এটির অতিভুজ BC। শীর্ষ A হতে

অতিভুজ BC এর উপর AD লম্ব টানি। ফলে দুইটি ত্রিভুজ $\triangle ABD$ এবং $\triangle ADC$ উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABD$ এবং $\triangle ADC$ পরস্পর সমান এবং মূল $\triangle ABC$ -এর সদৃশ।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle ABD$ -এ

$\angle BAC = \angle ADB$ [\therefore প্রত্যেকে এক সমকোণ]

এবং $\angle ABC = \angle ABD$ [সাধারণ কোণ বলে]

\therefore অবশিষ্ট $\angle ACB =$ অবশিষ্ট $\angle BAD$

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle ABD$ পরস্পর সদৃশকোণী।

সুতরাং $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ (i) [\therefore দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে উহারা পরস্পর সদৃশ হয়]

আবার, $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ -এ

$\angle BAC$ ও $\angle ADC$ [\therefore প্রত্যেকে এক সমকোণ]

এবং $\angle ACB = \angle ACD$ [সাধারণ কোণ বলে]

\therefore অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle CAD$

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ পরস্পর সদৃশকোণী।

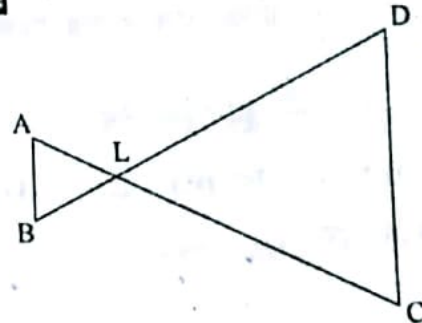
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADC$ (ii) [\therefore দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে উহারা পরস্পর সদৃশ হয়।]

সুতরাং (i) নং ও (ii) নং থেকে পাই,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ADC$ পরস্পর সমান এবং মূল $\triangle ABC$ -এর সদৃশ। (প্রমাণিত)

৯। পাশের চিত্রে $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$. প্রমাণ কর যে, $BD = 5BL$.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : চিত্রে দেওয়া আছে, $\angle B = \angle D$ এবং $CD = 4AB$ প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = 5BL$.

প্রমাণ : $\triangle ABL$ এবং $\triangle DCL$ -এ

$\angle B = \angle D$ দেওয়া আছে,

$\therefore \angle ALB = \angle DLC$ (বিপ্রতীপ কোণ বলে)

এবং অবশিষ্ট $\angle BAL =$ অবশিষ্ট $\angle DCL$

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{DC}{AB} = \frac{LD}{BL}$ [\therefore সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

বা, $\frac{DC + AB}{AB} = \frac{LD + BL}{BL}$ [যোজন করে পাই]

বা, $\frac{4AB + AB}{AB} = \frac{BD}{BL}$ [\therefore দেওয়া আছে $CD = 4AB$]

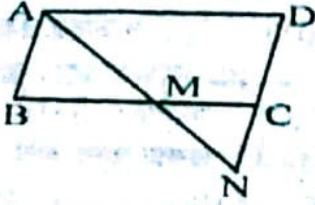
বা, $\frac{5AB}{AB} = \frac{BD}{BL}$

বা, $5 = \frac{BD}{BL}$

$\therefore BD = 5BL$ (প্রমাণিত)

১০। ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহু বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BM \times DN$ একটি ধ্রুবক।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত AN রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহুর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BM \times DN$ একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ : $\triangle ABM$ ও $\triangle ADN$ -এর মধ্যে $\angle BAM = \angle AND$ [একান্তর কোণ বলে]

$\angle ABM = \angle ADN$ [সামান্তরিকের বিপরীত কোণ বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle AMB = \angle AND$

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং তারা সদৃশ।

\therefore তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{BM}{AD} = \frac{AB}{DN}$$

$$\text{বা, } BM \times DN = AB \times AD$$

কিন্তু AB ও AD, ABCD সামান্তরিকের সন্নিহিত দুটি বাহু।

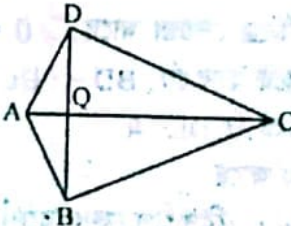
সুতরাং AB ও AD নির্দিষ্ট এবং তাদের গুণফলও নির্দিষ্ট অর্থাৎ ধ্রুবক।

অর্থাৎ $BM \times DN$ একটি ধ্রুবক (প্রমাণিত)

১১। পাশের চিত্রে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BA = 2AQ = \frac{1}{2} QC$ ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AD \perp DC$ ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : প্রদত্ত চিত্রে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2} QC$ । প্রমাণ করতে হবে যে, $AD \perp DC$ ।

প্রমাণ : যেহেতু $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2} QC$

সুতরাং $QC = 2DQ = 2 \cdot 2AQ = 4AQ$

আবার, $AC = AQ + QC$

$$= AQ + 4AQ \quad [\because QC = 4AQ]$$

$$= 5AQ$$

এখন ADQ সমকোণী ত্রিভুজ-এ

$$AD^2 = AQ^2 + DQ^2$$

$$= AQ^2 + (2AQ)^2 \quad [\because DQ = 2AQ]$$

$$= AQ^2 + 4AQ^2$$

$$= 5AQ^2 \quad \dots \dots \dots (i)$$

এবং CDQ সমকোণী ত্রিভুজ-এ

$$CD^2 = QC^2 + DQ^2$$

$$= (4AQ)^2 + (2AQ)^2$$

$$= 16AQ^2 + 4AQ^2$$

$$= 20AQ^2 \quad \dots \dots \dots (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) না যোগ করে পাই,

$$AD^2 + CD^2 = 5AQ^2 + 20AQ^2$$

$$= 25AQ^2$$

$$= (5AQ)^2 \quad [\because AC = 5AQ]$$

$$= (AC)^2$$

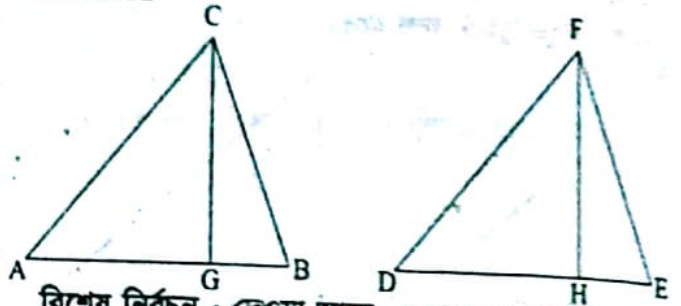
$$= AC^2$$

$$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2$$

$\therefore AD \perp DC$ [পীথাগোরাসের বিপরীত প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী (প্রমাণিত)]

১২। $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর $\angle A = \angle D$ । প্রমাণ কর যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF$ ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ -এ $\angle A = \angle D$ । প্রমাণ করতে হবে, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF$ ।

অঙ্কন : C ও F থেকে AB এর DE এর উপর যথাক্রমে CG ও FH লম্ব অঁকি। তাহলে, CG ও FH হবে ত্রিভুজ দুটির উচ্চতা।

প্রমাণ : $\triangle ACG$ ও $\triangle DFH$ -এ $\angle A = \angle D$ [দেওয়া আছে] এবং $\angle AGC = \angle DHF$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

অবশিষ্ট $\angle ACG = \angle DFH$

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং তারা সদৃশ।

$$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{CG}{FH}$$

এখন \triangle ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB.CG$ এবং \triangle

ক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} DE.FH$

$$[\because \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}]$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} AB.CG}{\frac{1}{2} DE.FH}$$

$$= \frac{AB.CG}{DE.FH}$$

$$= \frac{AB.AC}{DE.DF}$$

$$[\because \frac{CG}{FH} = \frac{AC}{DF}]$$

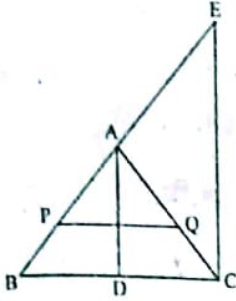
$$\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = AB.AC : DE.DF \quad (\text{প্রমাণিত})$$

১০। $\triangle ABC$ এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD , BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বিন্দুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

- ক) তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।
খ) প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BA : AC$
গ) BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $BD : DC = BP : CQ$ ।

সমাধান :

ক) তথ্য অনুসারে চিত্রটি হলো-



খ) প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BA : AC$ ।

প্রমাণ : $\triangle BAD$ ও $\triangle CAD$ -এর সাধারণ বাহু AD যা $\triangle ABC$ -এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক। তাহলে, $\angle BAD = \angle CAD$ এবং $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

অবশিষ্ট $\angle ABD =$ অবশিষ্ট $\angle ACD$

\therefore ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। সুতরাং এরা প্রমাণ হলে উহাদের অঙ্গুণ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।

$$\therefore \frac{BA}{BO} = \frac{AC}{DC}$$

$$\text{বা, } \frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

বা, $BA : AC = BD : DC$

$\therefore BD : DC = BA : AC$ (প্রমাণিত)

গ) BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। এখন প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BP : CQ$ ।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর AD , $\angle BAC$ -এর সমদ্বিখন্ডক।

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \dots\dots\dots (i)$$

\therefore ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখন্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন $PQ \parallel BC$ (কল্পনা)

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$$

$$\text{বা, } \frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ} \text{ [যোজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ} \dots\dots\dots (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii)-তুলনা করে পাই,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{CQ}$$

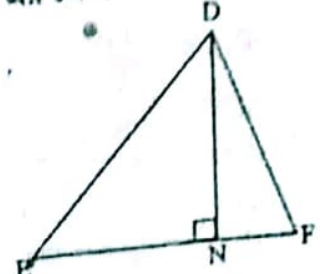
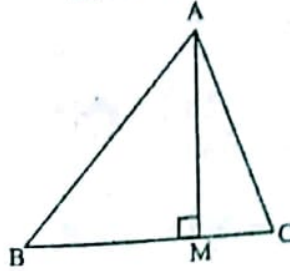
$\therefore BD : DC = BP : CQ$ (প্রমাণিত)

১৪। চিত্রে, ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।

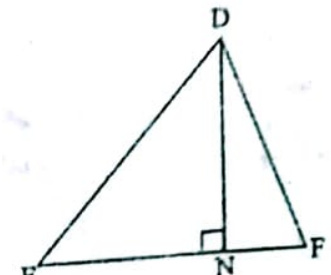
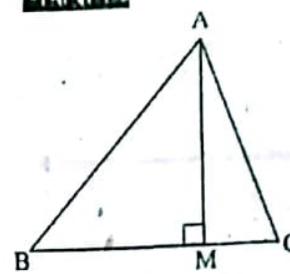
ক) ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

$$\text{খ) প্রমাণ কর যে, } \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

গ) $BC = 3$ সে.মি., $EF = 8$ সে.মি., $\angle B = 60^\circ$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং $\triangle ABC = 3$ বর্গ সে.মি. হয়, তবে $\triangle DEF$ অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান :



ক) ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু হলো, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ এবং অনুরূপ কোণগুলো হলো, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ ।

খ) প্রমাণ : $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AM$ এবং $\triangle DEF = \frac{1}{2} EF \cdot DN$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AM}{\frac{1}{2} EF \cdot DN} = \frac{BC \cdot AM}{EF \cdot DN} = \frac{AM}{DN} \times \frac{BC}{EF}$$

আবার, $\triangle ABM$ ও $\triangle DEN$ এর মধ্যে $\angle B = \angle E$
 $\angle AMB = \angle DNE =$ এক সমকোণ।

$\therefore \angle BAM = \angle EDN$

সুতরাং $\triangle ABM$ ও $\triangle DEN$ সদৃশকোণী, তাই এরা সদৃশ।

এখন, $\frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ [কারণ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ]

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AM}{DN} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\text{একই ভাবে, } \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\text{অতএব, } \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ) দেওয়া আছে,

$$BC = 3 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{এবং } \frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{AB} = \frac{3}{2} [\because BC = 3 \text{ সে.মি.}]$$

$$\therefore AB = 2 \text{ সে.মি.}$$

যেহেতু, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{EF}$$

$$\text{বা, } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{2} = \frac{DE}{8}$$

$$\text{বা, } 3DE = 16$$

$$\therefore DE = \frac{16}{3} \text{ সে.মি.}$$

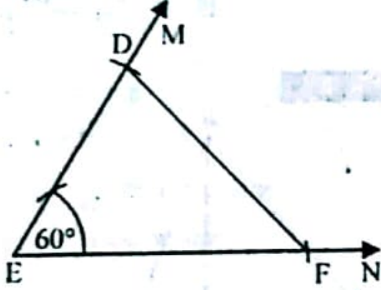
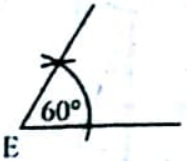
$$= 5.33 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{বা, } DE = \frac{16}{3} = 5.33 \text{ সে.মি.}$$

$\triangle DEF$ এর, $DE = 5.33$ সে.মি., $EF = 8$ সে.মি.

$\angle B = \angle E = 60^\circ$ ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

D ————— E ————— F



$\triangle DEF$ আঁকা হলো যার $\angle E = 60^\circ$, $EF = 8$ সে.মি.
এবং $DE = 5.33$ সে.মি.।

$\triangle DEF$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ।

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{3^2}{8^2}$$

[দেওয়া আছে, $BC = 3$ সে.মি. এবং $EF = 8$ সে.মি.]

$$\text{বা, } \frac{3}{\triangle DEF} = \frac{9}{64}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\triangle DEF} = \frac{3}{64}$$

$$\text{বা, } 3\triangle DEF = 64$$

$$\text{বা, } \triangle DEF = \frac{64}{3} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \triangle DEF = 21\frac{1}{3} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

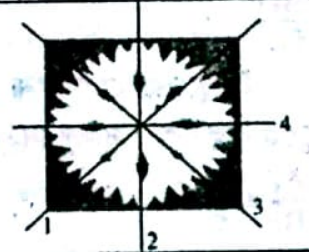
□ অনুশীলনী- ১৪.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : সুমি কাগজ কেটে পাশের চিত্রের ডিজাইন তৈরি করেছে। চিত্রে প্রতিসম রেখাসমূহ চিহ্নিত করা হলো। এর চারটি প্রতিসম রেখা রয়েছে? [পৃষ্ঠা-২৩৮]



সমাধান : সুমি কাগজ কেটে পাশের চিত্রের ডিজাইন তৈরি করেছে। পাশের চিত্রে প্রতিসম রেখাসমূহ চিহ্নিত করা হলো। এর চারটি প্রতিসম রেখা রয়েছে।



□ কাজ-২: ইংরেজি বর্ণমালায় যে সকল বর্ণের প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে সেগুলো লিখে প্রতিসাম্য রেখা চিহ্নিত কর। [পৃষ্ঠা-২৩৮]

সমাধান

বর্ণ	A	B	C	D	H	I	K	M	O	U	V	W	X
প্রতিসাম্য রেখা	A	B	C	D	H	I	K	M	O	U	V	W	X

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৪.৩

নিচের চিত্রসমূহের কোনটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে?

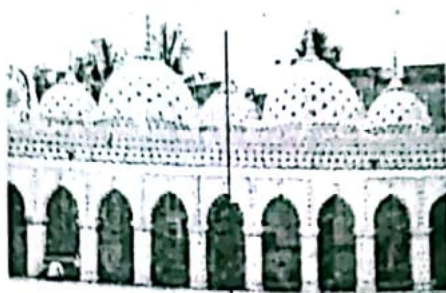
(ক) বাড়ির চিত্র (খ) মসজিদের চিত্র (গ) মন্দিরের চিত্র (ঘ) গীর্জার চিত্র (ঙ) প্যাগোডার চিত্র (চ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র (ছ) মুখোশের চিত্র (জ) তাজমহলের চিত্র

ক) বাড়ির চিত্র



প্রতিসাম্য রেখা নেই

খ) মসজিদের চিত্র



প্রতিসাম্য রেখা আছে

গ) মন্দিরের চিত্র



প্রতিসাম্য রেখা আছে

ঘ) গীর্জার চিত্র



প্রতিসাম্য রেখা আছে

ঙ) প্যাগোডার চিত্র



প্রতিসাম্য রেখা আছে

চ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র



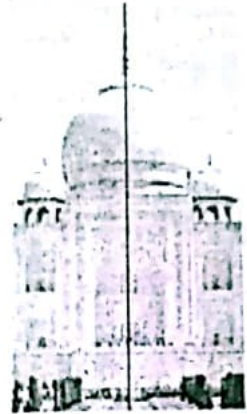
প্রতিসাম্য রেখা আছে

ছ) মুখোশের চিত্র



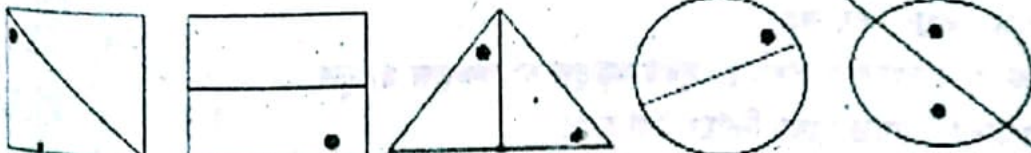
প্রতিসাম্য রেখা আছে

জ) তাজমহলের চিত্র

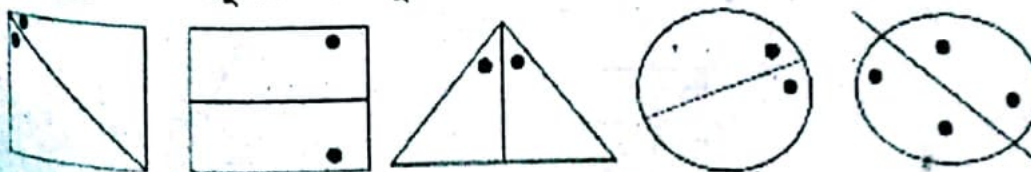


প্রতিসাম্য রেখা আছে

১৫) প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে, অন্য ফুটকি প্রদর্শন কর :

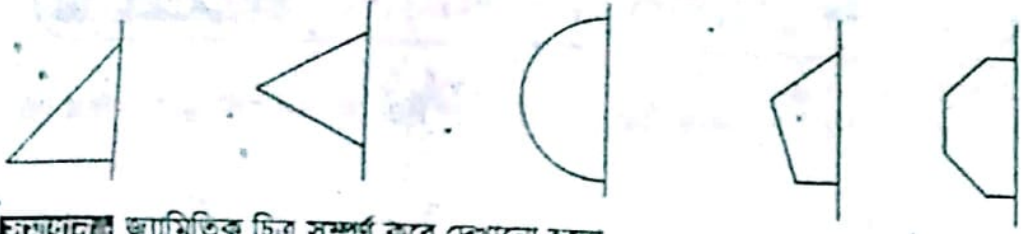


সমাধান : নিচে চিত্রগুলোতে অন্য ফুটকি প্রদর্শন করা হলো :

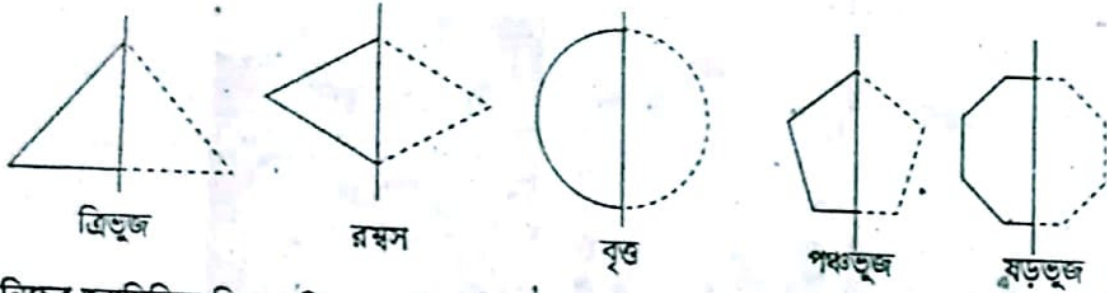


প্রতিসাম্য রেখা আছে

৩। প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে (ড্যাশযুক্ত), জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর এবং শনাক্ত কর।



সমাধান: জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ করে দেখানো হলো :



ত্রিভুজ

রম্বস

বৃত্ত

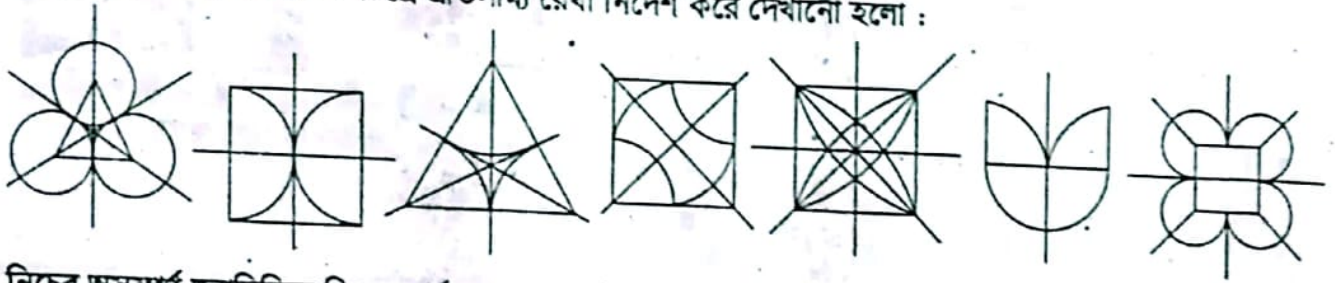
পঞ্চভুজ

ষড়ভুজ

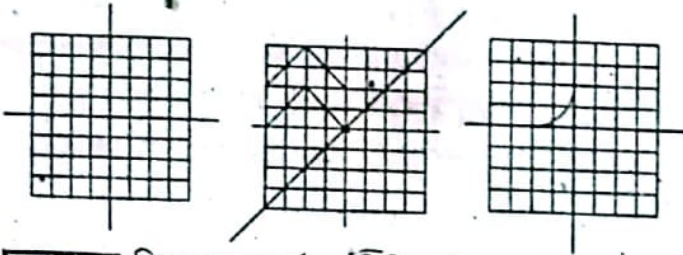
৪। নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ কর :



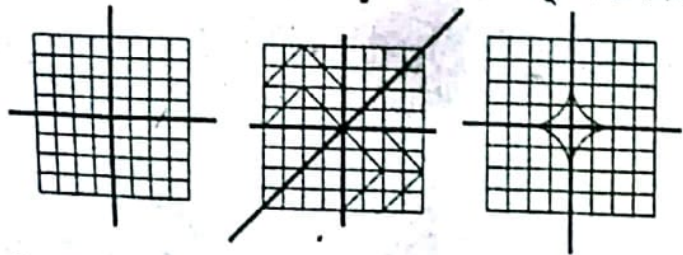
সমাধান: নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ করে দেখানো হলো :



৫। নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর যেন আয়না রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম হয় :



সমাধান: নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ করে দেখানো হলো :



৬। নিচের জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা নির্ণয় কর :

ক) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ খ) বিষমবাহু ত্রিভুজ গ) বর্গক্ষেত্র ঘ) রম্বস ঙ) সুস্থম ষড়ভুজ চ) পঞ্চভুজ ছ) বৃত্ত

সমাধান: নিচের জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা নির্ণয় করা হলো :

(ক)

(খ)

(গ)

ঘ)



প্রতিসাম্য রেখা ১টি



প্রতিসাম্য রেখা নেই



প্রতিসাম্য রেখা ৪টি



প্রতিসাম্য রেখা ২টি



প্রতিসাম্য রেখা ৬টি



প্রতিসাম্য রেখা ৫টি



প্রতিসাম্য রেখা অসংখ্য

ইংরেজি বর্ণমালায় যে সকল বর্ণের

ক) অনুভূমিক আয়না

খ) উল্লম্ব আয়না

গ) অনুভূমিক ও উল্লম্ব উভয় আয়না

সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো আঁক।

সমাধান :

ইংরেজি বর্ণমালা	(ক) অনুভূমিক আয়না	(খ) উল্লম্ব আয়না	(গ) অনুভূমিক ও উল্লম্ব আয়না
A	×	✓	×
B	✓	×	×
C	✓	×	×
D	✓	×	×
H	✓	✓	✓
I	✓	✓	✓
K	✓	×	×
M	×	✓	×
O	✓	✓	✓
V	×	✓	×
U	×	✓	×
W	×	✓	×
X	✓	✓	✓

৮। প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান : প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র নিচে অঙ্কন করা হলো :



□ অনুশীলনী- ১৪.৪

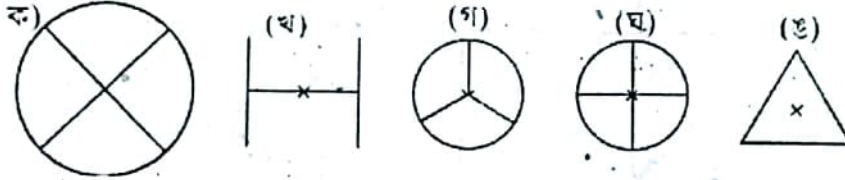
পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১: তোমার চারপাশের পরিবেশ থেকে ৫টি সমতলীয় বস্তুর উদাহরণ দাও যাদের ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। [পৃষ্ঠা-২৪০]

সমাধান : আমার চারপাশের পরিবেশ থেকে ৫টি সমতলীয় বস্তুর উদাহরণ দেওয়া হলো : যাদের ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।

যেমন : ১। বৈদ্যুতিক পাখা, ২। ঘড়ির কাঁটা, ৩। প্রিজম, ৪। বই ও ৫। দরজা।

২। নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।



সমাধান : চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করা হলো :

(ক) ৪; (খ) ২; (গ) ৩; (ঘ) ৪; (ঙ) ৩

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১৪.৪

১। নিচের চিত্রসমূহের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর :

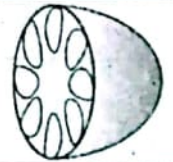


সমাধান : চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করা হলো :

(ক) ৪; (খ) ৫; (গ) ৬; (ঘ) ৩; (ঙ) ৪; (চ) ৩;

২। একটি লেবু আড়াআড়ি কেটে চিত্রের ন্যায় আকার পাওয়া গেল।

সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।



সমাধান : সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করা হলো :



১. সূচ্যস্থান পূরণ কর :

সমাধান :

চিত্র	ঘূর্ণন কেন্দ্র	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ
বর্গ	কর্ণের ছেদবিন্দু	4	90°
আয়ত	কর্ণের ছেদবিন্দু	2	180°
রম্বস	কর্ণের ছেদবিন্দু	2	180°
সমবাহু ত্রিভুজ	মধ্যমাত্রায়ের ছেদবিন্দু	3	120°
অর্ধবৃত্ত	কেন্দ্র	1	360°
সুষম পঞ্চভুজ	ভরকেন্দ্র	5	72°

১. যে সকল চতুর্ভুজের রেখা প্রতিসমতা ও 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে, তাদের তালিকা কর।

সমাধান :

চিত্র	রেখা প্রতিসম	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
বর্গ	হ্যাঁ	4
রম্বস	হ্যাঁ	2
আয়ত	হ্যাঁ	2

১ এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে কি? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধান : 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে।

যে কিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটি ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কেন্দ্র। ঘূর্ণনের সময় যে পরিমাণ কোণে ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কোণ। কোনো চিত্র একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের ফলে যতবার তার আদি অবস্থানে ফিরে আসে ঐ চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা ততো। কোনো চিত্রের একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ 360°। সুতরাং 360° কে ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা দ্বারা ভাগ করলে ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ বা ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ পাওয়া যাবে।

20 মাত্রার সুষম বহুভুজের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 20। অর্থাৎ, একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের জন্য বহুভুজটি 20 বার তার আদি অবস্থানে ফিরে আসে। সুতরাং সুষম বহুভুজটির ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ $360° \div 20 = 18°$ ।



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

১. সাধারণ বহুনির্বাচনি :

ABC ত্রিভুজটিকে EF রেখা বরাবর ভাঁজ করলে তার জল দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায়। EF রেখাটি কী?

ক পরিধি খ প্রতিসাম্য রেখা (ব)
গ ত্রিভুজের বাহু ঘ অতিভুজ

নিচের কোনটি প্রতিসম?

ক বিষমবাহু ত্রিভুজ খ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (গ)
গ সুষম বহুভুজ ঘ যে কোনো চতুর্ভুজ

নিচের কোনটির প্রতিসমতা নেই?

ক A খ B (গ)
গ S ঘ D

সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?

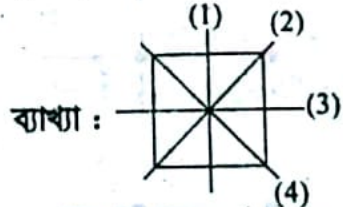
ক ১ খ ২ (গ)
গ ৩ ঘ ৪



কয়টি বর্গক্ষেত্রের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?

ক ১
গ ৩

খ ২
ঘ ৪

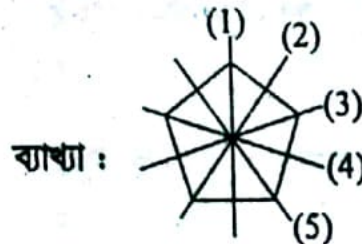


ব্যাখ্যা :

৬. একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?

ক ৪
গ ৬

খ ৫
ঘ ৭



ব্যাখ্যা :

৭. সুষম ষড়ভুজের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি?

ক ৪
গ ৬

খ ৫
ঘ ৭

□ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা –

- বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বহুভুজ ক্ষেত্র অঙ্কন ও অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান চতুর্ভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ত্রিভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- বিভিন্ন প্রকার জ্যামিতিক কারিগরি চিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...

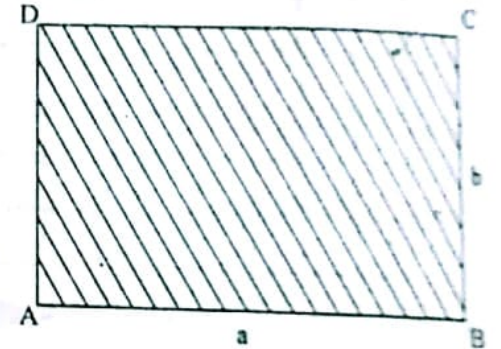


□ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

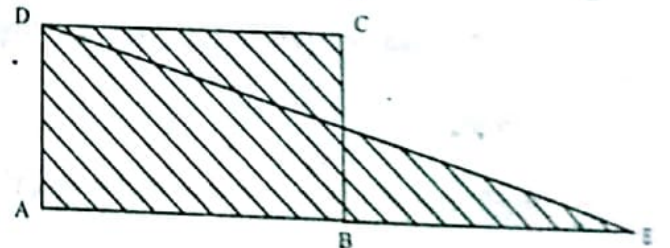
প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। এই ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, যে বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটার তার ক্ষেত্রফল হবে এক বর্গসেন্টিমিটার।

আমরা জানি,

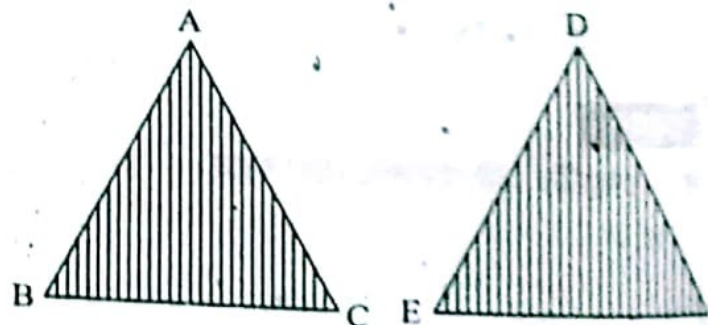
- ক) ABCD আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = a$ একক (যথা, মিটার), প্রস্থ $BC = b$ একক (যথা, মিটার) হলে, ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ab বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার)।



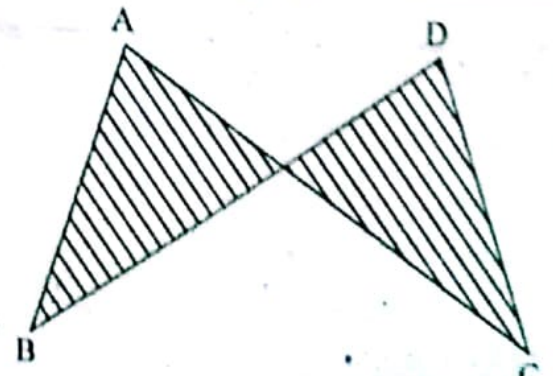
- খ) ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক (যথা, মিটার) হলে, ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার)।



দুইটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে তাদের মধ্যে '=' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন, ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AED ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। উল্লেখ্য যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হলে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে অবশ্যই $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল = $\triangle DEF$ এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না।



যেমন, চিত্রে $\triangle ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = $\triangle DBC$ এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ সর্বসম নয়।



পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

- ক 3 cm, 4 cm, 5 cm খ 6 cm, 8 cm, 10 cm
গ 5 cm, 7 cm, 9 cm ঘ 5 cm, 12 cm, 13 cm

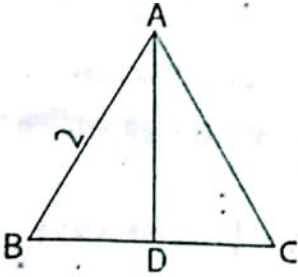
(ক) (খ) (গ) (ঘ)

নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

২. i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে।
ii. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।
iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান।
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

(ক) (খ) (গ) (ঘ)

নিচের চিত্রে, $\triangle ABC$ সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$ তথ্যের ভিত্তিতে (৩ ও ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৩. $BD =$ কত?

- ক 1 খ $\sqrt{2}$
গ 2 ঘ 4

(ক) (খ) (গ) (ঘ)

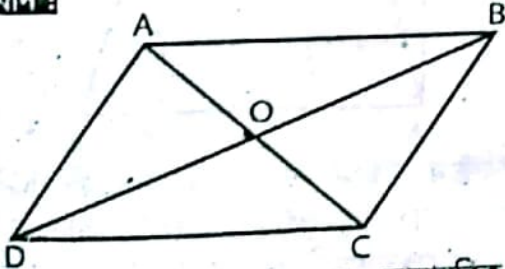
৪. ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

- ক $\frac{4}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক খ $\sqrt{3}$ বর্গ একক
গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ঘ $2\sqrt{3}$ বর্গ একক

(ক) (খ) (গ) (ঘ)

৫। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD সামান্তরিক। তার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle AOD$ ।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং $AO = OC$ এবং $BO = OD$. \therefore সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

এখন, $\triangle ABC$ -এর মধ্যমা BO $\therefore AO = OC$

$\therefore \triangle AOB = \triangle BOC$ (i)

এবং $\triangle BCD$ -এর মধ্যমা CO $\therefore BO = OD$

$\therefore \triangle BOC = \triangle COD$ (ii)

আবার, $\triangle CAD$ এর মধ্যমা DO $\therefore AO = OC$

$\therefore \triangle COD = \triangle AOD$ (iii)

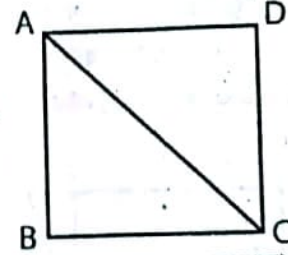
(i) নং (ii) নং এবং (iii) নং হতে পাই,

$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle AOD = \triangle COD$ (প্রমাণিত)

৬। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এর AC কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$ ।



প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এ $\angle B =$ এক সমকোণ

[যেহেতু বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ একসমকোণ]

$\therefore \triangle ABC$ সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ।

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

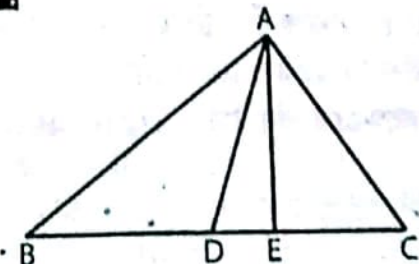
বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$ [বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান]

বা, $2AB^2 = AC^2$ $\therefore BC = AB$

$\therefore AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$ (প্রমাণিত)

৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি $\triangle ABC$ এর মধ্যমা AD। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle ABD = \triangle ACD$ ।

অঙ্কন : BC বাহুর ওপর A বিন্দু হতে AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : A বিন্দু হতে BC বাহুর উপর AD মধ্যমা

[কল্পনানুসারে]

∴ D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

অর্থাৎ BD = CD (i)

এখন, Δ ABD এবং Δ ACD এর ভূমি যথাক্রমে BD এবং CD কল্পনা করলে, AE উভয় ত্রিভুজের উচ্চতা হবে।

আমরা জানি, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ ভূমি \times উচ্চতা

$$\therefore \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} \times BD \times AE}{\frac{1}{2} \times CD \times AE}$$

$$\text{বা, } \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{BD}{CD}$$

$$\text{বা, } \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{CD}{CD} \quad [\because (i) \text{ নং হতে } BD = CD]$$

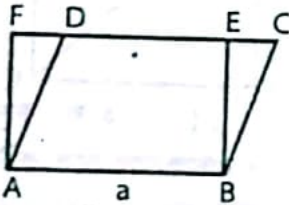
$$\text{বা, } \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = 1$$

∴ Δ ABD = Δ ACD [আড়গুণন করে]

অর্থাৎ Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD. (প্রমাণিত)

৮। একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিক ক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিকের পরিসীমা > আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা।

প্রমাণ : সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হওয়ায়, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্র ও ABEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি AB-এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল AB ও CF-এর মধ্যে অবস্থিত। আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

সুতরাং, BCE সমকোণী ত্রিভুজ। BC, BCE সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হওয়ায় BC > BE.

$$\text{এখন, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা} = 2(AB + BE) \\ = 2AB + 2BE$$

$$\text{এবং সামান্তরিকের পরিসীমা} = 2(AB + BC) \\ = 2AB + 2BC$$

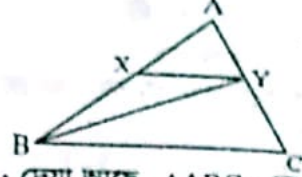
যেহেতু BC > BE

$$\therefore 2AB + 2BC > 2AB + 2BE$$

অর্থাৎ, সামান্তরিকের পরিসীমা > আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা। (প্রমাণিত)

৯। Δ ABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল).

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেয়া আছে, Δ ABC-এর AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। X, Y যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AXY = $\frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC).

অঙ্কন : B, Y যোগ করি।

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

∴ Δ ABC-এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু Y.

BY মধ্যমা

$$\therefore \Delta \text{ ক্ষেত্র } ABY = \frac{1}{2} (\Delta \text{ ক্ষেত্র } ABC) \dots\dots\dots (ii)$$

আবার, Δ ABY-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু X

∴ XY মধ্যমা

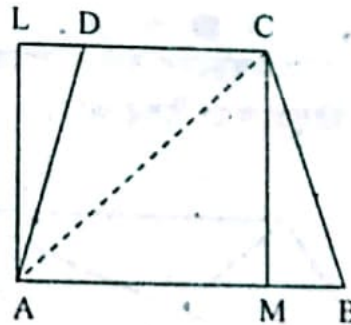
$$\therefore \Delta \text{ ক্ষেত্র } AXY = \frac{1}{2} (\Delta \text{ ক্ষেত্র } ABY)$$

$$\text{বা, } \Delta \text{ ক্ষেত্র } AXY = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (\Delta \text{ ক্ষেত্র } ABC) \right\} [(i) \text{ এর সাহায্যে}]$$

$$\therefore \Delta \text{ ক্ষেত্র } AXY = \frac{1}{4} (\Delta \text{ ক্ষেত্র } ABC). \text{ (প্রমাণিত)}$$

১০। চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন : A থেকে বর্ধিত CD এর উপর AL এবং C থেকে AB-এর উপর CM লম্ব টানি। A ও C যোগ করি।

ক্ষেত্রফল নির্ণয় : ট্রাপিজিয়াম ABCD, AC দ্বারা Δ ক্ষেত্র ACD এবং Δ ক্ষেত্র ABC এ বিভক্ত হয়েছে।

CM লম্ব হওয়ায় Δ ক্ষেত্র ABC এর ভূমি AB এবং CM উচ্চতা।

Δ ক্ষেত্র ACD-এর ভূমি CD এবং উচ্চতা AL, একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হওয়ায় CM = AL এখন,

$$\Delta \text{ ক্ষেত্র } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা} \\ = \frac{1}{2} AB \times CM$$

$$\Delta \text{ ক্ষেত্র } ACD = \frac{1}{2} \times CD \times AL \\ = \frac{1}{2} \times CD \times CM [\because AL = CM]$$

সুতরাং, ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল

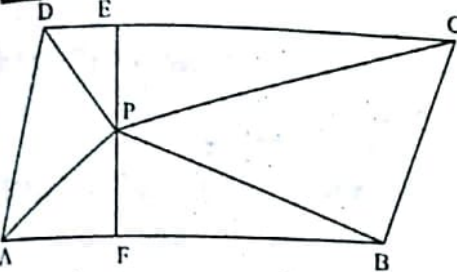
$$= \frac{1}{2} AB \times CM + \frac{1}{2} CD \times CM$$

$$= \frac{1}{2} (AB + CD) \times CM$$

$$= \frac{1}{2} \times (\text{সমান্তরাল বাহু দুটির যোগফল}) \times \text{উচ্চতা}$$

১১। সামান্তরিক ABCD-এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক, P এর অভ্যন্তরে যে কোনো একটি বিন্দু। P, A; P, B; P, C; P, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র PAB + Δ ক্ষেত্র PCD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD)।

অঙ্কন : P বিন্দু হতে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PF ও PE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ভূমি AB ও উচ্চতা EF হওয়ায় ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = AB × EF (i)

Δ PAB-এর ভূমি AB ও উচ্চতা PF

$$\Delta \text{ ক্ষেত্র } PAB = \frac{1}{2} (AB \times PF) \dots\dots\dots (ii)$$

এবং Δ PCD এর ভূমি CD ও PE উচ্চতা হওয়ায়,

$$\Delta \text{ ক্ষেত্র } PCD = \frac{1}{2} \times (CD \times PE)$$

$$\therefore \Delta \text{ ক্ষেত্র } PCD = \frac{1}{2} \times (AB \times PE) \dots\dots\dots (iii)$$

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলে AB = CD]

এখন, (ii) নং এবং (iii) নং যোগ করে পাই,

$$\Delta \text{ ক্ষেত্র } PAB + \Delta \text{ ক্ষেত্র } PCD = \frac{1}{2} (AB \times PF) + \frac{1}{2} (AB \times PE)$$

$$= \frac{1}{2} AB (PF + PE)$$

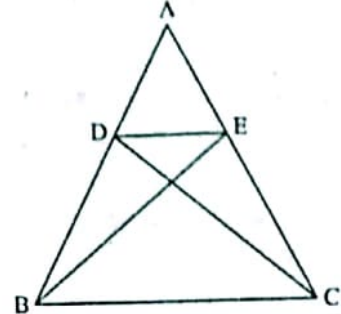
$$= \frac{1}{2} \times (AB \times EF)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\text{সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD}) [(i) \text{ নং এর সাহায্যে}]$$

∴ Δ ক্ষেত্র PAB + Δ ক্ষেত্র PCD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD). (প্রমাণিত)

১২। ΔABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র DBE = Δ ক্ষেত্র CDE.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC-এর ভূমি BC এর সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র DBC = Δ ক্ষেত্র EBC এবং Δ ক্ষেত্র DBE = Δ ক্ষেত্র CDE.

প্রমাণ : ΔDBC ও ΔEBC একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।

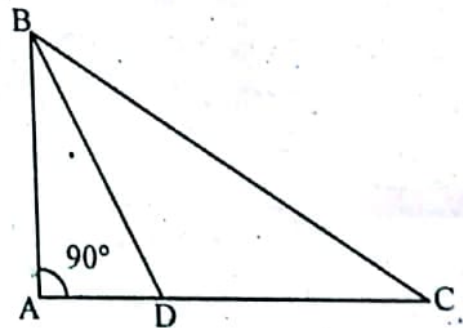
$$\therefore \Delta \text{ ক্ষেত্র } DBC = \Delta \text{ ক্ষেত্র } EBC$$

আবার ΔBDE ও ΔCDE একই ভূমি DE এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল DE ও BC এর মধ্যে অবস্থিত।

$$\text{অতএব, } \Delta \text{ ক্ষেত্র } BDE = \Delta \text{ ক্ষেত্র } CDE. (\text{প্রমাণিত})$$

১৩। ABC ত্রিভুজের ∠A = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, BC² + AD² = BD² + AC²

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর ∠A = এক সমকোণ। D, AC এর উপর একটি বিন্দু। B, D যোগ করা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, BC² + AD² = BD² + AC².

প্রমাণ : ΔABC এ, ∠A = এক সমকোণ।

∴ BC অতিভুজ

$$\text{সুতরাং } AC^2 + AB^2 = BC^2 \dots\dots\dots (i) \text{ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]}$$

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এ, BD অতিভুজ।

$$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = BD^2 - AD^2 \quad \text{..... (ii)}$$

এখন, (ii) থেকে AB^2 এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$AC^2 + BD^2 - AD^2 = BC^2$$

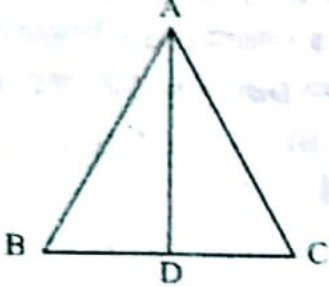
$$\text{বা, } AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$$

$$\therefore BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2 \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

১৪। $\triangle ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।

$$\text{দেখাও যে } 4AD^2 = 3AB^2.$$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC -এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

প্রমাণ : $\triangle ABC$ সমবাহু ত্রিভুজে AD, BC -এর উপর লম্ব

$$\therefore BD = CD$$

$$\text{অর্থাৎ } BD = \frac{1}{2} BC \quad \text{..... (i)}$$

এখন, $\triangle ABD$ সমকোণী ত্রিভুজে AB অতিভুজ

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2 \quad \text{[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]}$$

$$\text{বা, } AD^2 + \left(\frac{1}{2} BC\right)^2 = AB^2 \quad \text{[(i) নং এর সাহায্যে]}$$

$$\text{বা, } AD^2 + \frac{BC^2}{4} = AB^2$$

$$\text{বা, } AD^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{বা, } AD^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4} \quad [\because AB = BC = CA]$$

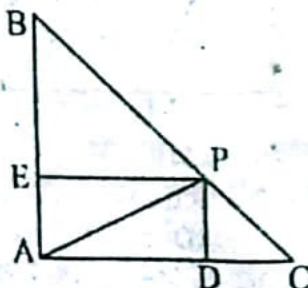
$$\text{বা, } AD^2 = \frac{4AB^2 - AB^2}{4}$$

$$\text{বা, } AD^2 = \frac{3AB^2}{4}$$

$$\therefore 4AD^2 = 3AB^2 \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

১৫। $\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। এর $AB = AC$ এবং $\angle A = 90^\circ$ । P, BC -এর উপর যে কোনো বিন্দু। P, A যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

অঙ্কন : P থেকে AB -এর উপর PE এবং AC -এর উপর PD লম্ব টানি।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর $\angle A = 90^\circ$ এবং $AB = AC$ হওয়ায়,

$$\angle B = \angle C = 45^\circ$$

$$\text{এখন, } \triangle PDC \text{-এর } \angle D = 90^\circ [\because PD \perp AC]$$

$$\text{সুতরাং } \angle DPC = \angle DCP = 45^\circ$$

$$\therefore PD = CD$$

একই কারণে, $\triangle PBE$ সমকোণী ত্রিভুজে $PE = BE$

এখন, $\triangle PDC$ সমকোণী ত্রিভুজে, PC অতিভুজ হওয়ায়

$$PC^2 = PD^2 + CD^2$$

$$= PD^2 + PD^2 \quad [\because PD = CD]$$

$$\therefore PC^2 = 2PD^2 \quad \text{..... (i)}$$

আবার, $\triangle PBE$ সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,

$$PB^2 = BE^2 + PE^2$$

$$= PE^2 + PE^2 \quad [\because BE = PE]$$

$$\therefore PB^2 = 2PE^2 \quad \text{..... (ii)}$$

এখন, (i) এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$PC^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2PE^2$$

$$= 2(PD^2 + PE^2)$$

আবার, $\angle E = \angle A = \angle D = 90^\circ$ এক সমকোণ হওয়ায় $ADPE$

একটি আয়তক্ষেত্র।

$$\therefore PE = AD$$

$$\therefore PC^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2) \quad \text{..... (iii)}$$

$\triangle ADP$ সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,

$$PA^2 = PD^2 + AD^2 \quad \text{..... (iv)}$$

এখন, (iii) নং সমীকরণে (iv) নং এর মান বসিয়ে পাই,

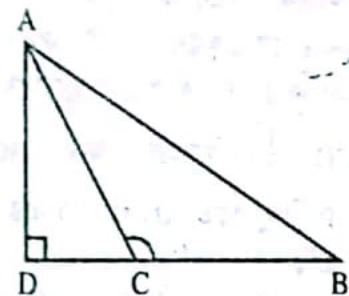
$$PC^2 + PB^2 = 2PA^2$$

$$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2 \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

১৬। $\triangle BAC$ এর $\angle C$ স্কলকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব।

$$\text{দেখাও যে, } AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ ত্রিভুজে $\angle C$ স্কলকোণ।

AD, BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব অর্থাৎ $\angle ADB = 90^\circ$ ।

দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$.

প্রমাণ : $\triangle ACD$ এ $\angle ADC = 90^\circ$ এক সমকোণ এবং অতিভুজ

$$= AC.$$

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AD^2 +$

$$CD^2 \quad \text{..... (i)}$$

আবার, $\triangle ABD$ এ $\angle ADB = 90^\circ$ এক সমকোণ এবং অতিভুজ

$$= AB.$$

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= AD^2 + (BC + CD)^2 \quad [\because BD = BC + CD]$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD + CD^2$$

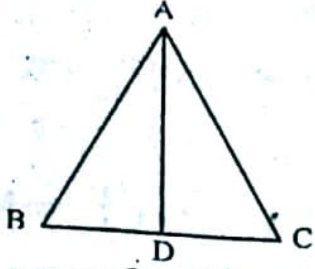
$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$$

$$= AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD \quad \text{[(i) নং থেকে মান বসিয়ে]}$$

$$\text{সুতরাং } AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD \quad \text{(দেখানো হল)}$$

১৭। $\triangle ABC$ এর $\angle C$ সূক্ষকোণ; AD , BC এর উপর লম্ব।
দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি $\triangle ABC$ এর $\angle C$ সূক্ষকোণ;
 AD , BC এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$.

প্রমাণ : AD লম্ব হওয়ায় ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং AB অতিভুজ।

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= AD^2 + (BC - CD)^2 \quad [\because BD = BC - CD]$$

$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \dots\dots\dots (i)$$

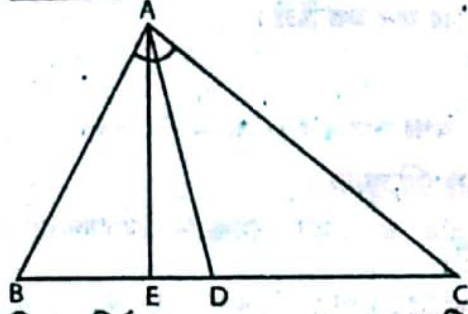
আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজে AC অতিভুজ।

$$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$$

এখন সমীকরণ (i) এ $AD^2 + CD^2 = AC^2$ বসিয়ে পাই,
 $AB^2 = AC^2 + AD^2 - 2BC \cdot CD$ (প্রমাণিত)

১৮। $\triangle ABC$ এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও
যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন : A বিন্দু হতে BC -এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : যেহেতু $\triangle ADC$ -এর $\angle ADB =$ সূক্ষকোণ,

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DE \dots\dots\dots (i)$$

[AD , BC -এর উপর মধ্যমা বলে, $BD = CD$]

\therefore (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে,

$$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DE + AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DE$$

$$= 2AD^2 + 2BD^2$$

$$= 2(BD^2 + AD^2)$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2) \text{ (প্রমাণিত)}$$



সৃজনশীল অংশ

✓ মাস্টার ট্রেনার কর্তৃক প্রণীত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর :

□ সাধারণ বহুনির্বাচনি :

- পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার হতে কোন উপপাদ্যটি বর্ণিত হয়েছে?
ক টলেমির খ ব্রহ্মগুপ্তের (ক)
গ অ্যাপোলোনিয়াসের ঘ নিউটনের
- একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ২০৮ বর্গমিটার। এর প্রস্থ ১৩ মিটার হলে দৈর্ঘ্য কত মিটার?
ক ১০ খ ১৫ (গ)
গ ১৬ ঘ ৩০

[ব্যাখ্যা : আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ;

$$\text{দৈর্ঘ্য} = \frac{208}{13} = 16 \text{ মিটার}]$$

- বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য ১৬ সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?
ক ১০০ খ ১৫৬ (ঘ)
গ ২৩৬ ঘ ২৫৬
- বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা ৩৬ মিটার হলে এর বাহুর দৈর্ঘ্য কত মিটার?
ক ৬ খ ৯ (ঘ)
গ ৯.৫ ঘ ১০

$$\text{ব্যাখ্যা : বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য} = \frac{36}{4} = 9 \text{ মি.}]$$

- বর্গের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার যখন পরিসীমা ২০ মিটার?
ক ৩৬ খ ২৫ (ঘ)
গ ১৬ ঘ ৯
- [ব্যাখ্যা : বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = $\frac{\text{পরিসীমা}}{4} = \frac{20}{4} = 5$ মিটার
সুতরাং বর্গের ক্ষেত্রফল = $(5)^2 = 25$ বর্গমিটার।]
- ত্রিভুজের ভূমি $\frac{2}{3}$ মিটার ও উচ্চতা ৩ মিটার হলে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?
ক ১ খ ২ (ক)
গ ৩ ঘ ৯
- [ব্যাখ্যা : ত্রিভুজের ভূমি $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 3 = 1$ বর্গমিটার।]
- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ২৪ বর্গমিটার এবং এর উচ্চতা ৬ মিটার হলে ভূমি কত মিটার হবে?
ক ২ খ ৪ (গ)
গ ৮ ঘ ১২
- [ব্যাখ্যা : $\frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times 6 = 24$ ভূমি = $\frac{2 \times 24}{6} = 8$ মিটার।]
- নিচের কোন বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য হলে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাবে?
ক ৪, ৩ ও ৫ খ ৪, ৫ ও ৭ (ক)
গ ৬, ৭ ও ৯ ঘ ৬, ৮ ও ৯
- [ব্যাখ্যা : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = (10)^2$]

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ▶ ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- ▶ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- ▶ বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক ও বেলনের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ সুষম ও অসম আকারের বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

যা মনে রাখতে হবে...



ব্যবহারিক প্রয়োজনে, রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসাবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং একক নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

$$\text{অর্থাৎ পরিমাপ} = \frac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$$

নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুন তা নির্দেশ করে। যেমন, বেধটি ৫ মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসাবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেধটি ৫ গুন লম্বা।

□ অনুশীলনী- ১৬.১

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ৫১ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য ৬০ সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল ১২০০ বর্গ সে.মি. হলে, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $b = 60$ সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a সে.মি.।

$$\therefore \text{ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$$

$$\text{বা, } \frac{60}{4} \sqrt{4a^2 - (60)^2} = 1200$$

$$\text{বা, } 15 \sqrt{4a^2 - 3600} = 1200$$

$$\text{বা, } \sqrt{4a^2 - 3600} = 80$$

$$\text{বা, } 4a^2 - 3600 = 6400 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 4a^2 = 10000$$

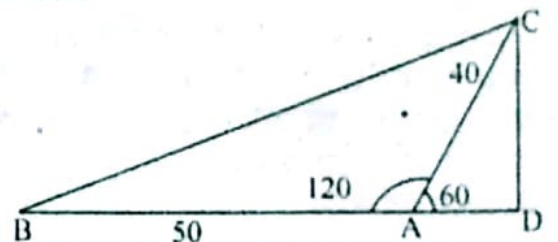
$$\text{বা, } a^2 = 2500$$

$$\therefore a = 50 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore \text{ত্রিভুজটির সমান সামান বাহুর দৈর্ঘ্য ৫০ সে.মি.}$$

উদাহরণ- ৬১ একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুটি রাস্তা 120° কোণে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় ১০ কিলোমিটার ও ঘণ্টায় ৮ কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হলো। ৫ ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, A স্থান থেকে দুইজন লোক যথাক্রমে ঘণ্টায় ১০ কিলোমিটার ও ঘণ্টায় ৮ কিলোমিটার বেগে রওনা হয়ে ৫ ঘণ্টার পর B ও C স্থানে পৌঁছাল। তাহলে, ৫ ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব হয় BC.

C থেকে BA এর বর্ধিতাংশের ওপর CD লম্ব টানি।

$$\therefore AB = 5 \times 10 \text{ কিলোমিটার} = 50 \text{ কিলোমিটার,}$$

$$AC = 5 \times 8 \text{ কিলোমিটার} = 40 \text{ কিলোমিটার}$$

এবং $\angle BAC = 120^\circ$

$\angle DAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\triangle ACD$ সমকোণী ত্রিভুজ

$\frac{CD}{AC} = \sin 60^\circ$

বা, $CD = AC \sin 60^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

এবং $\frac{AD}{AC} = \cos 60^\circ$

বা, $AD = AC \cos 60^\circ$
 $= 40 \times \frac{1}{2} = 20$

আবার, $\triangle ABC$ সমকোণী থেকে পাই,

$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$= (BA + AD)^2 + CD^2$

$= (50 + 20)^2 + (20\sqrt{3})^2$

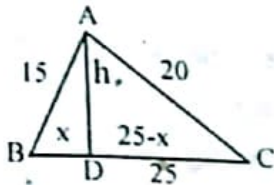
$= 4900 + 1200 = 6100$

$\therefore BC = 78.1$ (প্রায়)

\therefore নির্ণেয় দূরত্ব 78.1 কিলোমিটার (প্রায়)

প্রশ্ন-৭১ একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25 একক, 20 একক ও 15 একক। বৃহত্তর বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $BC = 25$ একক

$AC = 20$ একক, $AB = 15$ একক

A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD ত্রিভুজকে দুটি $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

ধরি, $BD = x$ একক এবং $AD = h$ একক

$\therefore CD = BC - BD = (25 - x)$ একক

$\triangle ABD$ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BD^2 + AD^2 = AB^2$

বা, $x^2 + h^2 = (15)^2$

$\therefore x^2 + h^2 = 225$ (i)

এবং $\triangle ACD$ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $CD^2 + AD^2 = AC^2$

বা, $(25 - x)^2 + h^2 = (20)^2$

বা, $625 - 50x + x^2 + h^2 = 400$

বা, $625 - 50x + 225 = 400$

সমীকরণ (i) এর সাহায্যে

বা, $50x = 450$

$\therefore x = 9$

সমীকরণ (i) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$81 + h^2 = 225$

বা, $h^2 = 144$

$\therefore h = 12$

\triangle ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} BD \cdot AD$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12$ বর্গ একক

$= 36$ বর্গ একক

এবং \triangle ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} BD \cdot AD$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} (25 - 9) \times 12$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 12$ বর্গ একক

$= 96$ বর্গ একক

\therefore নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 36 বর্গ একক এবং 96 বর্গ একক।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর একটি

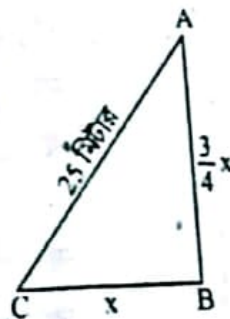
বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

যার অতিভুজ, $AC = 25$ মিটার।

একটি বাহু, $BC = x$



অপর বাহু, $AB = \frac{3}{4}x$

আমরা জানি,

সমকোণী ত্রিভুজে,

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

বা, $(25)^2 = x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2$

বা, $625 = x^2 + \frac{9x^2}{16}$

বা, $625 = \frac{16x^2 + 9x^2}{16}$

বা, $25x^2 = 625 \times 16$

বা, $x^2 = \frac{10000}{25}$

বা, $x^2 = 400$

$\therefore x = \sqrt{400} = 20$

\therefore অপর বাহু, $AB = \frac{3}{4} \times 20$

$= 15$ মিটার।

\therefore নির্ণেয় একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 20 মিটার

এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য 15 মিটার

- ২। ২০ মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে ঝড়াকাতাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে উপরের প্রান্ত ৪ মিটার নিচে নামবে।

সমাধান:

মনে করি, AC মইয়ের গোড়া C থেকে D বিন্দুতে সরালে উপরের প্রান্ত A থেকে B তে নেমে আসে।

মইয়ের দৈর্ঘ্য, AC = BD = ২০ মিটার

এবং AB = ৪ মিটার

∴ BC = ১৬ মিটার

এখন, BCD সমকোণী ত্রিভুজে,

$$BC^2 + CD^2 = BD^2$$

$$\text{বা, } (16)^2 + (CD)^2 = (20)^2$$

$$\text{বা, } (CD)^2 = (20)^2 - (16)^2$$

$$\text{বা, } (CD)^2 = 400 - 256$$

$$\text{বা, } (CD)^2 = 144$$

$$\therefore CD = \sqrt{144}$$

$$= 12$$

- ∴ মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে ১২ সে.মি. দূরে সরালে উপরের প্রান্ত ৪ মিটার নিচে নামবে।

- ৩। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা ১৬ মিটার। এর সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির $\frac{5}{6}$ অংশ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ভূমি, BC = x মিটার।

$$\therefore AB = AC = \frac{5x}{6}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } x + \frac{5x}{6} + \frac{5x}{6} = 16$$

$$\text{বা, } \frac{6x + 5x + 5x}{6} = 16$$

$$\text{বা, } 16x = 16 \times 6$$

$$\therefore x = \frac{16 \times 6}{16}$$

$$= 6$$

অতএব, ত্রিভুজটির ভূমি, BC = ৬ মিটার

এবং অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, AB = AC = $\frac{5}{6} \times 6$ মিটার = ৫ মিটার।

এখন, ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির পরিসীমা, 2S = ১৬ মিটার

$$\text{বা, } S = \frac{16}{2} \text{ মিটার}$$

$$\therefore S = ৮ \text{ মিটার}$$

বা, ১-ক্ষেত্রে ABC-এর ক্ষেত্রফল

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \sqrt{S(S-BC)(S-CA)(S-AB)}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \sqrt{8 \times 2 \times 3 \times 3}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \sqrt{4 \times 4 \times 9}$$

$$= \frac{1}{2} \times 12$$

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ৬ বর্গ মিটার।

- ৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২৫ সে.মি., ২৭ সে.মি. এবং পরিসীমা ৮৪ সে.মি.। ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ।

যদি, AB = ২৫ সে.মি., AC = ২৭ সে.মি. এবং BC = x

মিটার।

$$\text{প্রশ্নমতে, } x + ২৭ + ২৫ = ৮৪$$

$$\text{বা, } x + ৫২ = ৮৪$$

$$\text{বা, } x = ৮৪ - ৫২$$

$$\therefore x = ৩২$$

$$\text{এখন, } \Delta\text{-ক্ষেত্রটির পরিসীমা, } 2S = ৮৪$$

$$\text{বা, } S = \frac{৮৪}{২}$$

$$= ৪২$$

এখন, Δ ক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{4} \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{৪২(৪২-২৫)(৪২-২৭)(৪২-৩২)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{৪২ \times ১৭ \times ১৫ \times ১০}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{1০৭১০০}$$

$$= ৩২৭.২৬১ \text{ বর্গ সে.মি.}$$

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল ৩২৭.২৬১ বর্গ সে.মি.।

- ৫। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য ২ মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $৬\sqrt{3}$ বর্গ মিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার।

$$\therefore \text{এর ক্ষেত্রফল} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ বর্গ মিটার।}$$

প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য ২ মিটার বাড়ালে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (a+2)^2 \text{ বর্গ মিটার।}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{\sqrt{3}}{4} (a+2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + ৬\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3} (a^2 + 4a + 4)}{4} = \frac{\sqrt{3} a^2 + ২৪\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} (a^2 + 4a + 4) = \sqrt{3} a^2 + ২৪\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} (a^2 + 4a + 4) = \sqrt{3} (a^2 + ২৪)$$

$$\text{বা, } a^2 + 4a + 4 = a^2 + ২৪$$

[উভয় পক্ষকে $\sqrt{3}$ দ্বারা ভাগ করে]

$$\text{বা, } a^2 + 4a + 4 - a^2 - ২৪ = ০$$

$$\text{বা, } 4a - ২০ = ০$$

$$\text{বা, } 4a = ২০$$

$$\text{বা, } a = \frac{২০}{৪}$$

$$\text{বা, } a = ৫$$

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ৫ মিটার।

একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ২৬ মিটার, ২৮ মিটার এবং ক্ষেত্রফল ১৮২ বর্গ মিটার হলে, বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি,

ABC ত্রিভুজের বাহু, AB = ২৬ মিটার এবং BC = ২৮ মিটার

সেয়া আছে,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ১৮২ বর্গ মিটার।



$$\therefore \text{ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \theta$$

$$\text{বা, } 182 = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \theta$$

$$\text{বা, } 364 = 26 \times 28 \sin \theta$$

$$\text{বা, } 728 \sin \theta = 364$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{364}{728}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ, } \theta = 30^\circ$$

$$[\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$$

১১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে ৬ সে.মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে ৩ সে.মি. কম। ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে ভূমি = BC, লম্ব = AC এবং অতিভুজ = AB

মনে করি, ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য, BC = x সে.মি.।

$$\text{প্রস্তুত, লম্ব, AC} = \left(\frac{11}{12}x - 6\right) \text{ সে.মি.}$$

$$\text{এবং অতিভুজ, AB} = \left(\frac{4}{3}x - 3\right) \text{ সে.মি.।}$$

এখন ABC সমকোণী ত্রিভুজে, পিথাগোরাসের সূত্র মতে,

$$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{ভূমি})^2 + (\text{লম্ব})^2$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{বা, } \left(\frac{4x}{3} - 3\right)^2 = x^2 + \left(\frac{11x}{12} - 6\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{16x^2}{9} - 2 \times \frac{4}{3}x \times 3 + 9 = x^2 + \frac{121x^2}{144} - 11x + 36$$

$$\text{বা, } \frac{16x^2 - 72x + 81}{9}$$

$$= \frac{144x^2 + 121x^2 - 11 \times 144x + 36 \times 144}{144}$$

$$\text{বা, } \frac{16x^2 - 72x + 81}{9} = \frac{265x^2 - 1584x + 5184}{144}$$

$$\text{বা, } 16x^2 - 72x + 81 = \frac{265x^2 - 1584x + 5184}{16}$$

[উভয় পক্ষকে ৯ দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } 16(16x^2 - 72x + 81) = 265x^2 - 1584x + 5184$$

$$\text{বা, } 256x^2 - 1152x + 1296 = 265x^2 - 1584x + 5184$$

$$\text{বা, } 256x^2 - 1152x + 1296 - 265x^2 - 1584x - 5184 = 0$$

$$\text{বা, } -9x^2 - 432x - 3888 = 0$$

$$\text{বা, } 9x^2 + 432x + 3888 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 48x + 432 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 36x - 12x + 432 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 36) - 12(x - 36) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 36)(x - 12) = 0$$

$$\text{হয়, } x = 36 \quad \text{অথবা, } x - 12 = 0$$

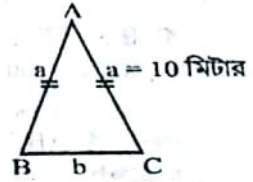
$$\therefore x = 36 \quad \therefore x = 12$$

অতএব, ত্রিভুজটির ভূমির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য ৩৬ সে.মি. অথবা ১২ সে.মি. (Ans.)

৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ১০ মিটার এবং ক্ষেত্রফল ৪৮ বর্গ মিটার হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, ABC. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য, a = ১০ মিটার এবং ভূমির দৈর্ঘ্য b মিটার এর ক্ষেত্রফল = ৪৮ বর্গ মিটার।



আমরা জানি,

$$\text{সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$$

$$\text{বা, } 48 = \frac{b}{4} \sqrt{4 \times (10)^2 - b^2}$$

$$\text{বা, } b \sqrt{4 \times 100 - b^2} = 48 \times 4$$

$$\text{বা, } b \sqrt{400 - b^2} = 192$$

$$\text{বা, } (b \sqrt{400 - b^2})^2 = (192)^2 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } b^2 (400 - b^2) = 36864$$

$$\text{বা, } 400b^2 - b^4 = 36864$$

$$\text{বা, } 400b^2 - b^4 - 36864 = 0$$

$$\text{বা, } b^4 - 400b^2 + 36864 = 0 \quad [-1 \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } b^4 - 256b^2 - 144b^2 + 36864 = 0$$

$$\text{বা, } b^2(b^2 - 256) - 144(b^2 - 256) = 0$$

$$\text{বা, } (b^2 - 256)(b^2 - 144) = 0$$

$$\text{হয়, } b^2 - 256 = 0$$

$$\text{অথবা, } b^2 - 144 = 0$$

$$\text{বা, } b^2 = 256$$

$$\text{বা, } b^2 = 144$$

$$\text{বা, } b = \sqrt{256}$$

$$\text{বা, } b = \sqrt{144}$$

$$\therefore b = 16$$

$$\therefore b = 12$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভূমির দৈর্ঘ্য ১৬ মিটার অথবা ১২ মিটার।}$$

৯। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর ১৩৫° কোণ করে দুই দিকে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় ৭ কিলোমিটার ও ঘণ্টায় ৫ কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হল। ৪ ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, নির্দিষ্ট স্থান

B,

এবং B থেকে লোক দুটি ৭

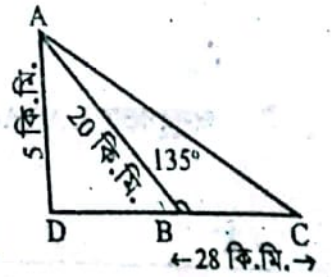
কি.মি. ও ৫ কি.মি. বেগে ৪

ঘণ্টা পর যথাক্রমে C ও A

বিন্দুতে পৌঁছে।

তাহলে BC অতিক্রান্ত দূরত্ব =

$$7 \times 4 = 28 \text{ কি.মি.}$$



এবং AB অভিক্রান্ত দূরত্ব = $5 \times 4 = 20$ কি.মি.

দেয়া আছে $\angle ABC = 135^\circ$

BC-এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব আঁকি।

এখন, $\triangle ABD$ -এ

$$\angle ABD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

এবং $\angle ADB = 90^\circ$

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ$$

$$\therefore AD = BD$$

আবার, $\triangle ABD$ সমকোণী ত্রিভুজে AB অভিজ্ঞ সূত্রাং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\text{বা, } (20)^2 = BD^2 + BD^2$$

$$\text{বা, } 400 = 2BD^2$$

$$\text{বা, } 2BD^2 = 400$$

$$\text{বা, } BD^2 = \frac{400}{2}$$

$$\text{বা, } BD^2 = 200$$

$$\text{বা, } BD = \sqrt{200}$$

$$\therefore BD = 14.14$$

এখন, $\triangle ABC$ স্কলকোণী ত্রিভুজে BD, AB এর লম্ব অভিক্ষেপ,

সূত্রাং $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$

$$\text{বা, } AC^2 = (20)^2 + (28)^2 + 2 \times 28 \times 14.14$$

$$\text{বা, } AC^2 = 400 + 784 + 791.84$$

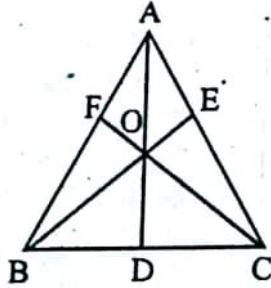
$$\text{বা, } AC^2 = 1975.84$$

$$\therefore AC = 44.45 \text{ (প্রায়)}$$

অতএব, 4 ঘণ্টা পর তাদের সরাসরি দূরত্ব হবে 44.45 কি.মি. (প্রায়) (Ans.)

- ১০। একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু থেকে বাহু তিনটির উপর অর্ধকিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি.; 7 সে.মি. ও 8 সে.মি.। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। O এর অভ্যন্তরস্থ যে কোন একটি বিন্দু। O থেকে BC, CA ও AB এর উপর যথাক্রমে OD, OE, OF লম্ব আঁকি। OA, OB এবং OC যোগ করি।



ধরি, $BC = CA = AB = a$ সে.মি.।

প্রশ্নানুসারে, $OD = 6$ সে.মি., $OE = 7$ সে.মি. এবং $OF = 8$ সে.মি.

এখন, $\triangle OBC$ এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times 6$$

$$= 3a \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অনুরূপভাবে, $\triangle OAC$ এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times a \times 7$

$$= \frac{7}{2} a \text{ বর্গ সে.মি.}$$

এবং $\triangle OAB$ এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times a \times 8$

$$= 4a \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$\therefore \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল = $\triangle OBC$ ক্ষেত্র + $\triangle OAC$ ক্ষেত্র + $\triangle OAB$ ক্ষেত্র

$$= 3a + \frac{7a}{2} + 4a$$

$$= \frac{6a + 7a + 8a}{2} = \frac{21a}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$\text{শর্তানুসারে, } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{21a}{2}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} a^2 = \frac{21 \times 4}{2} \times a$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} a^2 = 42a$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} a^2 - 42a = 0$$

$$\text{বা, } a(\sqrt{3}a - 42) = 0$$

কিন্তু $a \neq 0$

$$\therefore \sqrt{3} a - 42 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} a = 42$$

$$\therefore a = \frac{42}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } a = \frac{42 \times \sqrt{3}}{3} \text{ [হর ও লবকে } \sqrt{3} \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } a = 14\sqrt{3}$$

$$= 14 \times 1.73205$$

$$= 24.2487$$

$$= 24.249 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (14\sqrt{3})^2$$

[a এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 \times 14 \times 14$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 42 \times 14$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 588$$

$$= 147 \times \sqrt{3}$$

$$= 147 \times 1.73205$$

$$= 254.61135 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অতএব, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 24.249 সে.মি. (প্রায়)

এবং ক্ষেত্রফল 254.611 বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

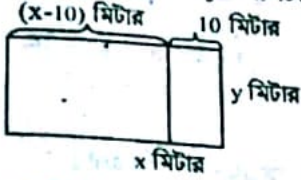
□ অনুশীলনী- ১৬.২

পাঠ্যবইয়ের গুরুত্বপূর্ণ উদাহরণসমূহ

উদাহরণ- ২১ একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ২০০০ বর্গমিটার।
এর দৈর্ঘ্য ১০ মিটার কম হত তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র
হত। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং
প্রস্থ y মিটার।

∴ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার।



প্রশ্নানুসারে, $xy = 2000$ (i)

এবং $x - 10 = y$ (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $y = x - 10$ (iii)

সমীকরণ (i) এ $y = x - 10$ বসিয়ে পাই

$$x(x - 10) = 2000$$

$$\text{বা, } x^2 - 10x - 2000 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 50x + 40x - 2000 = 0$$

$$\text{বা, } (x - 50)(x + 40) = 0$$

$$\therefore x - 50 = 0$$

$$\text{অথবা } x + 40 = 0$$

$$\text{বা, } x = 50$$

$$\text{অথবা } x = -40$$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$$\therefore x = 50$$

এখন, সমীকরণ (iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

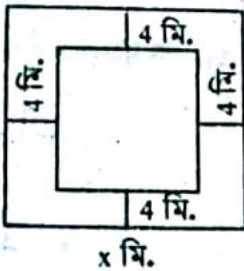
$$y = 50 - 10 = 40$$

∴ নির্ণেয় আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ৫০ মিটার এবং প্রস্থ ৪০
মিটার। (Ans)

উদাহরণ- ৩১ বর্গাকার একটি মাঠের ভেতরে চারদিকে ৪ মিটার
চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তার ক্ষেত্রফল ১ হেক্টর হয়,
তবে রাস্তা বাদে মাঠের ভেতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য x মিটার।

∴ মাঠের ক্ষেত্রফল x^2 বর্গমিটার।



মাঠের ভিতরে চারদিকে ৪ মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।

∴ রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য = $(x - 2 \times 4)$ মি.
= $(x - 8)$ মি.

∴ রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল
= $(x - 8)^2$ বর্গমিটার

সুতরাং রাস্তার ক্ষেত্রফল = $(x^2 - (x - 8)^2)$ বর্গমিটার

যা আমরা জানি, ১ হেক্টর = ১০০০০ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - (x - 8)^2 = 10000$

$$\text{বা, } x^2 - x^2 + 16x - 64 = 10000$$

$$\text{বা, } 16x = 10064$$

$$\therefore x = 629$$

রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল,

$$= (629 - 8)^2 \text{ বর্গমিটার}$$

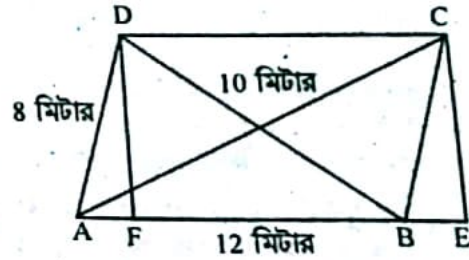
$$= 385641 \text{ বর্গমিটার}$$

$$\Rightarrow 38.56 \text{ হেক্টর (প্রায়)}$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল ৩৮.৫৬ হেক্টর

উদাহরণ- ৫১ একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য ১২ মিটার ও ৮
মিটার এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি ১০ মিটার হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য
নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ABCD সামান্তরিকের $AB = a = 12$
মিটার, $AD = c = 8$ মিটার এবং কর্ণ $BD = b = 10$ মিটার।
D ও C থেকে AB এর ওপর এবং AB এর বর্ধিতাংশের
ওপর DF ও CE লম্ব টানি। A, C ও B, D যোগ করি।



$$\Delta ABD \text{ এর অর্ধপরিসীমা } s = \frac{12 + 10 + 8}{2} \text{ মিটার}$$

$$= 15 \text{ মিটার}$$

∴ Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)} \text{ বর্গমিটার}$$

$$= \sqrt{1575} \text{ বর্গমিটার} = 39.68 \text{ বর্গমিটার (প্রায়)}$$

$$\text{আবার, } \Delta \text{ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} AB \times DF$$

$$\text{বা, } 39.68 = \frac{1}{2} \times 12 \times DF$$

$$\text{বা, } 6DF = 39.68$$

$$\therefore DF = 6.61$$

এখন, ΔBCE সমকোণী

$$\therefore BE^2 = BC^2 - CE^2$$

$$= AD^2 - DF^2$$

$$= 8^2 - (6.61)^2$$

$$= 20.31$$

$$\therefore BE = 4.5$$

$$\text{অতএব, } AE = AB + BE$$

$$= 12 + 4.5 = 16.5$$

ΔACE সমকোণী থেকে পাই,

$$AC^2 = AE^2 - CE^2$$

$$= (16.5)^2 - (6.61)^2 = 315.94$$

$$\therefore AC = 17.77 \text{ (প্রায়)}$$

∴ নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য ১৭.৭৭ মিটার (প্রায়)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গ মিটার হলে, পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি,

আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ = x মিটার

" " দৈর্ঘ্য = $2x$ মিটার

এবং " " ক্ষেত্রফল = $2x \times x$ বর্গ মিটার
 $= 2x^2$ বর্গ মিটার

শর্তমতে, $2x^2 = 512$

বা, $x^2 = \frac{512}{2}$

বা, $x^2 = 256$

বা, $x = \sqrt{256}$

$\therefore x = 16$

\therefore আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ = 16 মিটার

" " দৈর্ঘ্য = 2×16 মিটার

= 32 মিটার

এখন, আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা = $2(16 + 32)$

= 2×48

= 96 মিটার

\therefore নির্ণেয় আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা = 96 মিটার।

২। একটি জমির দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হলো। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 5 মিটার হয়। তবে পুকুর পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, জমির দৈর্ঘ্য = 80 মিটার

এবং জমির প্রস্থ = 60 মিটার

\therefore জমির ক্ষেত্রফল = (80×60)

বর্গ মিটার।

= 4800 বর্গ মিটার।

পুকুরের পাড় বাদে শুধু পুকুরের দৈর্ঘ্য = $\{80 - (4 + 4)\}$

মিটার

= $(80 - 8)$ মিটার

= 72 মিটার

পুকুরের পাড় বাদে শুধু পুকুরের প্রস্থ = $\{60 - (4 + 4)\}$ মিটার

= $(60 - 8)$ মিটার

= 52 মিটার

\therefore শুধু পুকুরের ক্ষেত্রফল = 72×52 বর্গ মিটার

= 3744 বর্গ মিটার

\therefore পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল = জমির ক্ষেত্রফল - শুধু

পুকুরের ক্ষেত্রফল

= $(4800 - 3744)$ বর্গ মিটার

= 1056 বর্গ মিটার।

অতএব, পুকুর পাড়ের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 1056 বর্গ মিটার।

৩। একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড়বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

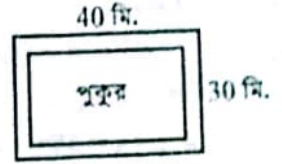
সমাধান:

দেওয়া আছে, বাগানের দৈর্ঘ্য

= 40 মিটার

এবং বাগানের প্রস্থ = 30

মিটার



\therefore বাগানের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ

= 40 মিটার \times 30 মিটার

= 1200 বর্গ মিটার

ধরি, পুকুরের পাড়ের বিস্তার = A মিটার

\therefore পুকুরের দৈর্ঘ্য = $\{40 - (A + A)\} = (40 - 2A)$ মিটার

এবং পুকুরের প্রস্থ = $\{30 - (A + A)\} = (30 - 2A)$ মিটার

\therefore পুকুরের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ

= $(40 - 2A)(30 - 2A)$ বর্গ মিটার

কিন্তু, শর্তানুসারে,

$(40 - 2A)(30 - 2A) = \frac{1}{2} \times$ বাগানের ক্ষেত্রফল

বা, $1200 - 80A - 60A + 4A^2 = \frac{1}{2} \times 1200$

বা, $1200 - 140A + 4A^2 = 600$

বা, $4A^2 - 140A + 1200 - 600 = 0$

বা, $4A^2 - 140A + 600 = 0$

বা, $4(A^2 - 35A + 150) = 0$

বা, $A^2 - 35A + 150 = 0$

বা, $A^2 - 30A - 5A + 150 = 0$

বা, $A(A - 30) - 5(A - 30) = 0$

বা, $(A - 5)(A - 30) = 0$

হয়, $A - 30 = 0$ অথবা, $A - 5 = 0$

$\therefore A = 30$

$\therefore A = 5$

কিন্তু $A = 30$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ পুকুরের বিস্তার 30 মিটার হলে পুকুর খনন সম্ভব নয়।

$\therefore A = 5$ গ্রহণযোগ্য মান।

\therefore পুকুরের দৈর্ঘ্য = $(40 - 2A)$ মিটার

= $(40 - 2 \times 5)$ মিটার

= $(40 - 10)$ মিটার

= 30 মিটার।

এবং পুকুরের প্রস্থ = $(30 - 2A)$ মিটার

= $(30 - 2 \times 5)$ মিটার

= $(30 - 10)$ মিটার

= 20 মিটার

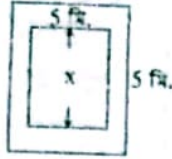
অতএব, পুকুরের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 30 মিটার এবং প্রস্থ 20 মিটার।

- ৪। একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে ৫ মিটার চতুর্ভুজ একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল ৫০০ বর্গ মিটার হলে, বাগানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি,

বর্গাকার বাগানের একবাহুর দৈর্ঘ্য = x মিটার



\therefore বর্গাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মিটার দেয়া আছে,

রাস্তার ক্ষেত্রফল = ৫০০ বর্গ মিটার।

অতএব; রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল = $(x^2 + 500)$ বর্গ মিটার.....(i)

আবার,

রাস্তাসহ বর্গাকার বাগানের একবাহুর দৈর্ঘ্য = $(x + (5 + 5))$ মিটার

= $(x + 10)$ মিটার

\therefore রাস্তাসহ বর্গাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = $(x + 10)^2$ বর্গ মিটার
= $(x^2 + 20x + 100)$ বর্গ মিটার.....(ii)

(i) ও (ii) নং হতে,

$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 500$$

$$\text{বা, } 20x = 500 - 100$$

$$\text{বা, } 20x = 400$$

$$20$$

$$\text{বা, } x = \frac{400}{20}$$

$$\therefore x = 20$$

$$\therefore \text{বাগানের ক্ষেত্রফল} = x^2 \text{ বর্গ মিটার} \\ = (20)^2 \text{ বর্গ মিটার} \\ = 400 \text{ বর্গ মিটার।}$$

\therefore নির্ণেয় বাগানের ক্ষেত্রফল ৪০০ বর্গ মিটার।

- ৫। একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল ৭৬৮ বর্গ মিটার। প্রতিটি ৪০ সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধতে মোট কতটি পাথর লাগবে।

সমাধান:

মনে করি,

আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = x মিটার

তাহলে " দৈর্ঘ্য = $3x$ মিটার

$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = 3x \cdot x \text{ বর্গ মিটার} \\ = 3x^2 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 3x^2 = 768$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{768}{3}$$

$$\text{বা, } x^2 = 256$$

$$\text{বা, } x = \sqrt{256}$$

$$\therefore x = 16$$

অর্থাৎ, আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = ১৬ মিটার

$$\text{দৈর্ঘ্য} = 3 \times 16 \text{ মিটার} \\ = 48 \text{ মিটার}$$

$$\text{অতএব, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা} = 2 (\text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ}) \\ = 2(48 + 16) \\ = 2 \times 64 \\ = 128 \text{ মিটার}$$

যেহেতু, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান।

সুতরাং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = ১২৮ মিটার

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্য} = (128 \div 4) \text{ মিটার} \\ = 32 \text{ মিটার}$$

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = (32)^2 \text{ বর্গ মিটার} \\ = 1024 \text{ বর্গ মিটার}$$

এখানে, বর্গাকার প্রতিটি পাথরের দৈর্ঘ্য = ৪০ সে.মি.

$$= \frac{40}{100} \text{ মিটার}$$

$$= 0.4 \text{ মিটার}$$

$$\text{অতএব, বর্গাকার পাথরের ক্ষেত্রফল} = (0.4)^2 \text{ বর্গ মিটার} \\ = 0.16 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রটির জন্য মোট পাথর লাগবে} = (1024 \div 0.16) \\ = 6400 \text{ টি}$$

\therefore নির্ণেয় পাথরের সংখ্যা = ৬৪০০ টি।

- ৬। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ১৬০ বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য ৬ মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি,

আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = A মিটার

এবং " প্রস্থ = B মিটার

$$\therefore \text{ক্ষেত্রটির} = A \times B \text{ বর্গ মিটার} \\ = AB \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, ক্ষেত্রফল, } AB = 160 \text{.....(i)}$$

আবার, দৈর্ঘ্য ৬ মিটার কম হলে আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র হয়।

$$\therefore A - 6 = B \text{ [কারণ বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান]}$$

$$\text{বা, } A = B + 6 \text{.....(ii)}$$

A এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$$(B + 6) B = 160$$

$$\text{বা, } B^2 + 6B - 160 = 0$$

$$\text{বা, } B^2 + 16B - 10B - 160 = 0$$

$$\text{বা, } B(B + 16) - 10(B + 16) = 0$$

$$\text{বা, } (B + 16)(B - 10) = 0$$

$$\text{হয়, } B + 16 = 0$$

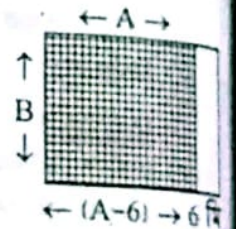
$$\text{বা, } B = -16$$

গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ বাহুর

দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

তখন, B এর মান (ii) নং সমীকরণে বসাই,

$$A = 10 + 6$$



$$\text{নতুবা } B - 10 = 0$$

$$\text{বা, } B = 10$$

$$\therefore B = 10$$

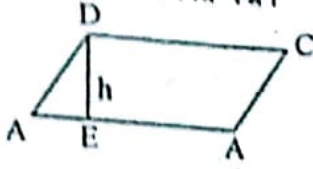
= 16 মিটার।

নির্ণেয় সামান্তরিকের দৈর্ঘ্য = 16 মিটার
এবং প্রস্থ = 10 মিটার।

একটি সামান্তরিকের ভূমি উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ এবং ক্ষেত্রফল 363 বর্গ ইঞ্চি হলে, ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি,
সামান্তরিকের উচ্চতা = x
ভূমি = $\frac{3}{4}x$



আমরা জানি,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি \times উচ্চতা

$$\text{বা, } 363 = x \times \frac{3}{4}x$$

$$\text{বা, } 363 = \frac{3}{4}x^2$$

$$\text{বা, } \frac{3}{4}x^2 = 363$$

$$\text{বা, } 3x^2 = 363 \times 4$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{363 \times 4}{3}$$

$$\text{বা, } x^2 = 484$$

$$\text{বা, } x = \sqrt{484}$$

$$\therefore x = 22$$

অর্থাৎ, সামান্তরিকের উচ্চতা = 22

$$\text{এক ভূমি} = \frac{3}{4} \times 22$$

$$= \frac{33}{2}$$

$$= 16.5$$

\therefore নির্ণেয় সামান্তরিকের উচ্চতা = 22 মিটার

এবং ভূমি = 16.5 মিটার

একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে। বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABCD একটি সামান্তরিক

এর ভূমি, AB = 125 মিটার

এর উচ্চতা, DE = 5 মিটার

\therefore সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি \times উচ্চতা

$$= AB \times DE$$

$$= 125 \times 5 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$= 625 \text{ বর্গ মিটার}$$

অতএবে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 625 বর্গ মিটার

ধরি, বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু = x মিটার

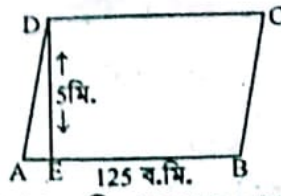
তাহলে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $x \times x$ বর্গ মিটার

$$= x^2 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\therefore x^2 = 625$$

$$\text{বা, } x = \sqrt{(25)^2}$$

$$\therefore x = 25 \text{ মিটার}$$



আবার, ধরি, PMNO একটি বর্গক্ষেত্র। PMNO বর্গের P এবং N বিন্দু যোগ করি। এখন $\triangle PMN$ -এ $\angle PMN = 90^\circ$ এবং PN অতিভুজ।

$$\therefore \text{পীথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী, } PN^2 = PM^2 + MN^2$$

$$\text{বা, } PN^2 = (25)^2 + (25)^2$$

[\because বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহু সমান সেক্ষেত্রে PM = MN = 25 মিটার]

$$\text{বা, } PN^2 = 625 + 625 = 1250$$

$$\therefore PN^2 = \sqrt{1250}$$

$$= 35.35 \text{ মিটার}$$

\therefore বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = 35.35 মিটার (প্রায়)

অতএব, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 35.35 মিটার (প্রায়)

৯। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে.মি. ও 26 সে.মি.। এর ক্ষুদ্রতর কর্ণটি 28 সে.মি. হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

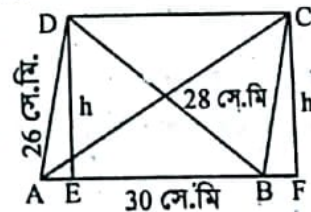
সমাধান: ধরি, ABCD একটি সামান্তরিক

দেয়া আছে, AB = DC = 30 সে.মি.

AD = BC = 26 সে.মি.

কর্ণ, BD = 28 সে.মি.

অপর কর্ণ, AC = ?



$\therefore \triangle ABD$ এর পরিসীমা, $2s = (AB + BD + AD)$ একক

$$\text{বা, } 2s = (30 + 28 + 26) \text{ সে.মি.}$$

$$\text{বা, } s = \frac{84}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore s = 42 \text{ সে.মি.}$$

$\therefore \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \sqrt{s(s-AB)(s-BD)(s-AD)} \dots \dots (i)$$

এখন, (i) নং সমীকরণে s, AB, BD এবং AD এর মান বসিয়ে পাই,

$$\sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \sqrt{42 \times 12 \times 14 \times 16} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \sqrt{7 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2 \times 7 \times 4 \times 4} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \sqrt{7^2 \times 6^2 \times 4^2 \times 2^2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 7 \times 6 \times 4 \times 2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 336 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার, $\triangle ABD$ এর ভূমি, AB = 30 সে.মি. এবং উচ্চতা,

DE = 3 (কমি)

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা} \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times DE \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times h \end{aligned}$$

কিন্তু ΔABD এর ক্ষেত্রফল = 336 বর্গ সে.মি.

$$\therefore \frac{1}{2} \times 30 \times h = 336$$

$$\text{বা, } 15h = 336$$

$$\text{বা, } h = \frac{336}{15}$$

$$\therefore h = 22.40 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{উচ্চতা, DE} = \text{CF} = 22.40 \text{ সে.মি.}$$

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ CBF হতে পাই, $BC^2 = CF^2 + BF^2$

$$\text{বা, } (26)^2 = (22.40)^2 + (BF)^2$$

$$\text{বা, } (BF)^2 = (26)^2 - (22.40)^2$$

$$\text{বা, } BF^2 = (26)^2 - (22.40)^2$$

$$\text{বা, } BF^2 = 676 - 501.76$$

$$\text{বা, } BF^2 = 174.24$$

$$\therefore BF = \sqrt{174.24}$$

$$= 13.2 \text{ সে.মি.}$$

এখন, ΔACF হতে পাই, $AC^2 = AF^2 + CF^2$

$$\text{বা, } AC^2 = (30 + 13.2)^2 + (22.4)^2$$

$$= (43.2)^2 + (22.4)^2$$

$$= 1866.24 + 501.76$$

$$= 2368.00$$

$$\therefore AC = \sqrt{2368}$$

$$= 48.66 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

অতএব, সামান্তরিকটির অপর কর্ণের নির্ণয় দৈর্ঘ্য = 48.66 সে.মি. (প্রায়)।

১০। একটি রহস্যের পরিসীমা 180 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতর কর্ণটি 54 সে.মি.। এর অপর কর্ণ ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, ABCD একটি রহস্য। AC ও BD এর দুইটি কর্ণ পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখানে, রহস্যের পরিসীমা = 180 সে.মি.

ধরি, একটি কর্ণ, AC = 54 সে.মি.

$$\therefore \text{রহস্যটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \text{ বর্গ একক}$$

আমরা জানি, রহস্যের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$$\text{সুতরাং, } AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 54 = 27 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{এক BO} = \frac{1}{2} BD$$

আবার, রহস্যের বাহু চারটি সমান বলে,

$$AB = \frac{\text{বাহু বাহুর সমষ্টি}}{4} = \frac{\text{পরিসীমা}}{4} = \frac{180}{4} = 45 \text{ সে.মি.}$$

এখন, ABO সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $AB^2 = AO^2 + BO^2$

$$\text{বা, } (45)^2 = (27)^2 + \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$$

$$\text{বা, } 2025 = 27^2 + \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$$

$$\text{বা, } 1296 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$$

$$\text{বা, } (36)^2 = \left(\frac{1}{2} BD\right)^2$$

$$\text{বা, } 36 = \frac{1}{2} BD$$

$$\therefore BD = 72 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{রহস্যটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 54 \times 72 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 27 \times 72 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 1944 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অতএব, রহস্যটির অপর কর্ণের নির্ণয় দৈর্ঘ্য = 72 সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল = 1944 বর্গ সে.মি.।

১১। একটি ট্র্যাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অঙ্ক 1 সে.মি. এবং তাদের লম্ব দূরত্ব 24 সে.মি.। ট্র্যাপিজিয়াম দুইটির সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ মনে করি,

ট্র্যাপিজিয়ামের সমান্তরাল একটি বাহু x সে.মি.

\therefore " অপর " (x + 8) "

সমান্তরাল বাহু দুইটির লম্ব দূরত্ব h = 24 সে.মি.

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = (13 \times 24) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 312 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{1}{2} \times 24 (x + x + 8) = 312$$

$$\text{বা, } 2x + 8 = \frac{312}{12}$$

$$\text{বা, } 2x + 8 = 26$$

$$\text{বা, } 2x = 26 - 8$$

$$\text{বা, } 2x = 18$$

$$\text{বা, } x = \frac{18}{2}$$

$$\therefore x = 9$$

$$\therefore \text{ট্র্যাপিজিয়ামের সমান্তরাল একটি বাহু } x = 9 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{ " অপর " (x + 8) "$$

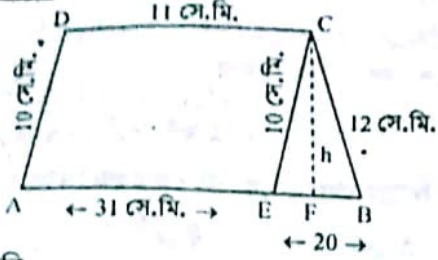
$$= (9 + 8) \text{ সে.মি.}$$

$$= 17 \text{ সে.মি.}$$

\therefore নির্ণয় ট্র্যাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. ও 17 সে.মি.

- ১২। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 31 সে.মি. ও 11 সে.মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সে.মি. ও 12 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি,

ABCD ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু AB থেকে DC এর সমান AE অংশ কাটি।

তাহলে, AE = CD = 11 সে.মি.

সুতরাং BE = AB - AE

$$= 31 - 11 \text{ সে.মি.}$$

$$= 20 \text{ সে.মি.}$$

এখন, Δ BEC এর CE = 10 সে.মি.

[∵ ABCE সামান্তরিকে AD = EC]

∴ Δ BEC এর অর্ধপরিসীমা, $S = \frac{CE + BE + BC}{2}$ একক

$$= \frac{10 + 20 + 12}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$= \frac{42}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$= 21 \text{ সে.মি.}$$

তাহলে, Δ BEC এর ক্ষেত্রফল,

$$= \sqrt{S(S - CE)(S - BE)(S - BC)} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \sqrt{21(21 - 10)(21 - 20)(21 - 12)} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \sqrt{21 \times 11 \times 1 \times 9}$$

$$= \sqrt{2079}$$

$$= 45.596 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার, CF, Δ BEC এর উচ্চতা,

$$\therefore \Delta ABEC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \text{ ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$

$$\text{বা, } 45.596 = \frac{1}{2} \times BE \times CF$$

$$\text{বা, } BE \times CF = 91.192$$

$$\text{বা, } CF = \frac{91.192}{BE}$$

$$\text{বা, } = \frac{91.192}{20}$$

$$\text{বা, } = 4.56 \text{ সে.মি.}$$

∴ ট্রাপিজিয়ামের উচ্চতা, CF = h = 4.56 সে.মি.

ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটি বাহু, a = 31 সে.মি. এবং অপর বাহু, B = 11 সে.মি.

$$\therefore \text{ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times (a + b) \times h \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times (31 + 11) \times 4.56 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

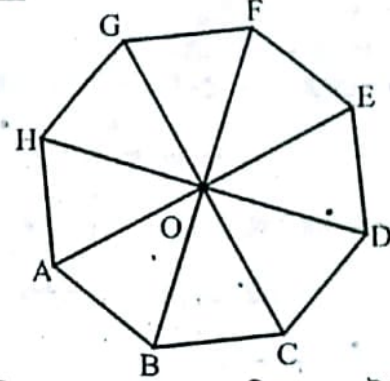
$$= \frac{1}{2} \times 42 \times 4.56 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 95.75 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

∴ নির্ণেয় ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল = 95.75 বর্গ সে.মি.

- ১৩। একটি সুস্থম অষ্টভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 1.5 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ABCDEFGH একটি সুস্থম অষ্টভুজ। এর কেন্দ্র O থেকে শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করা হলো। ফলে 8 টি সমান ক্ষেত্রবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

মনে করি,

O কেন্দ্র বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দুগুলোর দূরত্ব, a মিটার

এবং a = 1.5 মিটার

$$\therefore \Delta \text{ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(1.5)^2}{2\sqrt{2}}$$

$$= 0.7955 \text{ বর্গমিটার}$$

∴ সুস্থম অষ্টভুজের ক্ষেত্রফল = 8 × Δ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল

$$= 8 \times 0.7955 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$= 6.364 \text{ বর্গ মিটার}$$

- ১৪। আয়তাকার একটি ফুলের বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মিটার এবং প্রস্থ 100 মিটার। বাগানটিকে পরিচর্যা করার জন্য ঠিক মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর রাস্তা আছে।

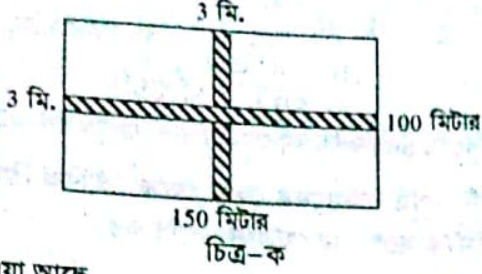
ক) উপরের তথ্যটি চিত্রের সাহায্যে সঙ্ক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

খ) রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) রাস্তাটি পাকা করতে 25 সে.মি. এবং 12.5 সে.মি. প্রস্থ বিশিষ্ট কয়টি ইটের প্রয়োজন।

সমাধান :

- ক) বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মি. এবং প্রস্থ 100 মি. এর মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।



- খ) দেওয়া আছে
বাগানের দৈর্ঘ্য = 150 মিটার
এবং বাগানের প্রস্থ = 100 মিটার
 \therefore বাগানের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ) বর্গ মিটার
= (150×100)
= 15000 বর্গ মিটার

আবার,
রাস্তাবাদে বাগানের দৈর্ঘ্য = $(150 - 3)$ মিটার
= 147
এবং " " প্রস্থ = $(100 - 3)$ মিটার
= 97

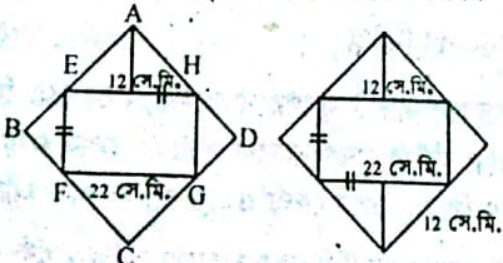
\therefore রাস্তাবাদে বাগানের ক্ষেত্রফল = (147×97) বর্গমিটার
= 14259

এখন, রাস্তার ক্ষেত্রফল = (বাগানের ক্ষেত্রফল - রাস্তাবাদে বাগানের ক্ষেত্রফল)
= $(15000 - 14259)$ বর্গমিটার
= 741

\therefore নির্ণেয় রাস্তার ক্ষেত্রফল = 741 বর্গ মিটার

- গ) দেয়া আছে,
ইটের দৈর্ঘ্য = 25 সে.মি.
এবং " প্রস্থ = 12.5 "
 \therefore ইটের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য \times প্রস্থ) বর্গ সে.মি.
= (25×12.5)
= 312.5
= $\frac{312.5}{100 \times 100}$ বর্গ মিটার
= 0.03125
 \therefore রাস্তাটি পাকা করতে ইটের প্রয়োজন = (রাস্তার ক্ষেত্রফল \div ইটের ক্ষেত্রফল)
= $(741 \div 0.03125)$ বর্গ মিটার
= 23712 টি ইট
= 23712 টি
 \therefore নির্ণেয় ইটের প্রয়োজন 23712 টি।

- ১৫। বহুভুজ চিত্রে তথ্য অনুসারে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান : মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রের অভ্যন্তরে EFGH বর্গক্ষেত্র রয়েছে।

EFGH বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য = 22 সে.মি. [চিত্র অনুসারে]
A বিন্দু হতে EH বাহুর দূরত্ব = 12 সে.মি.।

তাহলে C বিন্দু হতে FH বাহুর দূরত্বও 12 সে.মি. হবে।
সুতরাং AC কর্ণের দৈর্ঘ্য = $22 + 12 + 12$ সে.মি. = 46 সে.মি.

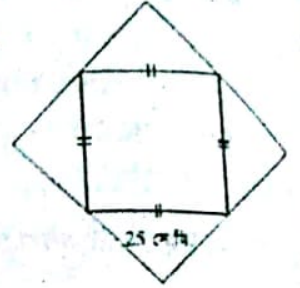
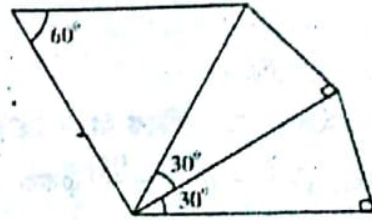
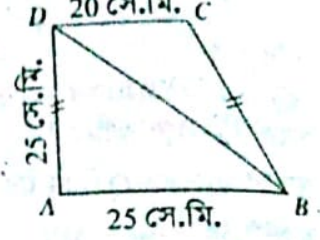
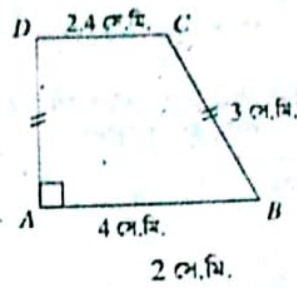
আমরা জানি, কর্ণ, $d = \sqrt{2}a$.
[যেখানে a = বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য]

$$\therefore a = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ একক} = \frac{46}{\sqrt{2}} \text{ সে.মি.} = 23\sqrt{2} \text{ সে.মি.}$$

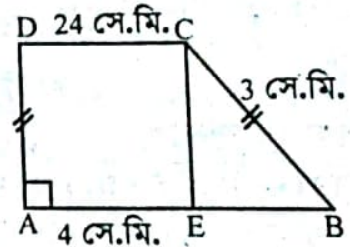
$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য} = 23\sqrt{2} \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{" ক্ষেত্রফল } a^2 \text{ বর্গ একক} \\ = (23\sqrt{2})^2 \text{ বর্গ সে.মি.} \\ = 1058 \text{ বর্গ সে.মি. (Ans.)}$$

- ১৬। নিচের চিত্রের তথ্য থেকে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান : ১ নং চিত্র :



এ চিত্রে C বিন্দু হতে $CE \perp AB$ আঁকি।

$\triangle ABC$ এ $\angle BEC = 90^\circ$

$$BE = AB - AE$$

$$= 4 - 2.4 \quad [\because AE = CD]$$

$$= 1.6 \text{ সে.মি.}$$

সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$CE^2 + BE^2 = BC^2$$

$$\text{বা, } CE^2 + (1.6)^2 = 3^2$$

$$\text{বা, } CE^2 = 9 - 2.56$$

$$= 6.44$$

$$\therefore CE = \sqrt{6.44} = 2.54$$

\therefore ADCE আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= AE \times CE$$

$$= (2.4 \times 2.54) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 6.096 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

\triangle ক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times BE \times CE$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 1.6 \times 2.54 \right) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 2.032 \text{ ব.সে.মি.}$$

∴ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

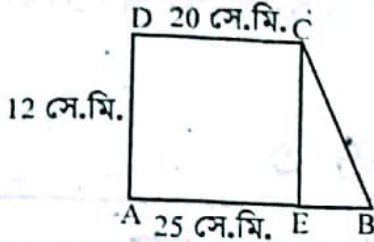
= ADCE আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্রে BCE এর ক্ষেত্রফল।

$$= (6.096 + 2.032) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 8.128 \text{ বর্গ সে.মি. (প্রায়)}$$

২ নং চিত্র :

ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের C থেকে AB এর উপর CE লম্ব অঙ্কন করি।



∴ ΔBCE এ $\angle CEB = 90^\circ$

∴ $BE = AB - AE$

$$= 25 \text{ সে.মি.} - 20 \text{ সে.মি.} [\because CD = AE = 20 \text{ সে.মি.}]$$

$$= 5 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{ADCE চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = CD \times AD$$

$$= (20 \times 12) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 240 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\text{আবার, } \Delta \text{ ক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times BE \times CE$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 12 \right) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 30 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \text{ADCE চতুর্ভুজ}$$

$$\text{ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} + \Delta \text{ ক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল}$$

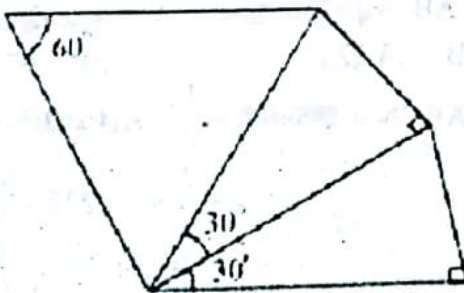
$$= (240 + 30) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 270 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অতএব, ২য় চিত্রের ক্ষেত্রফল 270 বর্গ সে.মি.

৩ নং চিত্র :

2 সে.মি.



৩য় চিত্রে, ΔAEC এ

$$\angle AEC = \angle EAC = \angle ACE = 60^\circ$$

$$\therefore AE = AC = EC = 2 \text{ সে.মি.}$$

∴ সমবাহু Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \quad [\because a = 2 \text{ সে.মি.}]$$

$$= \sqrt{3} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার, ΔABC এ

$$\angle ACB = 30^\circ \text{ এবং } AC = 2 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{বা, } \sin 30^\circ = \frac{AB}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{AB}{2}$$

$$\therefore AB = 1 \text{ সে.মি.}$$

$$\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{বা, } \cos 30^\circ = \frac{BC}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2}$$

$$\therefore BC = \sqrt{3} \text{ সে.মি.}$$

∴ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB [BC \perp AB]$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার,

ΔBCD এ $\angle BCD = 30^\circ$ এবং $BC = \sqrt{3}$ সে.মি.

$$\therefore \sin \angle BCD = \frac{BD}{BC}$$

$$\text{বা, } \sin 30^\circ = \frac{BD}{\sqrt{3}} \quad [\because BC = \sqrt{3}]$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{BD}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$\text{আবার, } \cos \angle BCD = \frac{CD}{BC}$$

$$\text{বা, } \cos 30^\circ = \frac{CD}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CD}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore CD = \frac{3}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

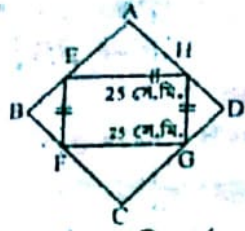
∴ Δ ক্ষেত্র BCD এর ক্ষেত্রফল $[\because BC \perp AB]$

$$= \frac{1}{2} \times CD \times BD$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 3.25 \text{ বর্গ সে.মি. (প্রায়)}$$

৪ নং চিত্র :



চিত্রে যেহেতু EFGH একটি বর্গক্ষেত্র সেহেতু ABCD চতুর্ভুজটিও একটি বর্গক্ষেত্র।

∴ Δ ক্ষেত্র DGH এ - ∠GDH = 90°

ধরি, DH = DG = a

∴ সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজক্ষেত্র GDH এ

$$DG^2 + DH^2 = GH^2$$

$$\text{বা, } a^2 + a^2 = (25)^2$$

$$\text{বা, } 2a^2 = (25)^2$$

$$\text{বা, } a^2 = \frac{(25)^2}{2}$$

$$\text{বা, } a = \frac{25}{\sqrt{2}}$$

$$\text{সুতরাং, } AD = DH + AH$$

$$= a + a \quad [\because DH = a = AH]$$

$$= 2a$$

$$\therefore \text{ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = (\text{বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য})^2 = (2a)^2$$

$$= 4 \left(\frac{25}{\sqrt{2}} \right)^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \frac{4 \times (25)^2}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 1250 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অতএব, ৪র্থ চিত্রটির ক্ষেত্রফল 1250 বর্গ সে.মি.

□ অনুশীলনী- ১৬.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ : একটি বৃত্তের পরিধি 440 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৬৮]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r মিটার

∴ বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ মিটার।

এবং ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

প্রশ্নমতে,

$$2\pi r = 440$$

$$\text{বা, } 2r = \frac{440}{\pi} = \frac{440}{3.1416} \text{ মিটার}$$

$$\text{বা, } 2r = 140.056 \text{ মিটার}$$

এখন, ΔABC সমকোণী

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\text{বা, } \sqrt{AB^2 + AB^2} = \sqrt{(140.056)^2} \quad [\because AB = BC]$$

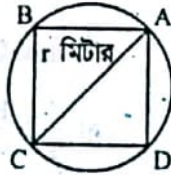
$$\text{বা, } \sqrt{2AB^2} = 140.056$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} AB = 140.056$$

$$\text{বা, } AB = \frac{140.056}{1.414}$$

$$\therefore AB = 99.0495 \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য} = 99.0495 \text{ মিটার}$$



সমাধান : এখানে, ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{\pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2}{2} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{\pi \times \left(\frac{20}{2} \right)^2}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \frac{3.1416 \times 10 \times 10}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 157.08 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = (20)^2 - (15)^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = 400 - 225$$

$$\text{বা, } AB^2 = 175$$

$$\text{বা, } AB = \sqrt{175}$$

$$\therefore AB = 13.228$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times AB \times BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 13.228 \times 15$$

$$= 99.215 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

∴ গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = ADC অর্ধবৃত্তের

ক্ষেত্রফল + ΔABC এর ক্ষেত্রফল

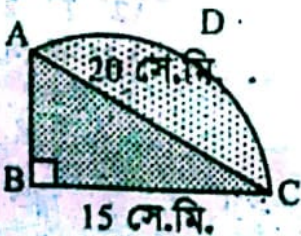
$$= (157.08 + 99.215) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 256.295 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

উত্তর : 256.295 বর্গ সে.মি.

□ কাজ : চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[পৃষ্ঠা-২৭০]



□ অনুশীলনী- ১৬.৩

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

- কাজ : একটি বৃত্তের পরিধি ৪৪০ মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৬৮]

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r মিটার

\therefore বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ মিটার।

এবং ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

প্রশ্নমতে,

$$2\pi r = 440$$

$$\text{বা, } 2r = \frac{440}{\pi} = \frac{440}{3.1416} \text{ মিটার}$$

$$\text{বা, } 2r = 140.056 \text{ মিটার}$$

এখন, $\triangle ABC$ সমকোণী

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\text{বা, } \sqrt{AB^2 + AB^2} = \sqrt{(140.056)^2} [\because AB = BC]$$

$$\text{বা, } \sqrt{2AB^2} = 140.056$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} AB = 140.056$$

$$\text{বা, } AB = \frac{140.056}{1.414}$$

$$\therefore AB = 99.0495 \text{ (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য} = 99.0495 \text{ মিটার}$$



- কাজ : চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৭০]



সমাধান : এখানে, ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{\pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{\pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \frac{3.1416 \times 10 \times 10}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 157.08 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার, $\triangle ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = (20)^2 - (15)^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = 400 - 225$$

$$\text{বা, } AB^2 = 175$$

$$\text{বা, } AB = \sqrt{175}$$

$$\therefore AB = 13.228$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times AB \times BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 13.228 \times 15$$

$$= 99.215 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল} = \text{ADC}$$

$$\text{ক্ষেত্রফল} + \triangle ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= (157.08 + 99.215) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 256.295 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\text{উত্তর : } 256.295 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

- ১। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

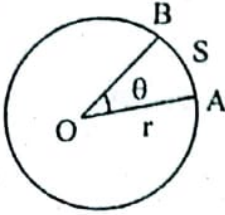
কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, 30°

বৃত্তের ব্যাস, $2r = 126$ সে.মি.

$$\therefore \text{ব্যাসার্ধ, } r = \frac{126}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$= 63 \text{ সে.মি.}$$

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $S = ?$



আমরা জানি, বৃত্তের কোণ চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ
এ বৃত্ত চাপের সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{S}{2\pi r}$$

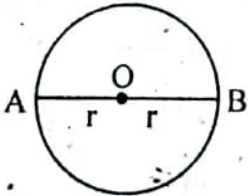
$$\text{বা, } S = \frac{2\pi r \theta}{360}$$

$$= \frac{2 \times 3.1416 \times 63 \times 30}{360}$$

$$= 32.987 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

- ২। প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি,

O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ $= r$ মিটার।

$$\therefore \text{ব্যাস, } AB = (r + r) \text{ মি.} = 2r \text{ মি.}$$

ঘোড়াটি 1 মিনিটে যায় = 66 মিটার

$$\therefore \text{ " } 1\frac{1}{2} \text{ বা } \frac{3}{2} \text{ " " } = \frac{66 \times 3}{2} \text{ "}$$

$$= 99 \text{ মিটার}$$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 99$

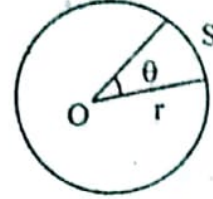
$$\text{বা, } 2r = \frac{99}{3.1416}$$

$$= 31.513 \text{ মিটার।}$$

\therefore নির্ণেয় মাঠের ব্যাস 31.513 মিটার।

- ৩। একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান:



দেয়া আছে,

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = 77 বর্গ মিটার

এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 21$ মিটার

উৎপন্ন কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360} \pi r^2$$

$$\text{বা, } 77 = \frac{\theta \times 3.1416 \times (21)^2}{360}$$

$$\text{বা, } \theta \times 3.1416 \times 441 = 360 \times 77$$

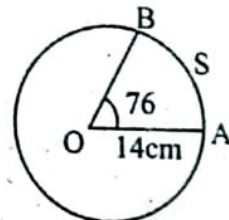
$$\text{বা, } \theta = \frac{27720}{1385.4456}$$

$$\therefore \theta = 20.008^\circ$$

\therefore নির্ণেয় উৎপন্ন কোণ, 20.008°

- ৪। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



দেয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 14$ সে.মি.

এবং বৃত্তচাপের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 76^\circ$

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = ?

আমরা জানি,

$$\text{বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{75 \times 3.1416 \times (14)^2}{360}$$

$$= \frac{46181.52}{360}$$

$$= 128.282$$

$$= 128.282 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

\therefore নির্ণেয় বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 128.282 বর্গ সে.মি.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

- ১। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

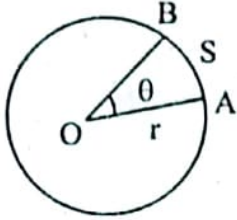
সমাধান : দেওয়া আছে,

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, 30°

বৃত্তের ব্যাস, $2r = 126$ সে.মি.

$$\therefore \text{ব্যাসার্ধ, } r = \frac{126}{2} \text{ সে.মি.} \\ = 63 \text{ সে.মি.}$$

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $S = ?$



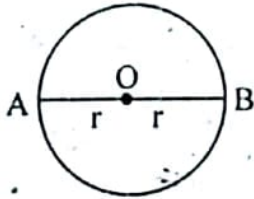
আমরা জানি, বৃত্তের কোণ চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ
এ বৃত্ত চাপের সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{S}{2\pi r}$$

$$\text{বা, } S = \frac{2\pi r \theta}{360} \\ = \frac{2 \times 3.1416 \times 63 \times 30}{360} \\ = 32.987 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

- ২। প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি,

O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ = r মিটার।

$$\therefore \text{ব্যাস, } AB = (r + r) \text{ মি.} = 2r \text{ মি.}$$

ঘোড়াটি 1 মিনিটে যায় = 66 মিটার

$$\therefore \text{ " } 1\frac{1}{2} \text{ বা } \frac{3}{2} \text{ " " } = \frac{66 \times 3}{2} \text{ " } \\ = 99 \text{ মিটার}$$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে পরিধি = $2\pi r$

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 99$

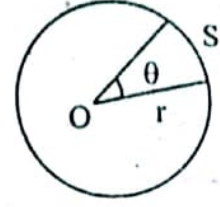
$$\text{বা, } 2r = \frac{99}{3.1416}$$

$$= 31.513 \text{ মিটার।}$$

\therefore নির্ণেয় মাঠের ব্যাস 31.513 মিটার।

- ৩। একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান :



দেয়া আছে,

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = 77 বর্গ মিটার

এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 21$ মিটার

উৎপন্ন কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$\text{বৃত্তকণার ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360} \pi r^2$$

$$\text{বা, } 77 = \frac{\theta \times 3.1416 \times (21)^2}{360}$$

$$\text{বা, } \theta \times 3.1416 \times 441 = 360 \times 77$$

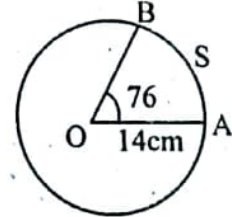
$$\text{বা, } \theta = \frac{27720}{1385.4456}$$

$$\therefore \theta = 20.008^\circ$$

\therefore নির্ণেয় উৎপন্ন কোণ, 20.008°

- ৪। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



দেয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 14$ সে.মি.

এবং বৃত্তচাপের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 76^\circ$

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = ?

আমরা জানি,

$$\text{বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ = \frac{75 \times 3.1416 \times (14)^2}{360}$$

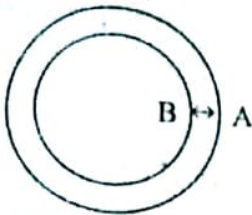
$$= \frac{46181.52}{360}$$

$$= 128.282$$

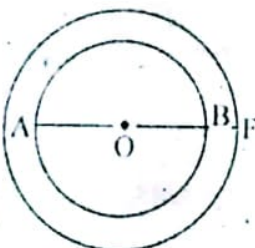
$$= 128.282 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

\therefore নির্ণেয় বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 128.282 বর্গ সে.মি.

સમાધાન :



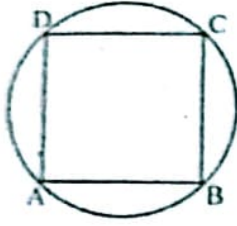
સમાધાન :



সমাধান :

বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r মিটার

এক ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

আমরা জানি,

বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 220$

বা, $2 \times 3.1416 \times r = 220$ [$\because \pi = 3.1416$]

বা, $r = \frac{220}{6.2832}$

$= 35.014$ মিটার

\therefore বৃত্তের ব্যাস, $AC = 2 \times 35.014$ মিটার
 $= 70$ মিটার

এখন, ΔABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ থেকে,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

বা, $AB^2 + AB^2 = AC^2$ [$\because BC = AB$]

বা, $2AB^2 = AC^2$

বা, $AC^2 = 2AB^2$

বা, $AC = \sqrt{2} AB$

বা, $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$

$\therefore AB = \frac{70.028}{\sqrt{2}}$

$= 49.5173$ মিটার

\therefore নির্ণেয় বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = 49.5173 মিটার

৯। একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমার সমান। এদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r

\therefore বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$

এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

প্রশ্নমতে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = $2\pi r$

\therefore সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \frac{2\pi r}{3}$

এখন, ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2\pi r}{3} \right)^2 \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4\pi^2 r^2}{9} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \pi^2 r^2}{9 \cdot 3}$$

$$= \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$$

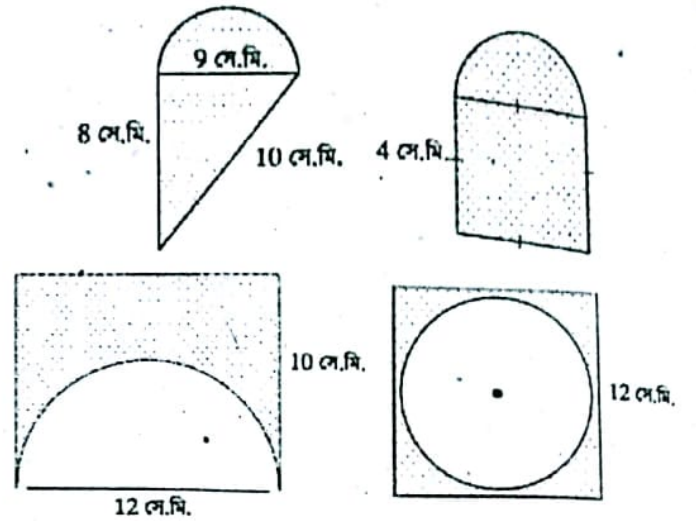
\therefore বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এর অনুপাত

$$= \pi r^2 : \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$$

$$= \left(1 : \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right)$$

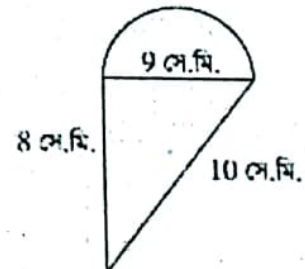
$$= 3\sqrt{3} : \pi \text{ (Ans.)}$$

১০। নিচের চিত্রের তথ্য অনুযায়ী গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান:

চিত্র-১:



ABCD এর ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ADE অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল
এখন,

$$ABC \text{ ত্রিভুজ এর অর্ধপরিসীমা, } s = \frac{AB + BC + AC}{2}$$

$$= \frac{9 + 10 + 8}{2}$$

$$= \frac{27}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$= 13.5 \text{ সে.মি.}$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-AC)}$$

$$= \sqrt{13.5(13.5-9)(13.5-10)(13.5-8)}$$

$$= \sqrt{13.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 5.5}$$

$$= \sqrt{1169.4375}$$

$$= 34.197 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

আবার,

ADB অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{9}{2}$ সে.মি. = 4.5 সে.মি.

ADB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \pi r^2$

$$= \frac{1}{2} \times 3.1416 \times (4.5)^2$$

$$= 31.808 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

এখন,

ABCD এর ক্ষেত্রফল = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল - ADB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

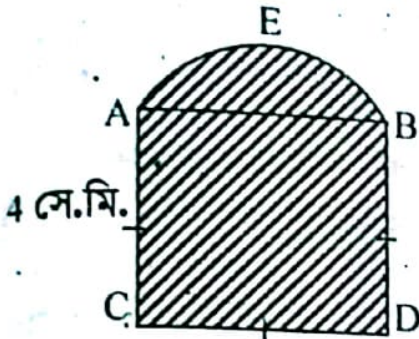
$$= 34.197 - 31.808$$

$$= 66.0057$$

$$\therefore \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল} = 66.0057 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

সি-২ :

সমাধান :



মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং a = 4 সে.মি.

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = a^2$$

আবার, ABE একটি অর্ধবৃত্ত।

$$\therefore \text{অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ } r = \frac{4}{2} = 2 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{সুতরাং অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \pi r^2$$

\therefore ABCDE সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল = ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AEB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$$= \left(a^2 + \frac{1}{2} \pi r^2 \right)$$

$$= \left\{ (4)^2 + \frac{1}{2} \times 3.1416 \times (2)^2 \right\}$$

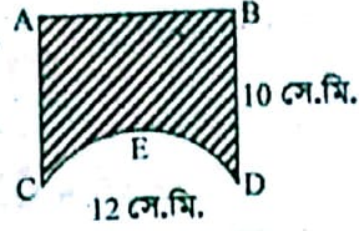
$$= 16 + 0.5 \times 3.1416 \times 4$$

$$= 22.283 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল } 22.283 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

সি-৩ :

সমাধান :



দেয়া আছে,

ABCD চতুর্ভুজের,

দৈর্ঘ্য, CD = 12 সে.মি.

প্রস্থ, BD = 10 সে.মি.

$$\therefore \text{ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} = \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}$$

$$= (12 \times 10) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 120 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

এখন, CED একটি অর্ধবৃত্ত।

$$\text{সুতরাং এর ব্যাসার্ধ, } r = \frac{12}{2} \text{ সে.মি.} = 6 \text{ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{CED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$= 0.5 \times 3.1416 \times (6)^2$$

$$= 56.55 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

অতএব, ACEDB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল = ABCD

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল - CED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

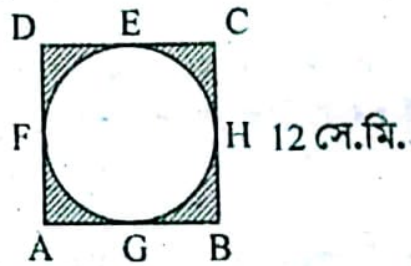
$$= (120 - 56.55) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 63.45 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল } 63.45 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

চিত্র-৪

সমাধান :



মনে করি,

ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

এর প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য, a = 12 সে.মি.

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = a^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= (12)^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 144 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\text{আবার, EFGH বৃত্তের ব্যাসার্ধ, } r = \frac{12}{2} \text{ সে.মি.}$$

$$= 6 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{এবং EFGH বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \pi r^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 3.1416 \times (6)^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 113.098 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল} = \text{ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$$= (144 - 113.098) \text{ বর্গ সে.মি.} = 30.902 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$\therefore \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল } 30.902 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

□ অনুশীলনী- ১৬.৪

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

- কাজ : তোমার গণিত বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মাপে এর আয়তন, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৭২]

সমাধান : আমার গণিত বইটি ফেল দিয়ে মাপে পাই,
 দৈর্ঘ্য $a = 26$ সে.মি.
 " " " প্রস্থ $b = 19$ সে.মি.
 " " " উচ্চতা $c = 1.5$ সে.মি.

$$\begin{aligned}\text{আয়তন} &= abc \text{ ঘন একক} \\ &= 26 \times 19 \times 1.5 \text{ ঘন সে.মি.} \\ &= 741 \text{ ঘন সে.মি.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{বইটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল} &= 2(ab + bc + ca) \text{ বর্গ সে.মি.} \\ &= 2(26 \times 19 + 19 \times 1.5 + 1.5 \times 26) \text{ বর্গ সে.মি.} \\ &= 2(494 + 28.5 + 39) \text{ বর্গ সে.মি.} \\ &= 1123 \text{ বর্গ সে.মি.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(26)^2 + (19)^2 + (1.5)^2} \\ &= 32.24 \text{ সে.মি. (প্রায়)}\end{aligned}$$

\therefore বইটির আয়তন 741 ঘন সে.মি., সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 1123 বর্গ সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 32.24 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

- কাজ : তিনটি ধাতব ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি.। ঘনক তিনটিকে গুলিয়ে একটি নতুন ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৭৩]

সমাধান : আমরা জানি, ঘনকের ধার a একক হলে,
 ঘনকের আয়তন $= a^3$ ঘন একক

$$\begin{aligned}\text{এবং ঘনকের কর্ণ} &= \sqrt{3}a \text{ একক} \\ \text{এখানে, নতুন ঘনকের আয়তন} &= (3^3 + 4^3 + 5^3) \text{ ঘন সে.মি.} \\ &= (27 + 64 + 125) \text{ ঘন সে.মি.} \\ &= 216 \text{ ঘন সে.মি.}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{নতুন ঘনকের ধার} = \sqrt[3]{216} \text{ সে.মি.} = 6 \text{ সে.মি.}$$

$$\begin{aligned}\text{আবার, নতুন ঘনকের কর্ণ} &= \sqrt{3}a \text{ সে.মি.} \\ &= \sqrt{3} \times 6 \text{ সে.মি.} \\ &= 10.392 \text{ সে.মি.}\end{aligned}$$

উত্তর : ধার 6 সে.মি. এবং কর্ণ 10.392 সে.মি. (প্রায়)।

- কাজ : একটি আয়তাকার কাগজের পাতা মোড়িয়ে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি কর। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের উচ্চতা, $h = 20$ সে.মি.

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = 10$ সে.মি.

$$\begin{aligned}\text{এবং সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল} &= 2\pi r(r + h) \text{ বর্গ একক} \\ &= 2 \times 3.1416 \times (10 + 20) \text{ বর্গ সে.মি.} \\ &= 2 \times 3.1416 \times 30 \\ &= 188.496 \text{ বর্গ সে.মি.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{আয়তন} &= \pi r^2 h \text{ ঘন একক} \\ &= 3.1416 \times (10)^2 \times 20 \text{ ঘন সে.মি.} \\ &= 6283.2 \text{ ঘন সে.মি.}\end{aligned}$$

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণসমূহ

উদাহরণ-১১ আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 25 সে.মি. 20 সে.মি. এবং 15 সে.মি.। এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল, আয়তন এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $a = 25$ সে.মি., প্রস্থ $b = 20$ সে.মি. এবং উচ্চতা $c = 15$ সে.মি.।

$$\begin{aligned}\therefore \text{আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল} &= 2(ab + bc + ca) \\ &= 2(25 \times 20 + 20 \times 15 + 15 \times 25) \text{ বর্গ সে.মি.} \\ &= 2350 \text{ বর্গ সে.মি.}\end{aligned}$$

$$\text{আয়তন} = abc = 25 \times 20 \times 15 \text{ ঘন সে.মি.}$$

$$\begin{aligned}&= 7500 \text{ ঘন সে.মি.} \\ \text{এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(25)^2 + (20)^2 + (15)^2} \text{ সে.মি.} \\ &= \sqrt{625 + 400 + 225} \text{ সে.মি.} \\ &= \sqrt{1250} \text{ সে.মি.} \\ &= 35.353 \text{ সে.মি. (প্রায়)}\end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 2350 বর্গ সে.মি., আয়তন 7500 ঘন সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 35.353 সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ- ২১ একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গমিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঘনকটির ধার a .

\therefore এর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$

প্রশ্নানুসারে, $6a^2 = 96$

বা, $a^2 = 16$

$\therefore a = 4$

\therefore ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times 4 = 6.928$ মিটার (প্রায়)

\therefore নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 6.928 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ- ৩১ একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 10 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. হলে, এর আয়তন এবং সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা, $h = 10$ সে.মি. এবং ভূমিকর ব্যাসার্ধ, $r = 7$ সে.মি.

\therefore এর আয়তন $= \pi r^2 h = 3.1416 \times 7^2 \times 10$ (ঘন সে.মি.)
 $= 1539.38$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

এবং সমাপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$

$= 2 \times 3.1416 \times 7(7 + 10)$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$= 747.7$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

উদাহরণ- ৪১ ঢাকনাসহ একটি বাজের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি. এবং ভেতরের সমগ্র বাজটির ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে.মি.। এর দেওয়ালের পুরুত্ব সমান হলে, বাজের বেধ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বাজের বেধ x

ঢাকনাসহ বাজের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি.

9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

\therefore বাজের ভেতরের মাপ যথাক্রমে $a = (10 - 2x)$, $b = (9 - 2x)$ ও $c = (7 - 2x)$ সে.মি.

\therefore বাজের ভেতরের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + bc + ca)$

প্রশ্নানুসারে, $2(ab + bc + ca) = 262$

বা, $(10 - 2x)(9 - 2x) + (9 - 2x)(7 - 2x) + (7 - 2x)(10 - 2x) = 131$

বা, $90 - 38x + 4x^2 + 63 - 32x + 4x^2 + 70 - 34x + 4x^2 - 131 = 0$

বা, $12x^2 - 104x + 92 = 0$

বা, $3x^2 - 26x + 23 = 0$

বা, $3x^2 - 3x - 23x + 23 = 0$

বা, $3x(x - 1) - 23(x - 1) = 0$

বা, $(x - 1)(3x - 23)(x - 1) = 0$

বা, $x - 1 = 0$ অথবা, $3x - 23 = 0$

বা, $x = 1$ বা, $x = \frac{23}{3} = 7.67$ (প্রায়)

কিন্তু বাজের বেধ এর দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ বা উচ্চতায় সমান অথবা বড় হতে পারে না।

$\therefore x = 1$

\therefore নির্ণেয় বাজের বেধ 1 সে.মি.।

উদাহরণ- ৫১ কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{2}$ সে.মি. হলে এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঘনকের ধার $= a$

\therefore ঘনকটির পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$

এবং আয়তন $= a^3$ ঘন একক।

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{2}a = 8\sqrt{2} \therefore a = 8$

\therefore ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times 8$ সে.মি.

$= 13.856$ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= 8^3$ ঘন সে.মি.

$= 512$ ঘন সে.মি.।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 13.856 সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 512 ঘন সে.মি.।

উদাহরণ- ৬১ কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরাতে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরাতে একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন আকৃতির ঘনবস্তু উৎপন্ন হবে, যার উচ্চতা $h = 12$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 5$ সে.মি.।

\therefore উৎপন্ন ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi r(r + h)$ বর্গ একক

$= 2 \times 3.1416 \times 5(5 + 12)$ বর্গ সে.মি.

$= 534.071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= \pi r^2 h$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 5^2 \times 12$ ঘন সে.মি.

$= 942.48$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

\therefore নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 534.071 বর্গ সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 942.48 ঘন সে.মি. (প্রায়)।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

- ১। একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৭ সে.মি., ৫ সে.মি. হলে, এর পরিসীমার অর্ধেক কত?

ক ১২ খ ২০
গ ২৪ ঘ ২৮

উত্তর : ক) ১২

- ২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ৬ সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক $3\sqrt{3}$ খ $4\sqrt{3}$
গ $6\sqrt{3}$ ঘ $9\sqrt{3}$

উত্তর : ঘ) $9\sqrt{3}$

- ৩। একটি ট্রাপিজিয়ামের উচ্চতা ৪ সে.মি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৯ সে.মি. ও ৭ সে.মি. হলে, তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক ২৪ খ ৬৪
গ ৯৬ ঘ ৫০৪

উত্তর : খ) ৬৪

- ৪। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

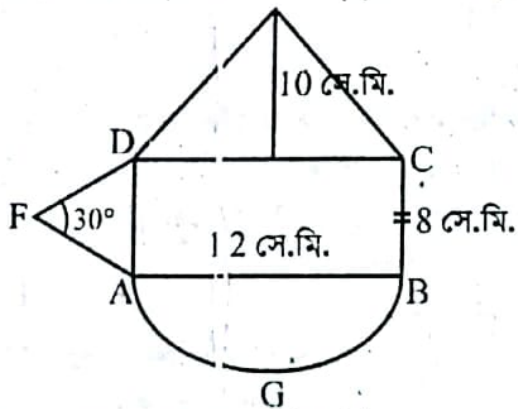
- ৪ সে.মি. বর্গাকার পাথরের পরিসীমা ১৬ সে.মি.
- ৩ সে.মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পাতের ক্ষেত্রফল 3π বর্গ সে.মি.
- ৫ সে.মি. উচ্চতা এবং ২ সে.মি. ব্যাসার্ধের বেলন আকৃতির ঘনবস্তুর আয়তন 20π ঘন সে.মি.

ওপরের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর : খ) i ও iii

- ৫। চিত্রের তথ্য অনুসারে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



- ৫। ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

ক ১৩ খ ১৪
গ ১৪.৪ প্রায় ঘ ১৫

উত্তর : গ) ১৪.৪ প্রায়

- ৬। ADF বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল কত?

ক ১৬ খ ৩২
গ ৬৪ ঘ ১২৮

উত্তর : ক) ১৬

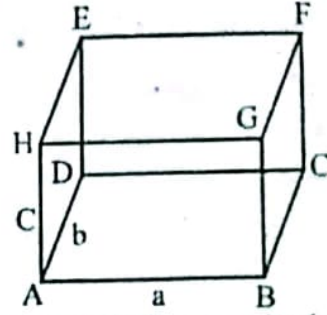
- ৭। AGB অর্ধবৃত্তের পরিধি কত?

ক ১৮ খ ১৮.৮৫ (প্রায়)
গ ৩৭.৭ (প্রায়) ঘ ৯৬

উত্তর : খ) ১৮.৮৫ (প্রায়)

- ৮। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে ১৬ মিটার, ১২ মিটার ও ৪.৫ মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $a = ১৬$ মিটার $b = ১২$ মিটার এবং $c = ৪.৫$ মিটার।

∴ আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$$= 2(ab + ca + bc) \text{ বর্গ একক}$$

$$= 2(১৬ \times ১২ + ৪.৫ \times ১৬ + ১২ \times ৪.৫) \text{ বর্গ একক}$$

$$= 2(১৯২ + ৭২ + ৫৪) \text{ বর্গ একক}$$

$$= 2 \times ৩১৮ \text{ বর্গ একক}$$

$$= ৬৩৬ \text{ বর্গ একক}$$

আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(১৬)^2 + (১২)^2 + (৪.৫)^2}$$

$$= \sqrt{২৫৬ + ১৪৪ + ২০.২৫}$$

$$= \sqrt{৪২০.২৫}$$

$$= ২০.৫ \text{ একক}$$

$$\text{আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন} = a \times b \times c$$

$$= ১৬ \times ১২ \times ৪.৫$$

$$= ৮৬৪ \text{ ঘন মিটার}$$

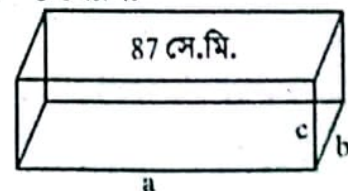
∴ নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ৬৩৬ বর্গ মিটার, কর্ণের দৈর্ঘ্য ২০.৫ মিটার এবং আয়তন ৮৬৪ ঘন মিটার।

- ৯। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত $২১:১৬:১২$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য ৮৭ সে.মি. হলে, ঘন বস্তুর তলের ক্ষেত্রফল।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য = a সে.মি.

প্রস্থ = b সে.মি.

এবং উচ্চতা = c সে.মি.



$$= (2500 \times 600 \times 30) \text{ সে.মি.}$$

$$= 45000000 \text{ সে.মি.}$$

আরও একটি ইটের দৈর্ঘ্য = 10 সে.মি.

প্রস্থ = 5 সে.মি.

পুরুত্ব বা উচ্চতা = 3 সে.মি.

$$\therefore \text{ইটের আয়তন} = (10 \times 5 \times 3) \text{ সে.মি.} \\ = 150 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{এখন, } 150 \text{ সে.মি.} = 1 \text{ টি ইট}$$

$$\therefore 1 \text{ " " " " } = \frac{1}{150} \text{ " " " "}$$

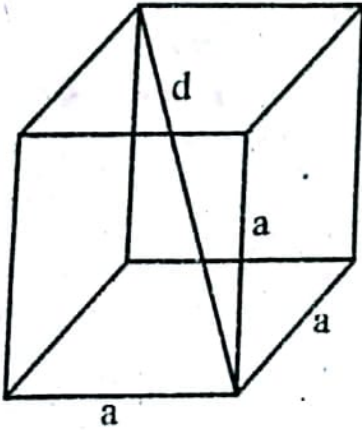
$$\therefore 45000000 \text{ " " " " } = \frac{1 \times 45000000}{150} \text{ " " " "}$$

$$= 300000 \text{ টি ইট।}$$

অতএব, দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা 300000 টি। (Ans.)

১৩। একটি ঘনক আকৃতি বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 2400 বর্গ সে.মি. হলে, এর বর্গের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $6a^2$ বর্গ একক যেখানে ঘনকের, দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক।



$$\therefore \text{কর্ণ} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \\ = \sqrt{3a^2} \\ = \sqrt{3}a$$

ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 2400 বর্গ সে.মি.

$$\therefore \text{প্রশ্নানুসারে } 6a^2 = 2400$$

$$\text{বা, } a^2 = \frac{2400}{6}$$

$$\text{বা, } a^2 = 400$$

$$\text{বা, } a^2 = 20^2$$

$$\therefore a = 20$$

$$\therefore \text{কর্ণ} = \sqrt{3} \times a$$

$$= \sqrt{3} \times 20$$

$$= 34.641 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

\therefore অতএব ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য 34.641 সে.মি. (প্রায়)
(Ans.)

১৪। 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বেলনের ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক।

তাহলে বেলনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(h + r)$ বর্গ একক।

এখানে, $r = 5$ সে.মি. এবং $h = 12$ সে.মি.

অতএব বেলনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2 \times 3.1416 \times 5 \times (12 + 5)$ বর্গ সে.মি.

$$= (2 \times 3.1416 \times 5 \times 17) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= 534.072 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন সে.মি.

$$= 3.1416 \times (5)^2 \times 12 \text{ ঘন সে.মি.}$$

$$= 3.1416 \times 25 \times 12 \text{ ঘন সে.মি.}$$

$$= 942.48 \text{ ঘন সে.মি.}$$

অতএব, সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 534.072 বর্গ সে.মি.।
এবং বেলনের আয়তন 942.48 বর্গ সে.মি.। (Ans.)

১৫। একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং এর আয়তন 150 ঘন সে.মি. বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ r সে.মি. এবং উচ্চতা h সে.মি.

তাহলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ ঘন সে.মি.

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন সে.মি.

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \pi r^2 h = 150 \text{ (i)}$$

$$\text{এবং } 2\pi rh = 100 \text{ (ii)}$$

$$(i) \div (ii) \text{ থেকে পাই,}$$

$$\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{150}{100}$$

$$\text{বা, } r = 3$$

$$\therefore \text{ভূমির ব্যাসার্ধ} = 3 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{সমীকরণ (ii) এ } r \text{ এর মান বসিয়ে পাই,}$$

$$2 \times 3.1416 \times 3 \times h = 100$$

$$\text{বা, } h = \frac{100}{2 \times 3.1416 \times 3} = 5.3052$$

$$\therefore \text{বেলনের উচ্চতা} = 5.3052 \text{ সে.মি.।}$$

অতএব, বেলনের উচ্চতা 5.3052 সে.মি.।
এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.। (Ans.)

১৬। একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 4400 বর্গ সে.মি. এর উচ্চতা 30 সে.মি. হলে; সমবৃত্তভূমিক সিলিডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ বর্গ একক

সমাধান: আমরা জানি, সমবৃত্তভূমিক সিলিডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ বর্গ একক

$$\text{প্রশ্নানুসারে } 2\pi rh = 4400$$

$$\text{বা, } r = \frac{4400}{2\pi h}$$

$$= \frac{4400}{2 \times 3.1416 \times 30} \quad [\because h = 30]$$

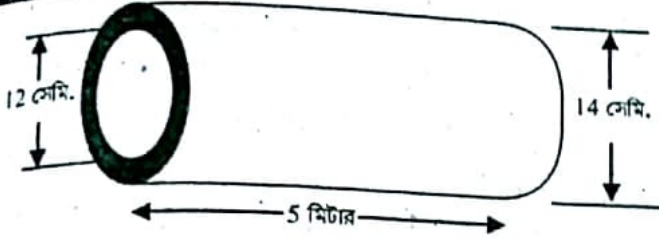
$$= \frac{4400}{188.496}$$

$$= 23.343 \text{ সে.মি.}$$

আবার সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(h + r)$ বর্গ একক
 $= 2 \times 3.1416 \times 23.343(30 + 23.343)$ বর্গ সে.মি.
 $= 146.6687 \times 53.343$ বর্গ সে.মি.
 $= 7823.75$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
 অতএব সিলিন্ডারের সমগ্রতল 7823.75 বর্গ সে.মি. (প্রায়)
 (Ans.)

১৭। একটি পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস 12 সে.মি. ও 14 সে.মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন 7.2 গ্রাম হলে, পাইপের লোহার ওজন কত?

সমাধান :



এখানে, পাইপের বাইরের ব্যাস = 14 সে.মি.

$$\therefore \text{পাইপের বাইরের ব্যাসার্ধ, } r_1 = \frac{14}{2} = 7 \text{ সে.মি.}$$

পাইপের ভেতরের ব্যাস = 12 সে.মি.

$$\therefore \text{পাইপের ভেতরের ব্যাসার্ধ, } r_2 = \frac{12}{2} = 6 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{পাইপের উচ্চতা, } h = 5 \text{ মিটার}$$

$$= 5 \times 100 \text{ সে.মি.}$$

$$= 500 \text{ সে.মি.}$$

আমরা জানি, পাইপের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

\therefore পাইপের বাইরের আয়তন $= \pi r_1^2 h$ ঘন একক

এবং পাইপের ভেতরের আয়তন $= \pi r_2^2 h$ ঘন একক

প্রশ্নানুসারে, লোহার আয়তন = পাইপের বাইরের আয়তন - পাইপের ভেতরের আয়তন

$$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$$

$$= \pi(r_1^2 - r_2^2) \times h$$

$$= \pi(7^2 - 6^2) \times 500 \quad [r_1 \text{ ও } r_2 \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= \pi(49 - 36) \times 500$$

$$= 3.1416 \times 13 \times 500$$

$$= 20420.4 \text{ ঘন সে.মি.}$$

দেওয়া আছে, 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন = 7.2 গ্রাম
 $\therefore 20420.4 \quad " \quad " \quad " = 7.2 \times 20420.4 \text{ গ্রাম}$

$$= 147026.88 \text{ গ্রাম}$$

$$= \frac{147026.88}{1000}$$

$$= 147.02688$$

$$= 147.027 \text{ কেজি (প্রায়)}$$

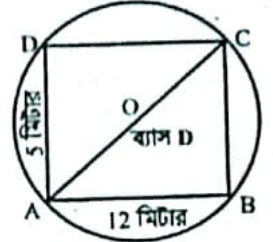
অতএব, পাইপের লোহার ওজন 147.027 কেজি (প্রায়)
 (Ans.)

১৮। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার। আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র আছে যেখানে আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা অনাধিকৃত অংশে ঘাস লাগানো হলো।

- ক) উপরের তথ্যের ভিত্তিতে সর্বাঙ্গীত বর্ণনাসহ চিত্র আঁক।
 খ) বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস নির্ণয় কর।
 গ) প্রতি বর্গমিটার ঘাস লাগাতে 50 টাকা খরচ হলে, মোট খরচ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABCD

একটি আয়তক্ষেত্র। যার দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও প্রস্থ 5 মিটার। এই আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র আছে। যার কেন্দ্র O. ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ হবে বৃত্তের ব্যাস। নির্ণয় চিত্রটি হলো



(খ) ক এর বর্ণনা অনুসারে বৃত্তটির ব্যাস হলো বৃত্তে অন্তর্নিহিত আয়তক্ষেত্রটির কর্ণ।

$$\therefore \text{আয়ত ক্ষেত্রটির কর্ণ} = \sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2}$$

$$= \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13 \text{ মিটার}$$

অতএব, বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস 13 মিটার।

(গ) বৃত্তটির ব্যাস 13 মিটার

$$\therefore \text{" ব্যাসার্ধ } \frac{13}{2} \text{ মিটার}$$

$$= 6.5 \text{ মিটার}$$

$$\therefore \text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \pi r^2$$

$$= \pi \times (6.5)^2$$

$$= 3.1416 \times 42.25$$

$$= 132.7326 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\text{আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}$$

$$= (12 \times 5) \text{ বর্গ মিটার}$$

$$= 60 \text{ বর্গ মিটার}$$

অতএব বৃত্তের অনাধিকৃত অংশের পরিমাণ $(132.7326 - 60)$ বর্গ মি.

$$= 72.7326 \text{ বর্গ মিটার}$$

এখন,

1 বর্গ মিটার ঘাস লাগাতে খরচ হয় 50 টাকা

$$\therefore 72.7326 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad (50 \times 72.7326) \text{ টাকা}$$

$$= 3636.63 \text{ টাকা}$$

অতএব মোট খরচ হবে 3636.63 টাকা। (Ans.)

১৯। $\triangle ABC$ ও $\triangle BCD$ একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত।

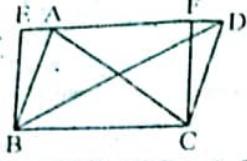
ক) উপরের বর্ণনা অনুসারে চিত্রটি আঁক।

খ) প্রমাণ কর যে \triangle ক্ষেত্র $ABC = \triangle$ ক্ষেত্র BCD ।

গ) \triangle ক্ষেত্র ABC এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যিক।)

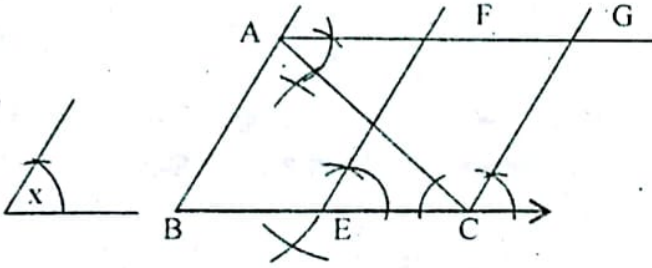
সমাধান :

ক) মনে করি, $\triangle ABC$ ও $\triangle BCD$ সবই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত। চিত্রটি হলো।



- খ) প্রমাণ করতে হবে Δ ক্ষেত্র $ABC = \Delta$ ক্ষেত্র BCD .
 অঙ্কন : BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে BE ও CF লম্ব অঙ্কন করি। এরা AD রেখার বর্ধিত অংশকে E বিন্দুতে এবং AD রেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করে। ফলে EBCF একটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়।
 প্রমাণ : EBCF একটি আয়তক্ষেত্র, এখন Δ ক্ষেত্র ABC এবং আয়তক্ষেত্র EBCF একই ভূমি BC এর উপর এবং BC ও ED সমান্তরাল রেখাংশের মধ্যে অবস্থিত।
 সুতরাং Δ ক্ষেত্র $ABC = \frac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র EBCF)
 অনুরূপভাবে, Δ ক্ষেত্র BCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র EBCF)
 $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র $ABC = \Delta$ ক্ষেত্র BCD (প্রমাণিত)

গ)



দেওয়া আছে, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। মনে করি, $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যেন ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC এর সমান হয়।

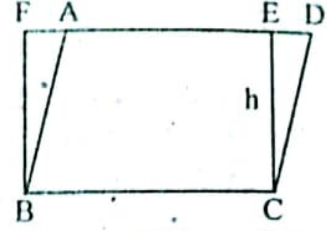
অঙ্কন : BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করি। EC রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CEF$ আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল A রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ECGF ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক যার ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর সমান। (প্রমাণিত)

২০। একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এবং একটি আয়তক্ষেত্র BCEF উভয়ের ভূমি BC.

- ক) একই উচ্চতা বিবেচনা করে সামান্তরিক ক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁক।
 খ) দেখাও যে ABCD ক্ষেত্রটির পরিসীমা BCEF ক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।
 গ) আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5:3 এবং ক্ষেত্রটির পরিসীমা 48 মিটার হলে, সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

- ক) একই উচ্চতা h বিবেচনা করে সামান্তরিক ক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁকা হলো—



- খ) সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
 হওয়ায়, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্র ও BCEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও CF এর মধ্যে অবস্থিত।
 আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।
 সুতরাং CDE সমকোণী ত্রিভুজ। CD, CDE সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হওয়ায় $CD > CE$
 এখন BCEF আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = $2(BC + CE)$
 $= 2BC + 2CE$
 এবং ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা = $2(BC + CD)$
 $= 2BC + 2CD$

যেহেতু $CD > CE$

$$\therefore 2BC + 2CD > 2BC + 2CE$$

অতএব ABCD ক্ষেত্রটির পরিসীমা $>$ BCEF ক্ষেত্রটির পরিসীমা (Showed)

- গ) দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5: এবং পরিসীমা 48 মিটার।

মনে করি, দৈর্ঘ্য $5x$ মিটার এবং প্রস্থ $3x$ মিটার

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } 2(5x + 3x) = 48$$

$$\text{বা, } 2(8x) = 48$$

$$\text{বা, } 16x = 48$$

$$\text{বা, } x = \frac{48}{16}$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য} = 5 \times 3 = 15 \text{ মিটার এবং প্রস্থ} = 3 \times 3 = 9 \text{ মিটার।}$$

আমরা জানি,

$$\text{সামান্তরিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$

$$\text{ক্ষেত্রফল} = (15 \times 9) \text{ বর্গ মিটার} \left[\begin{array}{l} \therefore \text{ভূমি} = \text{দৈর্ঘ্য} \\ \text{উচ্চতা} = \text{প্রস্থ} \end{array} \right]$$

$$= 135 \text{ বর্গ মিটার}$$

অতএব সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 135 বর্গ মিটার (Ans.)

□ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা-

- ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অঙ্কিত রেখা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অঙ্কিত রেখার সাহায্যে উপাত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপে সর্বাধিক পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সর্বাধিক পদ্ধতির সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অঙ্কিত রেখা লেখচিত্রের ব্যাখ্যা করতে পারবে।

MyMahbub.Com

যা মনে রাখতে হবে...



□ উপাত্তের উপস্থাপন : আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলোর বিন্যস্ত ও সারগিভূক্ত করা। আর উপাত্তসমূহের সারগিভূক্ত করা হলো উপাত্তের উপস্থাপন। আগের শ্রেণিতে আমরা উপাত্তসমূহ কীভাবে সারগিভূক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্তের সারগিভূক্ত করতে হলে প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়। এখানে বোঝার সুবিধার্থে নিচের উদাহরণের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার পদ্ধতির পুনরালোচনা করা হলো।

□ ক্রমযোজিত গণসংখ্যা :

পাঠ্যবইয়ের উদাহরণ ১ এর শ্রেণি ও ব্যবধান ধরে শ্রেণিসংখ্যা নির্ধারণ করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়েছে। উল্লিখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা ৩। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো $6^{\circ} - 8^{\circ}$ । এই শ্রেণির নিম্নসীমা 6° সে. এবং উচ্চসীমা 8° সে.। এই শ্রেণির গণসংখ্যা ১১।

দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ১৩। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা ১১ এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ১৩ যোগ করে পাই ২৪। এই ২৪ হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে ১১। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ২৪ এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে $24 + 9 = 33$, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এইভাবে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হয়। ওপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে উদাহরণ ১ এর তাপমাত্রার ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ :

তাপমাত্রা সেলসিয়াস	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$6^{\circ} - 8^{\circ}$	১১	১১
$8^{\circ} - 11^{\circ}$	১৩	$(11 + 13) = 24$
$12^{\circ} - 18^{\circ}$	৯	$(24 + 9) = 33$

□ বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক : পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। যেমন বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান শুধু পূর্ণসংখ্যা হয় তা বিচ্ছিন্ন চলক, যেমন উদাহরণ ২ এ ব্যবহৃত প্রাপ্ত নম্বর। তদানুরূপ জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক। আর যেসকল চলকের মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সে সকল চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। যেমন উদাহরণ ১-এ ব্যবহৃত তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্ত। এ ছাড়া বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি সর্বাধিক উপাত্তে যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা ব্যবহার করা যায়। তাই এগুলোর জন্য ব্যবহৃত চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। অবিচ্ছিন্ন চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যেকোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অনেক সময় শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণির উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির প্রকৃত নিম্নসীমা নির্ধারণ করা হয়। যেমন, উদাহরণ ১ এ প্রথম শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 7.5° ও 8.5° এবং দ্বিতীয় শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা 11.5° ও 12.5° ইত্যাদি।

□ উপাত্তের লেখচিত্র : আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণিভূক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভূক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভূক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বোঝার জন্য যেমন আরও সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সারণিভূক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। চম

শ্রেণি পর্যন্ত বিভিন্ন প্রকার লেখচিত্রের মধ্যে রেখাচিত্র ও আয়তলেখ সমন্বয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কীভাবে আঁকতে হয় তা দেখানো হয়েছে। এখানে কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ চিত্র ও অঙ্কিত রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

□ **গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon) :** ৮ম শ্রেণিতে আমরা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। এখানে কীভাবে প্রথমে অবচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ ঐকে তার গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়, তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

□ **কেন্দ্রীয় প্রবণতা :** সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও এর পরিমাপ সমন্বয়ে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। অর্থাৎ, মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যা খুব বেশি হয়। বহুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জীভূত হওয়ার এই প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো : (১) গাণিতিক গড় (২) মধ্যক এবং (৩) প্রচুরক।

□ **গাণিতিক গড় :** আমরা জানি, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। তবে উপাত্তসমূহের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তাহলে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সময়সাপেক্ষ, বেশ কঠিন ও তুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণিবিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

□ **শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় (সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি)**

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হলো সহজ।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের ধাপসমূহ –

১। শ্রেণিসমূহের মধ্যমান নির্ণয় করা

২। মধ্যমানসমূহ থেকে সুবিধাজনক কোনো মানকে আনুমানিক গড় (a) ধরা

৩। প্রত্যেক শ্রেণির মধ্যমান থেকে আনুমানিক গড় বিয়োগ করে তাকে শ্রেণি ব্যাপ্তি দ্বারা ভাগ করে ধাপ বিচ্যুতি

$$U = \frac{\text{মধ্যমান} - \text{আনুমানিক গড়}}{\text{শ্রেণি ব্যাপ্তি}} \text{ নির্ণয় করা}$$

৪। ধাপ বিচ্যুতিসমূহে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা

৫। বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা এবং এর সাথে আনুমানিক গড় যোগ করে কাক্ষিত গড় নির্ণয় করা।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h \text{ যেখানে, } \bar{x} = \text{নির্ণেয় গড়, } a = \text{আনুমানিক গড়, } f_i = i\text{-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, } u_i f_i = n\text{-তম শ্রেণির গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি } h = \text{শ্রেণি ব্যাপ্তি}$$

গুরুত্ব প্রদত্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় : অনেক ক্ষেত্রে অনুসন্ধানাধীন পরিসংখ্যানের চলকের সাংখ্যিক মান x_1, x_2, \dots, x_n বিভিন্ন কারণ/গুরুত্ব/ভার দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তের মান x_1, x_2, \dots, x_n এর সাথে এদের কারণ/গুরুত্ব/ভার w_1, w_2, \dots, w_n বিবেচনা করে গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়।

যদি n সংখ্যক উপাত্তের মান x_1, x_2, \dots, x_n হয় এবং এদের গুরুত্ব যদি w_1, w_2, \dots, w_n হয় তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

□ **মধ্যক :** ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোনো পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজালে যেসকল উপাত্ত সমান দুইভাগে ভাগ করে সেই মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক, আরও জেনেছি যে, যদি উপাত্তের সংখ্যা n হয় এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $(\frac{n}{2} + 1)$ তম

পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়। এখানে, সূত্র ব্যবহার না করে এবং ব্যবহার করে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা হয় তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

□ শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় :

যদি শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হয় n , তবে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের $\frac{n}{2}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\frac{n}{2}$ তম পদের মান বা

মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো $m = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_c}{f_m} \right) \times h$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n গণসংখ্যা, F_c মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণি ব্যাপ্তি।

□ প্রচুরক : চমক শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোনো উপাত্তে যে সংখ্যা সর্বাধিক বার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোনো উপাত্তে যদি কোনো সংখ্যাই একাধিকবার না থাকে তবে সেই উপাত্তের কোনো প্রচুরক নেই। এখানে কীভাবে সূত্র ব্যবহার করে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করতে হয় তাই আলোচনা করা হলো।

□ শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় :

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের সূত্র হলো :

প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$ যেখানে L প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান, f_1 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা-পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা, f_2 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা-পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h = শ্রেণি ব্যাপ্তি।

পাঠ্যবইয়ের কাজসমূহের সমাধান

□ কাজ-১ : তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত সকল শিক্ষার্থী দুইটি দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজনের (কেজিতে) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর। [পৃষ্ঠা-২৭৯]

সমাধান : আমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থী সংখ্যা ৬০। এদেরকে দুটি দলে বিভক্ত করে নাম দিই 'ক' দল ও 'খ' দল। তাদের ওজন কেজিতে দেওয়া হলো। এদের নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করি।

'ক' দল : ৪২, ৩৮, ৫১, ৪৪, ৫৬, ৪৫, ৪৩, ৪২, ৫৩, ৫৪, ৪৩, ৩৬, ৫৬, ৬২, ৪৯, ৩৯, ৪৭, ৬৪, ৪০, ৪১, ৫০, ৪৯, ৫৭, ৫২, ৪৯, ৫৩, ৪৮, ৫২, ৫৬, ৪৯।

এখানে, সর্বোচ্চ উপাত্ত = ৬৪
সর্বনিম্ন উপাত্ত = ৩৬
উপাত্তের পরিধি = $(৬৪ - ৩৬) + ১$
= ২৯

শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরা হলে শ্রেণি সংখ্যা $= \frac{২৯}{৫} = ৫.৮$ বা ৬

এখন, ৩৬ থেকে শুরু করে শ্রেণি ব্যবধান ৫ নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হলো।

ওজন (কেজি)	ট্যালি	গণসংখ্যা
৩৫ - ৩৯		৩
৪০ - ৪৪		৭
৪৫ - ৪৯		৭
৫০ - ৫৪		৭
৫৫ - ৫৯		৪
৬০ - ৬৪		২
		মোট = ৩০

'খ' দল : ৬১, ৬০, ৫৯, ৫৮, ৬৪, ৬৪, ৬৩, ৬১, ৫০, ৫৯, ৫৮, ৫৭, ৬৬, ৬৪, ৬৪, ৫৯, ৬৪, ৬৪, ৫৪, ৪৩, ৪২, ৪২, ৪৫, ৫০, ৪০, ৪৯, ৪৭, ৪৪, ৪০।
এখানে সর্বনিম্ন উপাত্ত ৪০

এবং সর্বোচ্চ উপাত্ত ৬৬

উপাত্তের পরিধি $= (৬৬ - ৪০) + ১ = ২৭$

শ্রেণি ব্যবধান যদি ৫ ধরা হয়,

তবে শ্রেণি সংখ্যা $= \frac{২৭}{৫} = ৫.৪$

∴ ৪০ থেকে শুরু করে শ্রেণিব্যাপ্তি ৫ ধরে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো।

শ্রেণিব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা
৪০ - ৪৪		৬
৪৫ - ৪৯		৩
৫০ - ৫৪		৩
৫৫ - ৫৯		৭
৬০ - ৬৪		১০
৬৫ - ৬৯		১
		মোট = ৩০

□ কাজ-২ : তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে অনূর্ধ্ব ৪০ জনের দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজন/উচ্চতা নিয়ে দলে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

সমাধান : আমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে ৪০ জনের দল গঠন করি। তাদের উচ্চতা নিচে সেন্টিমিটারে দেওয়া হলো। এদের নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো—

১৪২, ১৪৯, ১৩৮, ১৫০, ১৫১, ১৪৪, ১৫৬, ১৫৩, ১৪৫, ১৪৩, ১৪৬, ১৪২, ১৫৩, ১৫৪, ১৫০, ১৪৬, ১৪৩, ১৩৬, ১৪৮, ১৫৬, ১৬২, ১৪৯, ১৩৯, ১৪৭, ১৪৬, ১৫৪, ১৬৪, ১৪০, ১৪১, ১৭৪, ১৪৯, ১৫০, ১৪৯, ১৫৭, ১৫২, ১৪৯, ১৫৩, ১৪৮, ১৫২, ১৫৬।

প্রদত্ত উচ্চতাগুলোর সর্বনিম্ন উচ্চতা ১৩৬ এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা ১৭৮।

∴ ১৩৫ থেকে শুরু করে শ্রেণি বিস্তার ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো।

শ্রেণিব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
১৩৫ - ১৩৯		৩	৩
১৪০ - ১৪৪		৭	১০

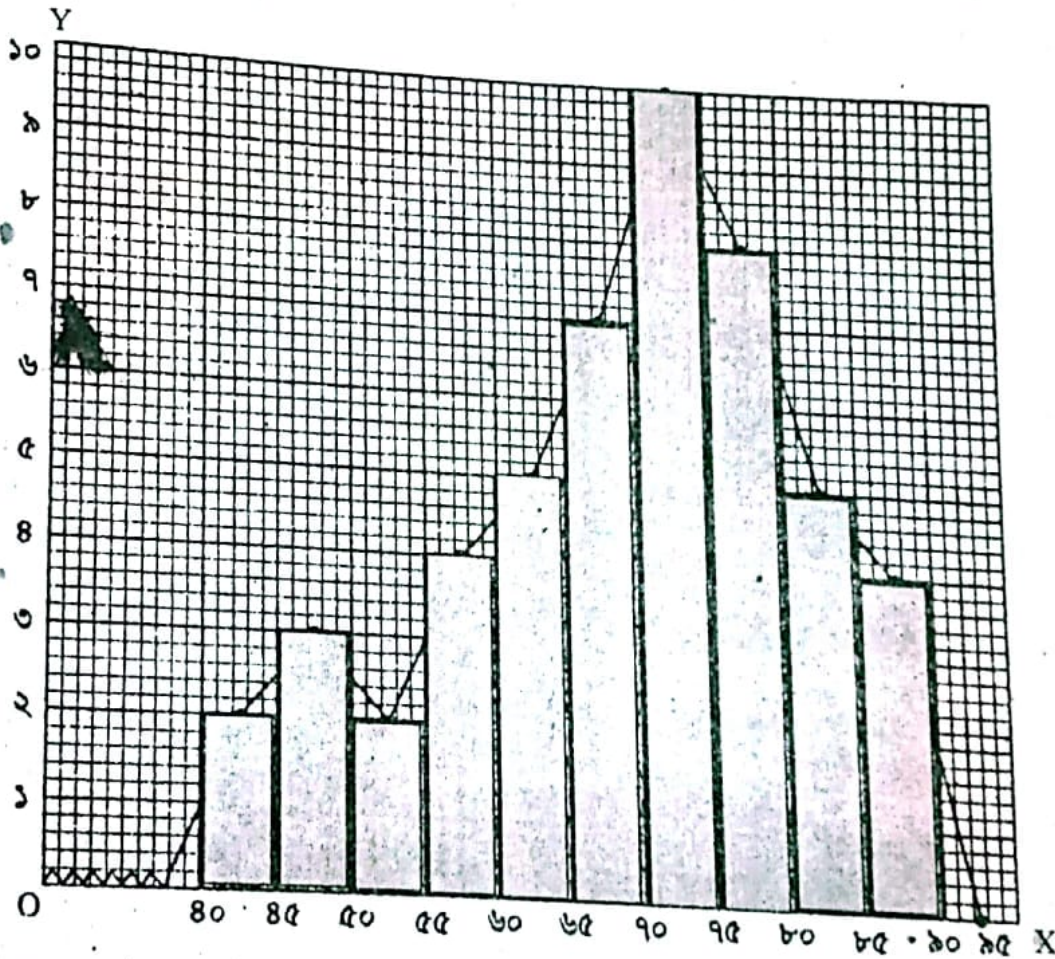
১৪৫ - ১৪৯		১২	২২
১৫০ - ১৫৪		১১	৩৩
১৫৫ - ১৫৯		৪	৩৭
১৬০ - ১৬৪		২	৩৯
১৬৫ - ১৬৯		০	৩৯
১৭০ - ১৭৪		১	৪০
		n = ৪০	

□ কাজ-৩: তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বরের নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

সমাধান: আমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত ৫০ জন শিক্ষার্থীর প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলা ১ম পত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন হলো নিম্নরূপ। গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো। [পৃষ্ঠা-২৮২]

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৪০-৪৪	৪৫-৪৯	৫০-৫৪	৫৫-৫৯	৬০-৬৪	৬৫-৬৯	৭০-৭৪	৭৫-৭৯	৮০-৮৪	৮৫-৮৯
গণসংখ্যা	২	৩	২	৪	৫	৭	১০	৮	৫	৪
মধ্যকিন্দু	৪২	৪৭	৫২	৫৭	৬২	৬৭	৭২	৭৭	৮২	৮৭

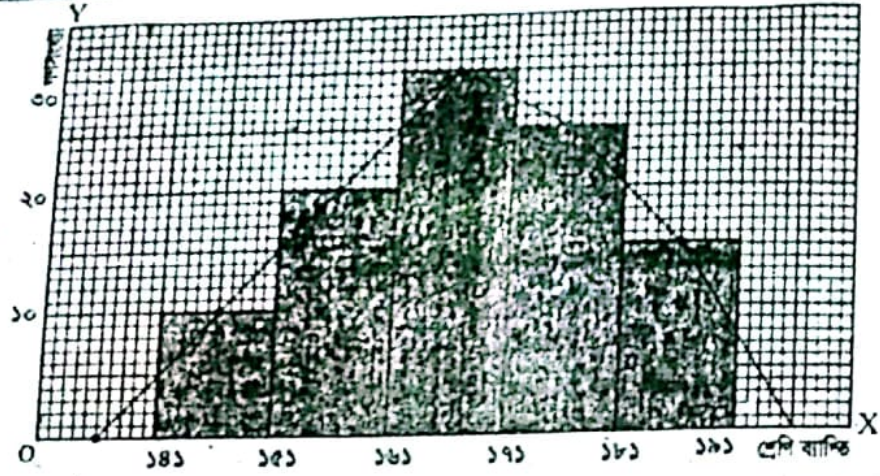
X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ৫ ঘরকে শ্রেণি ব্যাপ্তির ৫ একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতর ৫ ঘরকে গণসংখ্যার একক ধরে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁকা হলো। আয়তসমূহের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যকিন্দু চিহ্নিত করি। চিহ্নিত মধ্যকিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করি। প্রথম শ্রেণির প্রান্তকিন্দু ও শেষ শ্রেণির প্রান্তকিন্দু X-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকি।



□ কাজ-৪: ১০০ জন কলেজ ছাত্রের উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি.)	১৪১-১৫০	১৫১-১৬০	১৬১-১৭০	১৭১-১৮০	১৮১-১৯০
ছাত্রসংখ্যা	১০	২০	৩০	২৫	১৫

সমাধান: X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে গণসংখ্যার একক ধরে উপর্যুক্ত উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকি। [পৃষ্ঠা-২৮৩]

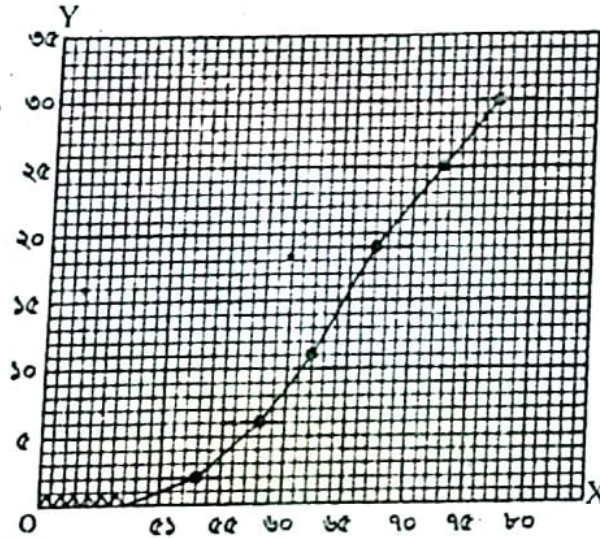


- কাজ-৫: কোনো এক পরীক্ষায় গণিতে তোমাদের শ্রেণির ৫০ ও তদপেক্ষা নম্বর প্রাপ্ত ৩০ জন শিক্ষার্থীদের নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং অঙ্কিত রেখা আঁক। [পৃষ্ঠা-২৮৪]

সমাধান: গত প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় গণিতে আমাদের শ্রেণির ৫০ ও তদপেক্ষা নম্বর প্রাপ্ত ৩০ জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। এ নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করে অঙ্কিত রেখা আঁকতে হবে।

শ্রেণিব্যাপ্তি	৫১-৫৫	৫৬-৬০	৬১-৬৫	৬৬-৭০	৭১-৭৫	৭৬-৮০
গণসংখ্যা	২	৪	৫	৮	৬	৫
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	২	৬	১১	১৯	২৫	৩০

X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ৫ ঘরকে শ্রেণিব্যাপ্তি এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার একক ধরে প্রদত্ত উপাস্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অঙ্কিত রেখা আঁকা হলো।



- কাজ-৬: তোমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি. পাসের হার ও তাদের সংখ্যা সংগ্রহ কর এবং পাসের গড় হার নির্ণয় কর। [পৃষ্ঠা-২৮৭]

সমাধান: আমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি. পাসের হার ও শিক্ষার্থীদের সংখ্যা সংগ্রহ করে নিচে দেওয়া হলো। পাসের গড় হার নির্ণয় করতে হবে।

স্কুলের নাম	এস.এস.সি. পাসের হার x_i	শিক্ষার্থীর সংখ্যা w_i	$x_i w_i$
চান্দিনা পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়	৮৫	১২০	১০২০০
চান্দিনা গার্লস স্কুল	৮০	৮০	৬৪০০
মাধাইয়া ছাদিম উচ্চ বিদ্যালয়	৭৫	১১০	৮২৫০
মহিচাইল উচ্চ বিদ্যালয়	৮২	২০০	১৬৪০০
কুটমপুর উচ্চ বিদ্যালয়	৯০	২৫০	২২৫০০
বাখরাবাদ উচ্চ বিদ্যালয়	৮৮	১৫০	১৩২০০
$\sum w_i = ৯১০$			$\sum x_i w_i = ৭৬৯৫০$

$$\text{পাসের গড় হার, } \bar{x}_w = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \frac{৭৬৯৫০}{৯১০} = ৮৪.৫৬$$

∴ নির্ণেয় পাসের গড় হার ৮৪.৫৬

কাজ-৭:

১। তোমাদের শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং কোনো সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় কর।

[পৃষ্ঠা-২৮৮]

সমাধান: আমাদের শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করতে হবে এবং সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

ভাদের উচ্চতা নিচে দেওয়া হলো—

১৫০, ১৫০, ১৬০, ১৭০, ১৫০, ১৭৫, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৭৫, ১৬০, ১৫০, ১৬৫, ১৫০, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৭০, ১৬৫, ১৫০, ১৬৫, ১৫০, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৬৫, ১৭৫, ১৭০, ১৭৫, ১৬০, ১৫৫, ১৪০, ১৪৫, ১৪০, ১৪৫, ১৪০, ১৪৫, ১৫০, ১৬০, ১৬৫, ১৭০, ১৬৫।

মধ্যক নির্ণয়ের গণসংখ্যা সারণি :

উচ্চতা সে.মি.	১৪০	১৪৫	১৫০	১৫৫	১৬০	১৬৫	১৭০	১৭৫
গণসংখ্যা	৪	৪	৮	২	৯	১০	৭	৫
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৪	৮	১৬	১৮	২৭	৩৭	৪৪	৪৯

এখানে $n = ৪৯$ যা বিজোড় সংখ্যা।

$$\therefore \text{মধ্যক} = \frac{৪৯ + ১}{২} \text{ তম পদের মান}$$

$$= ২৫ \text{ তম পদের মান}$$

$$= ১৬০$$

\therefore নির্ণেয় মধ্যক ১৬০ সে.মি.

২। পূর্বের সমস্যা থেকে ৯ জনের উচ্চতা বাদ দিয়ে ৪০ জনের উচ্চতার (সে.মি.) মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান:

উচ্চতা সে.মি.	১৪০	১৪৫	১৫০	১৫৫	১৬০	১৬৫	১৭০
গণসংখ্যা	৪	৪	৮	২	৯	১০	৩
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৪	৮	১৬	১৮	২৭	৩৭	৪০

এখানে, $n = ৪০$ যা জোড় সংখ্যা

$$\text{মধ্যক} = \frac{\frac{৪০}{২} \text{ তম ও } \left(\frac{৪০}{২} + ১\right) \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{২}$$

$$= \frac{২০ \text{ তম পদ ও } ২১ \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{২} = \frac{১৬০ + ১৬০}{২}$$

\therefore নির্ণেয় মধ্যক ১৬০ সে.মি.

□ কাজ-৮ : তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমস্যা সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর।

[পৃষ্ঠা-২৮৯]

সমাধান: আমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থী সংখ্যা ৬০। এদেরকে ৩০ জন করে দুইটি দলে ভাগ করে একটির নাম দেই 'পদ্মা' ও অন্যটির নাম 'মেঘনা'।

ক) 'পদ্মা' দলের ৩০ জন শিক্ষার্থীর একটি সমস্যা সমাধানে যে সময় (সেকেন্ড) লেগেছিল তা নিচে দেওয়া হলো—

৪২, ৪৫, ৬০, ৬১, ৫৮, ৫৩, ৪৮, ৫২, ৫১, ৪৯, ৪৩, ৫২, ৫৭, ৫১, ৬৪, ৪৯, ৫৬, ৪৮, ৬৭, ৬৩, ৭০, ৫৯, ৫৪, ৪৬, ৪৩, ৫৬, ৬৯, ৪৩, ৬৮, ৪২।

এখানে সর্বনিম্ন উপাত্ত ৪২ এবং সর্বোচ্চ উপাত্ত ৭৩।

$$\therefore \text{পরিসর} = ৭৩ - ৪২ + ১ = ৩২$$

$$\text{শ্রেণি ব্যাপ্তি} = ৫$$

$$\therefore \text{শ্রেণিসংখ্যা} = \frac{৩২}{৫} = ৬.৪ \approx ৭$$

৪০ থেকে শুরু করে ৫ শ্রেণি ব্যাপ্তি ধরে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হলো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪০ - ৪৪		৪	৪
৪৫ - ৪৯		৭	১১
৫০ - ৫৪		৬	১৭

৫৪৮

মাধ্যমিক গণিত

৫৫ - ৫৯		৫	২২
৬০ - ৬৪		৪	২৬
৬৫ - ৬৯		৩	২৯
৭০ - ৭৪		১	৩০
		n = ৩০	

এখানে, $n = ৩০$ এবং $\frac{n}{2} = \frac{৩০}{2} = ১৫$ ।

∴ মধ্যক হলো ১৫ তম পদের মান। ১৫ তম পদের অবস্থান হবে (৫০ - ৫৪) শ্রেণিতে।

∴ মধ্যক শ্রেণি হলো (৫০ - ৫৪)

∴ $L = ৫০$, $F_c = ১১$, $f_m = ৬$ এবং $h = ৫$ ।

∴ মধ্যক = $L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

$$= ৫০ + \left(\frac{৩০}{2} - ১১\right) \times \frac{৫}{৬}$$

$$= ৫০ + ৪ \times \frac{৫}{৬}$$

$$= ৫০ + ৩.৩৩$$

$$= ৫৩.৩৩$$

খ) মেঘনা দলের ৩০ জন শিক্ষার্থীর একটি সমস্যা সমাধানে যে সময় (সেকেন্ড) লেগেছিল তা নিচে দেওয়া হলো।

৬২, ৭৪, ৪৫, ৭৯, ৫১, ৭৮, ৭৪, ৭০, ৭৩, ৭১, ৬৯, ৬৮, ৬৭, ৬৮, ৬৪, ৬৬, ৬৪, ৭৯, ৬৪, ৬৩, ৬৪, ৬২, ৬০, ৬১, ৫৯, ৬০, ৫৭, ৪৯, ৫০, ৪০।

এখানে সর্বনিম্ন উপাত্ত ৪০ এবং সর্বোচ্চ উপাত্ত ৭৯।

ধরি, শ্রেণি ব্যাপ্তি = ৫

$$\therefore \text{শ্রেণি সংখ্যা} = \frac{৪০}{৫} = ৮$$

∴ ৪০ থেকে শুরু করে ৫ শ্রেণি ব্যাপ্তি বিশিষ্ট সারণি তৈরি করা হলো—

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি	সংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪০ - ৪৪		১	১
৪৫ - ৪৯		২	৩
৫০ - ৫৪		২	৫
৫৫ - ৫৯		২	৭
৬০ - ৬৪		১০	১৭
৬৫ - ৬৯		৫	২২
৭০ - ৭৪		৫	২৭
৭৫ - ৭৯		৩	৩০
		n = ৩০	

এখানে, $n = ৩০$ এবং $\frac{n}{2} = \frac{৩০}{2} = ১৫$

∴ মধ্যক হলো ১৫ তম পদের মান। ১৫ তম পদের অবস্থান হবে (৬০ - ৬৪)

∴ $L = ৬০$, $F_c = ৭$, $f_m = ১০$ এবং $h = ৫$

∴ মধ্যক = $L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

$$= ৬০ + \left(\frac{৩০}{2} - ৭\right) \times \frac{৫}{১০}$$

$$= ৬০ + ৮ \times \frac{৫}{১০} = ৬৪$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সমাধান

১. উত্তরে টিক (✓) চিহ্ন দাও :

- নিচের কোনটি দ্বারা শ্রেণি ব্যাপ্তি বোঝায়?
- ক উপাস্তসমূহের মধ্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম উপাস্তের ব্যবধান
 - খ উপাস্তসমূহের মধ্যে প্রথম ও শেষ উপাস্তের ব্যবধান
 - গ প্রত্যেক শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার পার্থক্য
 - ঘ প্রত্যেক শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যার সমষ্টি

২. উপাস্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাস্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি?

- ক শ্রেণি সীমা
- খ শ্রেণির মধ্যবিন্দু
- গ শ্রেণি সংখ্যা
- ঘ শ্রেণির গণসংখ্যা

৩. পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাস্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাস্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি গুঞ্জীভূত হয়। উপাস্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়?

- ক প্রচুরক
- খ কেন্দ্রীয় প্রবণতা
- গ গড়
- ঘ মধ্যক

নিচের পরিসংখ্যানের প্রেক্ষিতে ৪-৬ পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।
শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের ১০ দিনের তাপমাত্রার (সেন্টিগ্রেড) পরিসংখ্যান হলো

১০°, ৯°, ৮°, ৬°, ১১°, ১২°, ৭°, ১৩°, ১৪°, ৫°।

৪. ওপরের সংখ্যাসূচক উপাস্তের প্রচুরক কোনটি?

- ক ১২°
- খ ৫°
- গ ১৪°
- ঘ প্রচুরক নেই

৫. ওপরের সংখ্যাসূচক উপাস্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি?

- ক ৮°
- খ ৮.৫°
- গ ৯.৫°
- ঘ ৯°

৬. উপাস্তসমূহের মধ্যক কোনটি?

- ক ৯.৫°
- খ ৯°
- গ ৮.৫°
- ঘ ৮°

৭. সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাস্তের সংখ্যা হলো n , মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L , মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F , মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা f_m এবং শ্রেণি ব্যাপ্তি h । এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র?

$$ক \quad L + \left(\frac{n}{2} - F_c \right) \times \frac{h}{f_m}$$

$$খ \quad L + \left(\frac{n}{2} - f_m \right) \times \frac{h}{F_m}$$

$$গ \quad L - \left(\frac{n}{2} - F_c \right) \times \frac{h}{f_m}$$

$$ঘ \quad L - \left(\frac{n}{2} - f_m \right) \times \frac{h}{F_m}$$

নিচের সারণি থেকে (৮-১৭) পর্যন্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :
নিচে তোমাদের স্কুলের ৮ম শ্রেণি শেষে সমাপনী পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি দেওয়া হলো।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৩১-৪০	৪১-৫০	৫১-৬০	৬১-৭০	৭১-৮০	৮১-৯০	৯১-১০০
গণসংখ্যা	৬	১২	১৬	২৪	১২	৮	২
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৬	১৮	৩৪	৫৮	৭০	৭৮	৮০

৮. উপাস্তসমূহ কয়টি শ্রেণিতে বিন্যস্ত করা হয়েছে?

- ক ৬
- খ ৭
- গ ৮
- ঘ ৯

৯. সারণিতে উপস্থাপিত উপাস্তের শ্রেণি ব্যাপ্তি কত?

- ক ৫
- খ ৯
- গ ১০
- ঘ ১৫

১০. ৪র্থ শ্রেণির মধ্যমান কত?

- ক ৭১.৫
- খ ৬১.৫
- গ ৭০.৫
- ঘ ৭৫.৬

১১. উপাস্তের মধ্যক শ্রেণি কোনটি?

- ক ৪১-৫০
- খ ৫১-৬০
- গ ৬১-৭০
- ঘ ৭১-৮০

১২. মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা কত?

- ক ১৮
- খ ৩৪
- গ ৫৮
- ঘ ৭০

১৩. মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা কত?

- ক ৪১
- খ ৫১
- গ ৬১
- ঘ ৭১

১৪. মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা কত?

- ক ১৬
- খ ২৪
- গ ৩৪
- ঘ ৫৮

১৫. উপস্থাপিত উপাস্তের মধ্যক কত?

- ক ৬৩
- খ ৬৩.৫
- গ ৬৫
- ঘ ৬৫.৫

১৬. উপস্থাপিত উপাস্তের প্রচুরক কত?

- ক ৬১.৪
- খ ৬১
- গ ৭০
- ঘ ৭০.৪

১৭। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৪৯ জন শিক্ষার্থীর ওজন (কিলোগ্রাম) হলো-

৪৫, ৫০, ৫৫, ৫১, ৫৬, ৫৭, ৫৬, ৬০, ৫৮, ৬০, ৬১, ৬০, ৬২, ৬০, ৬৩, ৬৪, ৬০, ৬১, ৬৩, ৬৬, ৬৭, ৬১, ৭০, ৭০, ৬৮, ৬০, ৬৩, ৬১, ৫০, ৫৫, ৫৭, ৫৬, ৬৩, ৬০, ৬২, ৫৬, ৬৭, ৭০, ৬৯, ৭০, ৬৯, ৬৮, ৭০, ৬০, ৫৬, ৫৮, ৬১, ৬৩, ৬৪।

ক) শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

খ) সারণি থেকে সঙ্ক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় কর।

গ) গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপিত উপাস্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

সমাধান:

ক) শিক্ষার্থীদের সর্বোচ্চ ওজন = ৭০ কিলোগ্রাম

" সর্বনিম্ন " = ৪৫ "

∴ পরিসর = (৭০ - ৪৫) + ১ = ২৬

∴ শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে শ্রেণিসংখ্যা = $\frac{২৬}{৫} = ৫.২$

অতএব, শ্রেণিসংখ্যা হবে ৬টি

শিক্ষার্থীদের ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
৪৫ - ৪৯	I	১
৫০ - ৫৪	III	৩
৫৫ - ৫৯	III III I	১১
৬০ - ৬৪	III III III III II	২২
৬৫ - ৬৯	III II	৭
৭০ - ৭৪	III	৫
	মোট	৪৯

খ) 'ক' থেকে প্রাপ্ত গণসংখ্যা সারণি থেকে সঞ্চিষ্ট পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণিব্যাপ্তি	মধ্যমান	গণসংখ্যা	ধাপ পদ্ধতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা \times ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
৪৫ - ৪৯	৪৭	১	-৩	-৩
৫০ - ৫৪	৫২	৩	-২	-৬
৫৫ - ৫৯	৫৭	১১	-১	-১১
৬০ - ৬৪	৬২ ← a	২২	০	০
৬৫ - ৬৯	৬৭	৭	১	৭
৭০ - ৭৪	৭২	৫	২	১০
	মোট =	৪৯		-৩

$$\therefore \text{গড়, } \bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$$

$$= 62 + \frac{(-3)}{49} \times 5$$

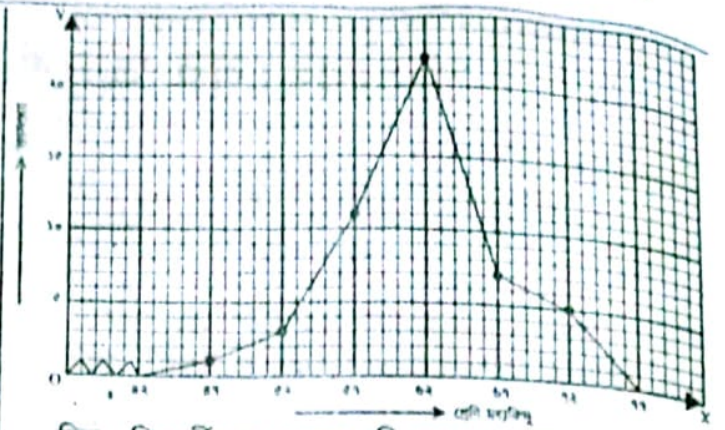
$$= 62 - 0.3061$$

$$= 61.69 \text{ কিলোগ্রাম (প্রায়)}$$

গ) গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনের জন্য প্রয়োজনীয় সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণিমধ্যকিন্দু	গণসংখ্যা
৪৫ - ৪৯	৪৭	১
৫০ - ৫৪	৫২	৩
৫৫ - ৫৯	৫৭	১১
৬০ - ৬৪	৬২	২২
৬৫ - ৬৯	৬৭	৭
৭০ - ৭৪	৭২	৫

ছক কাগজে X-অক্ষ বরাবর প্রতি ঘরকে এক একক ধরে শ্রেণি মধ্যকিন্দু এবং Y-অক্ষ বরাবর প্রতি ঘরকে এক একক ধরে গণসংখ্যা নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হয়েছে। মূলকিন্দু থেকে ৭২ পর্যন্ত সংখ্যাগুলো বিদ্যমান বোঝাতে X-অক্ষে ভাঙা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।



চিত্র : শিক্ষার্থীদের ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা বহুভুজ

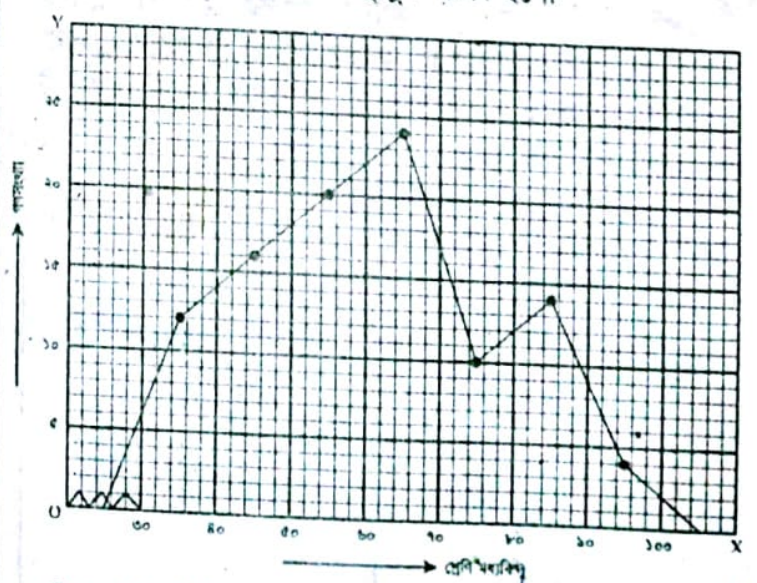
১৮। ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

শ্রেণিব্যাপ্তি	৩১-৪০	৪১-৫০	৫১-৬০	৬১-৭০	৭১-৮০	৮১-৯০	৯১-১০০
গণসংখ্যা	৬	৮	১০	১২	৫	৭	২

সমাধান: এখানে প্রদত্ত উপাত্তসমূহ বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যকিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক। শিক্ষার্থীদের গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো—

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যকিন্দু	গণসংখ্যা
৩১ - ৪০	৩৫.৫	৬
৪১ - ৫০	৪৫.৫	৮
৫১ - ৬০	৫৫.৫	১০
৬১ - ৭০	৬৫.৫	১২
৭১ - ৮০	৭৫.৫	৫
৮১ - ৯০	৮৫.৫	৭
৯১ - ১০০	৯৫.৫	২

গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন : X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যকিন্দু ২ একক ধরে এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ২ ঘরকে গণসংখ্যার ১ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো—



চিত্র : শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা বহুভুজ।

১৯। কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সাময়িক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো-

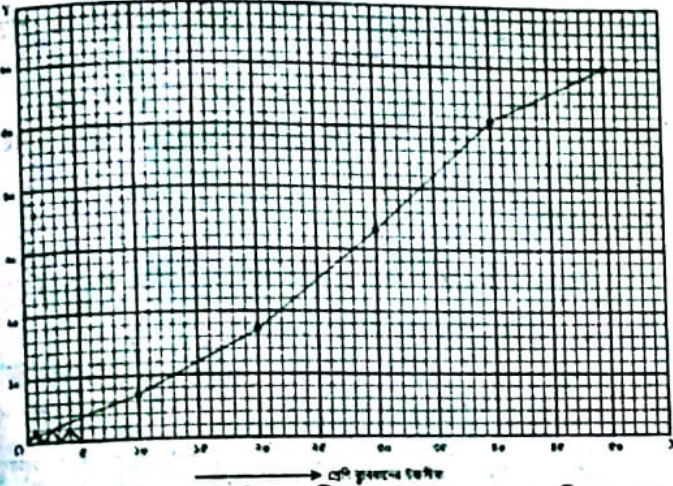
প্রাপ্ত নম্বর	১-১০	১১-২০	২১-৩০	৩১-৪০	৪১-৫০
গণসংখ্যা	৭	১০	১৬	১৮	৯

উপাত্তের অঙ্কিত রেখা আঁক।

সমাধান: শিক্ষার্থীদের সাময়িক পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
১-১০	৭	৭
১১-২০	১০	১৭
২১-৩০	১৬	৩৩
৩১-৪০	১৮	৫১
৪১-৫০	৯	৬০

অঙ্কিত রেখা অঙ্কন : X-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমার একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতিটি ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার ২ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের অঙ্কিত রেখা আঁকা হলো-



চিত্র : শিক্ষার্থীদের সাময়িক পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের অঙ্কিত রেখা

২০। নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	৪৫	৫০	৫৫	৬০	৬৫	৭০
গণসংখ্যা	২	৬	৮	১৬	১২	৬

সমাধান: শিক্ষার্থীদের ওজনের মধ্যক নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় সারণি :

ওজন (কেজি)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
৪৫	২	২
৫০	৬	৮
৫৫	৮	১৬
৬০	১৬	৩২
৬৫	১২	৪৪
৭০	৬	৫০
n = ৫০		

এখন মধ্যক হবে, $\frac{n}{2} = \frac{৫০}{2}$ বা ২৫ তম পদ।

এখানে, ২৫ তম পদ রয়েছে ৪র্থ শ্রেণিতে।

সুতরাং মধ্যক ৬০

উত্তর : মধ্যক ৬০

২১। তোমাদের শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো-

ব্যাপ্তি	৪৫-৪৯	৫০-৫৪	৫৫-৫৯	৬০-৬৪	৬৫-৬৯	৭০-৭৪
গণসংখ্যা	৪	৮	১০	২০	১২	৬
যোজিত ফল	৪	১২	২২	৪২	৫৪	৬০

ক) উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় কর।

খ) উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান: শিক্ষার্থীদের ওজনের মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

প্রাপ্ত নম্বর	গণসংখ্যা	যোজিত ফল
৪৫ - ৪৯	৪	৪
৫০ - ৫৪	৮	১২
৫৫ - ৫৯	১০	২২
৬০ - ৬৪	২০	৪২
৬৫ - ৬৯	১২	৫৪
৭০ - ৭৪	৬	৬০
n = ৬০		

ক) মধ্যক = $L + \frac{n}{2} - F_c \times \frac{h}{f_m}$ এখানে, মোট গণসংখ্যা n = ৬০

$$= ৬০ + (৩০ - ২২) \times \frac{৫}{২০} = ৬০ + ২ = ৬২ \text{ কেজি}$$

যেহেতু ৩০ তম পদ (৬০ - ৬৪) শ্রেণিতে অবস্থিত। সুতরাং, মধ্যক শ্রেণি হলো (৬০ - ৬৪) এখানে, মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা, L = ৬০,

মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, $F_c = ২২$ মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা $f_m = ২০$ শ্রেণিব্যবধান, h = ৫

খ) প্রচুরক = $L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

$$= ৬০ + \frac{১০}{১০ + ৮} \times ৫$$

$$= ৬০ + \frac{১০}{১৮} \times ৫$$

$$= ৬০ + ২.৮ = ৬২.৮$$

∴ নির্ণেয় প্রচুরক ৬২.৮

যেহেতু, (৬০ - ৬৪) শ্রেণির গণসংখ্যা সবচেয়ে বেশি। সুতরাং, (৬০ - ৬৪) হলো প্রচুরক শ্রেণি L = ৬০ এখানে, প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা, L = ৬০, $f_1 = (২০ - ১০) = ১০$ $f_2 = (২০ - ১২) = ৮$ শ্রেণিব্যবধান, h = ৫

২২. উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুরক-

- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ
- সবচেয়ে বেশি বার উপস্থাপিত মান
- সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii

গ ii ও iii

খ i ও iii

ঘ i, ii, ও iii

২৩। কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ :

৭৬, ৬৫, ৯৮, ৭৯, ৬৪, ৬৮, ৫৬, ৭৩, ৮৩, ৫৭, ৫৫, ৯২, ৪৫, ৭৭, ৮৭, ৪৬, ৩২, ৭৫, ৮৯, ৪৮, ৯৭, ৮৮, ৬৫, ৭৩, ৯৩, ৫৮, ৪১, ৬৯, ৬৩, ৩৯, ৮৪, ৫৬, ৪৫, ৭৩, ৯৩, ৬২, ৬৭, ৬৯, ৬৫, ৫৩, ৭৮, ৬৪, ৮৫, ৫৩, ৭৩, ৩৪, ৭৫, ৮২, ৬৭, ৬২।

ক) প্রদত্ত তথ্যটির ধরন কিরূপ? কোনো নিবেশনে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে?

খ) উপর্যুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন তৈরি কর।

গ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) প্রদত্ত তথ্যটি একটি অবিন্যস্ত উপাত্ত।

একটি শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা ঐ শ্রেণিতে উপাত্তের যতগুলো মান অন্তর্ভুক্ত হয় তার সংখ্যা নির্দেশ করে।

খ) এখানে সর্বনিম্ন প্রাপ্ত নম্বর = ৩২

এবং সর্বোচ্চ প্রাপ্ত নম্বর = ৯৮

∴ পরিসর = (৯৮ - ৩২) + ১ = ৬৬ + ১ = ৬৭

শ্রেণিব্যাপ্তি ১০ ধরে শ্রেণি সংখ্যা = $\frac{৬৭}{১০} = ৬.৭ \approx ৭$

অর্থাৎ শ্রেণি সংখ্যা হবে ৭।

গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
৩০ - ৩৯		৩
৪০ - ৪৯		৫
৫০ - ৫৯		৭
৬০ - ৬৯		১৩
৭০ - ৭৯		১০
৮০ - ৮৯		৭
৯০ - ৯৯		৫
মোট		৫০

গ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় :

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
৩০ - ৩৯	৩৪.৫	৩	-৩	-৯
৪০ - ৪৯	৪৪.৫	৫	-২	-১০
৫০ - ৫৯	৫৪.৫	৭	-১	-৭
৬০ - ৬৯	৬৪.৫	১৩	০	০
৭০ - ৭৯	৭৪.৫	১০	১	১০
৮০ - ৮৯	৮৪.৫	৭	২	১৪
৯০ - ৯৯	৯৪.৫	৫	৩	১৫
মোট		৫০		$\frac{\sum f_i u_i}{n} = ১৩$

$$\therefore \text{গড়} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$$

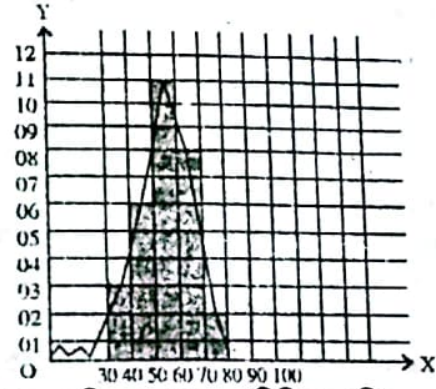
$$= ৬৪.৫ + \frac{১৩}{৫০} \times ১০$$

$$= ৬৪.৫ + ২.৬$$

$$= ৬৭.১০$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় গড় } ৬৭.১০$$

২৪।



ক) ওপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ) চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ) 'খ'-অংশে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেশনটির মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক) চিত্রে প্রথম শ্রেণিটি গড় মধ্যমান = $\frac{30 + 39}{2} = \frac{69}{2} =$

৩৪.৫ এবং শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা = ২

শ্রেণি ব্যাপ্তি	৩০-৩৯	৪০-৪৯	৫০-৫৯	৬০-৬৯	৭০-৭৯
গণসংখ্যা	৩	৫	৭	৮	২
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	৩	৯	১৬	২৪	২৬

গ) মধ্যক নির্ণয় : এখানে, $n = 30$ এবং $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

∴ মধ্যক হলো ১৫ তম পদের মান। ১৫ তম পদের অবস্থান হবে (৫০ - ৫৯) শ্রেণিতে।

∴ $L = 50, F_c = 9, f_m = 11$ এবং $h = 10$

$$\therefore \text{মধ্যক} = L + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_c}{f_m} \right) \times h = 50 + \left(\frac{\frac{30}{2} - 9}{11} \right) \times 10 = 50 + \frac{6 \times 10}{11} = 50 + 5.453 = 55.454$$

∴ নির্ণেয় মধ্যক ৫৫.৪৫ (প্রায়)



মাহবুব অর রশিদ
ইমু- 01836672102

BCS, BANK

অন্যান্য সরকারী চাকরির বই

ইসলামী বই

বোর্ড বই, গণিত সমাধান

আপডেট চাকরির প্রশ্নের সমাধান

প্রতি মাসের Current Affairs

আরো অনেক বই

ওয়াজ, গজল, ইসলামী সংগীত

এককথায় প্রয়োজনীয় সব এখানে পাবেনঃ

MyMahbub.Com

দয়া করে কেউ এই PDF টা Edit করবেন না
আমি "মাহবুব অর রশিদ" নিঃস্বার্থভাবে
নিজ পকেটের টাকা দিয়ে সাইট চালাই!

শুধু একটু দোয়া করবেন

নতুন মানুষের সাথে পরিচিত হতে খুবই পছন্দ করি!
আমার সাথে পরিচিত হতে বা বন্ধুত্ব করতে চাইলে ফেসবুকে নক দিন!!

facebook.com/mymahabub

সবসময় সর্বাবস্থায় মনে রাখবেনঃ

একটু গভীরভাবে ভেবে দেখুন ১ দিন যাচ্ছে মানেই-
আমাদের মৃত্যু আরো ১ দিন কাছে চলে আসলো
আজরাগিল (আঃ) একদিন আসবেই আসবে
আল্লাহর কাছে প্রতিটা দিনের হিসাব দিতেই হবে
অন্ততপক্ষে দৈনিক ৫ ওয়াক্ত নামাজ যাতে
কোনোভাবেই কোনোভাবেই মিস না হয়

সৃষ্টিকর্তার অস্তিত্ব বুঝতে চান!

এই মহাবিশ্ব, এতো হাজারো গ্রহ-নক্ষত্র এতোকিছু
কিভাবে এতো সুসূক্ষ্মভাবে নিজ কক্ষপথে ঘুরতেছে...?

অথবা নিজের দিকে তাকান

একটা জীবিত মানুষ আর একটা মৃত মানুষের মধ্য তুলনা করুন!
জীবিত মানুষের মাঝে এমন কি আছে যা মৃতের নাই!
নিশ্চয়ই "রুহ"

এই রুহ কোথায় যায়? কে নিয়ে যায়...?

নিশ্চয়ই আজরাইল আঃ নিয়ে যায়!

আপনার শরীরে কতো শক্তি

কিন্তু মৃত্যুর সাথেসাথে সব বিকল!!

এই রহস্যর পিছনে কেউ একজন আছেন।

তিনিই আল্লাহ রাব্বুল আলামিন

যিনি সর্বশক্তিমান, পালনকর্তা।

যাকে যতোদিন হায়াত দেন সে কেবল ততোদিনই দুনিয়ায় থাকতে পারে
এর বেশি ১ দিনও নয়

আল্লাহকে চিনার জন্য, জানার জন্য
মুহাম্মদ সাঃ কে দুনিয়ায় পাঠিয়েছেন

মুহাম্মদ সাঃ অশিক্ষিত ছিলেন (দুনিয়ার দিক থেকে)

কিন্তু তার উপরই নাজিল করলেন অলৌকিক কুরআন
কুরআন যে সর্বশক্তিমান আল্লাহর বাণী

১৫০০ বছরেও যার একটা ভুল বের করা সম্ভব হয়নি!

মুহাম্মদ সাঃ কোনো কাল্পনিক চরিত্র নয়!

তিনি আরবের মঙ্গায় জন্মগ্রহণ করেছিলেন!

মুহাম্মদ সাঃ জীবনে অনেক অলৌকিক ঘটনা দেখিয়েছেন

যার ছোঁয়ায় সব অমুসলিম মুসলিম হয়ে গেছিলো!

একমাত্র তাঁর আদর্শই মুক্তির আদর্শ

অন্য আদর্শ মেনে দুনিয়ায় গর্ব করতে পারেন

কিন্তু আখিরাতে কি জবাব দিবেন....?

মুহাম্মদ সাঃ এর সুপারিশ ব্যতীত কেউ জাহান্নামে যেতে পারবে না

তাই আমাদের উচিত তাঁর আদর্শ বাস্তবায়ন করা

দুনিয়ার সব প্রধানমন্ত্রী, সব MP, সব চাকরিজীবী, সব রিকশাচালক
আপনি, আমি দুনিয়ার প্রত্যেকটা মানুষ যে যাই করতেছি
সব.....ই কিন্তু মৃত্যুর দিকেই দৌড়াচ্ছি

দুনিয়াতে বিখ্যাত হয়ে কি করবেন.....?

কোটি কোটি টাকা কি করবেন.....?

কয়দিন পর সব শেষ, একবারে সব শেষ
একটু চিন্তা করেন তো আজ রাতে যদি আপনি মারা যান
তাহলে কি উপায় হবে.....?

আপনি বুদ্ধ হয়ে মরবেন কে বলছে?

বুদ্ধ হয়ে মরলেও এই যুবক বয়সের হিসাব কে দিবে??

দেখেন আজকের দিনে ও কতো মানুষ মারা গেছে।

এর মধ্য তো আপনি আমি হতে পারতাম

সকালে সুস্থ ব্যক্তি রাতে মাটির নিচে চলে যায়!

মারা গেলে সবাই ব্যস্ত হয়ে যায় কতো তাড়াতাড়ি কবর দিবে!

কেউ বাজারে যায় কাপড় আনতে, কেউবা কবর খুঁড়ে!

তাড়াতাড়ি গোসল দিয়েই অন্ধকার কবরে রেখে আসবে

আপনার আমার রুহ স্রষ্টার কাছে ফিরে যাবেই!

এই রুহ দিয়েই আবার আগের মতন আমাদের বানানো হবে

অনেক বড় জব করবেন?

বড় ব্যবসা করবেন?

কোটি কোটি টাকা ইনকাম করবেন?

জীবনে কিছু করতে পারেন বা না পারেন

অফিসার হন বা রিকশাচালক হন

মন্ত্রী হন বা বস্তির মানুষ হন

আগামী ২০০ বছর পর আপনার আমার নাম ও থাকবে না!

আমরা সবাই কালের গর্ভে হারিয়ে যাবো |

তার মানে কোটিপতি হওয়া বা নেতা হওয়া

বা বাড়ি-গাড়ির মালিক হওয়ার মাঝে কোনোই স্বার্থকতা নেই!

বাড়ি-গাড়ি, টাকা-পয়সা, স্ত্রী-সন্তান সব

সবকিছুই দুনিয়ায় পড়ে থাকবে, আপনি থাকতে পারবেন না!

তাহলে কি দরকার এসব করার?

হ্যাঁ, দুনিয়ায় বেঁচে থাকার প্রয়োজনে এগুলো লাগে

কিন্তু সারাক্ষণ একটা জিনিস মাথায় রাখতে হবে

আমরা মৃত্যুর দিকে যাচ্ছি, অখিরাত আমাদের মূল টার্গেট

এই যে আমার লেখাগুলো পড়লেন কি হইছে জানেন?
আপনার জীবন থেকে ২/৪ মিনিট চলে গেলো!
কারণ আপনাকে আমাকে নির্দিষ্ট হায়াত দিয়ে পাঠানো হইছে!
তার থেকে ১ মিনিট ও বেশি দেওয়া হবে না
তার মানে প্রতিটা মিনিট কতো গুরুত্বপূর্ণ!
তাই চলতে, ফিরতে, হাঁটতে, বসতে, শুইতে
মানে যখনি সময় পান আল্লাহর প্রিয় তাসবীহ পড়ুন
সুবহানআল্লাহ, আলহামদুলিল্লাহ, আল্লাহ আকবার
লা ইলাহা ইল্লাল্লাহ

যতো পড়বেন ততো লাভ, যতো পড়বেন ততোই লাভ
যদি আমরা বৃদ্ধ হই! তাহলে আফসোস করবো
কেয়ামতের মাঠে তো আফসোসের সীমাই থাকবে না
নিজেকে নিজে বলবো ইস যদি আর একটাবার সুবহানআল্লাহ পড়তাম!!
যদি আর একটাবার "আল্লাহ আকবার" পড়তাম!
যদি ওইদিন অলসতা না করে নামাজপাঠ পড়তাম!
অনেকে কাঁদতে কাঁদতে চোখের জল শেষে রক্তে সব ভেসে যাবে
কিন্তু কোনো আফসোস বিন্দুমাত্র কাজে লাগবে না!
অথচো দুনিয়ায় মাত্র ২ সেকেন্ডে পড়তে পারি "সুবহানআল্লাহ"

কথার ফাঁকে, কাজের ফাঁকে যখনি মনে হবে
রাস্তায় হাঁটতেছেন? সময়টা কাজে লাগান
পড়ুন সুবহানআল্লাহ, আলহামদুলিল্লাহ
কেয়ামতের মাঠে বুঝবেন এটার কতো দাম!
আর নামাজ রোজা.....?

নামাজের কোনোই বিকল্প নাই
বাসায়, অফিসে, বনে, সাগরে, দোকানে
মানে আপনি যেখানেই থাকেন না কেনো নামাজ পড়তে হবেই হবে
যে আল্লাহ আপনাকে আমাকে ২৪ ঘন্টা বাঁচিয়ে রাখছেন
তার ইবাদাতে কি মাত্র ১ ঘন্টাও দিতে পারি না...?
নামাজ পড়লেও আপনার দিন যাবে, না পড়লেও দিন চলে যাবে!
কিন্তু বেলা শেষে সবাই ধরা, হিসাব দিতেই হবে!
যদি না মরে থাকা যেতো তাহলে না পড়তেন!
কিন্তু কোনো উপায় নাই, কোনো বিকল্প নাই
কেয়ামতের মাঠে প্রতিটা দিনের হিসাব দিতে হবে
সুতরাং আর অবহেলা নয়, সময়কে কাজে লাগান
সময় থাকতে বুঝুন, পরে বুঝে কোনোই লাভ নাই

নামাজে অলসতা করলে অলসতা, পড়লে কিছুই না, ১ ওয়াক্ত
নামাজ পড়তে মাত্র ১০-১৫ মিনিট লাগে!

রাজনীতি শব্দের অর্থ «রাষ্ট্র পরিচালনার নীতি»

ইসলামে কি রাষ্ট্র পরিচালনার নীতি নাই...?

আব্বাহ «ওয়াকিমুস সালাত» বলছে

সেই আব্বাহই বলছে «ওয়াকিমুত দ্বীন»

মানে «দ্বীন-ইসলাম কায়েম করো»

(সূরা শূরা:৫০)

প্রথমটা মানেন ২য় টা মানেন না কেনো?

আপনার ধর্ম যদি «ইসলাম» হয়.....

তাহলে কেনো ইসলামী সমাজ কায়েমের কাজ করছেন না?

রাসুল সাঃ ইসলামী রাষ্ট্র কায়েম করে গেছেন

আমাদেরও ইসলামী রাষ্ট্র কায়েমের চেষ্টা করা ফরজ

নামাজ ও পড়ার কথা একবারও বলা হয় নি!!

প্রত্যেকবার একটাই কথা «সালাত কায়েম করো»

মানে সামাজিক ও রাষ্ট্রীয়ভাবে সালাত কায়েম করো

তাই আসুন সমাজের সকল অনাচার অশ্লীলতা

ঘুষ, দুর্নীতি দূর করে ইসলামী সমাজ বিনির্মাণ করি

ইসলামী সমাজে সবার নিজ নিজ ধর্ম পালনের স্বাধীনতা আছে

ইসলাম কিন্তু শুধু কিছু ইবাদাতের নাম নয়!

মানবজীবনের ব্যক্তিগত, পারিবারিক, সামাজিক, রাজনৈতিক, অর্থনৈতিক সকল দিক ইসলামে আছে। মানে ইসলাম কোনো ইবাদাতের নাম নয়, ইসলাম একটা জীবনব্যবস্থা।

কারণ আল্লাহই বলছে, "ইন্নাদ্দীনা ইন্দাল্লাহিল ইসলাম"

"নিঃসন্দেহে জীবনবিধান হিসাবে আল্লাহর উপর একমাত্র গ্রহণযোগ্য হল ইসলাম"

(সূরা আল ইমরান, আয়াত-১৯)

মানুষকে বাহকেরা নিজেদের ইনসার্খ চরিতার্থের জন্যে ধর্ম ও রাজনীতিকে নিষ্ঠুরভাবে বিস্তৃত করে রাষ্ট্র ও সমাজ থেকে আল্লাহর আনুগত্যকে এবং আল্লাহর দেওয়া শাসনতন্ত্রকে দূরে সরিয়ে রেখে নিজেদের মনগড়া শাসনতন্ত্র অনুযায়ী মানুষকে পরিচালনা করে। তারা রাসূলুল্লাহকে (স.) নেতা হিসেবে না মেনে, রাসূলের (স.) আদর্শকে গ্রহণ না করে, গ্রহণ করে নেয় রাসূলুল্লাহর (স.) নেতৃত্বের সাথে সামঞ্জস্যহীন নেতার নেতৃত্ব এবং রাসূলুল্লাহর আদর্শের সাথে সাংঘর্ষিক আদর্শ গ্রহণ করে নিয়ে রাষ্ট্র, সমাজ ও মানুষকে শোষণ করে। তাই যারা কালিমায়ে তায়্যিবায বিশ্বাসী, তারা এসব নেতা-নেত্রীদেরকে মানতে পারে না। তাদের আদর্শকে গ্রহণ করতে পারে না। এমনকি আল্লাহর দেওয়া জীবনবিধান ছাড়া অন্যকোন বিধানের আনুগত্যও করতে পারে না। মহান রাক্বুল আলামীন ঘোষণা করেছেন-

أَفَغَيْرِ دِينِ اللَّهِ يَبْغُونَ وَلَهُ أَسْلَمَ مَنْ فِي السَّمَوَاتِ
وَالْأَرْضِ طَوْعًا وَكَرْهًا وَإِلَيْهِ يُرْجَعُونَ-

"মানুষ কি আল্লাহর দেওয়া জীবনবিধান ছাড়া অন্যকোন জীবনবিধান গ্রহণ করতে চায়? অথচ আকাশ ও পৃথিবীর প্রত্যেকটি জিনিস ইচ্ছায় হোক, অনিচ্ছায় হোক তাঁরই আনুগত্য করছে এবং তাঁরই দিকে প্রত্যাবর্তন করবে।" (সূরা আল ইমরান, আয়াত : ৮৩)

অন্যত্র আল্লাহ ঘোষণা করেছেন-

وَمَنْ يَتَّبِعْ غَيْرَ الْإِسْلَامِ دِينًا فَلَنْ يُقْبَلَ مِنْهُ-

"যে আল্লাহর দেওয়া ইসলামী জীবনাদর্শ ছাড়া অন্যকোন জীবনাদর্শ গ্রহণ করে, আল্লাহ তার সেই দীনকে কিছুতেই কবুল করবেন না।" (সূরা আল ইমরান, আয়াত : ৮৫)

আপনি যদি সত্যই আল্লাহ, রাসূলুল্লাহ সাঃ, কোরআন বিশ্বাস করেন তাহলে ইসলামের কিছু অংশ মানেন কিছু অংশ মানবেন না কেনো? আমরা যে অংশ নিজের অনুকূলে সেটা মানছি!! আর যেটা আমাদের স্বার্থের পথে বাধা সেটাকে অস্বীকার করছি!! দেখুন আল্লাহ সুবহানু তায়লা কি বলে.....

অর্থ : “যে ব্যক্তি ইসলাম ছাড়া অন্যকোন জীবনবিধান ভালোপ করে, কস্মিনকালেও তা গ্রহণ করা হবে না।” (সূরা আল-ইমরান, আয়াত : ৮৫)

اَفْتَوِمُنُونَ بِنَعْصِ الْكِتَابِ وَتَكْفُرُونَ فَمَا جَزَاءُ مَنْ
يَفْعَلُ ذَلِكَ مِنْكُمْ اِلَّا خِزْيٌ فِي الْحَيَاةِ الدُّنْيَا وَ يَوْمَ الْقِيَامَةِ
يُرَدُّونَ اِلَى اَشَدِّ الْعَذَابِ -

অর্থ : “তোমরা কি বিধানের কিছু অংশ বিশ্বাস কর, আর কিছু অংশ অবিশ্বাস কর! যারা এরূপ করে, পার্থিব জীবনে দুর্গতি ছাড়া তাদের আর কোনই পথ নেই। কিয়ামতের দিন তাদেরকে কঠোরতম শাস্তির দিকে পৌছে দেওয়া হবে।” (সূরা বাকারা, আয়াত : ৮৫)

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا ادْخُلُوا فِي السِّلْمِ كَافَّةً وَلَا تَتَّبِعُوا خُطُوَاتِ الشَّيْطَانِ

অর্থ : “হে ঈমানদারগণ! তোমরা পরিপূর্ণভাবে ইসলামে অন্তর্ভুক্ত হয়ে যাও এবং শয়তানের পদাঙ্ক অনুসরণ করো না।” (সূরা বাকারা, আয়াত : ২০৮)

অতএব ইসলামী বিধানকে পুরোপুরিভাবে গ্রহণ করলেই পুরোপুরি মুসলমান হওয়া যাবে। নয়তো কাকের, মুনাক্কেব, ফাসেক অথবা জালেম হিসেবেই মন্তাবরণ করে জাহান্নামী হতে হবে।

ইসলাম এমন এক জীবনব্যবস্থা যা জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে সুন্দরভাবে অনুসরণ করা যায়। অতএব জীবনের কোন ক্ষেত্রেই ইসলামী বিধান ত্যাগ করার কোন সুযোগ নেই। যারা বিভিন্ন অজুহাতে ব্যক্তি, সমাজ বা রাষ্ট্রীয় জীবনের কোন ক্ষেত্রে ইসলামের বিধানকে বর্জন করে, তারা প্রকৃত মুসলমান নয়। কিন্তু আজ আমরা শুধু ব্যক্তিজীবনে সুনির্দিষ্ট কিছু ইবাদত ছাড়া বাকি জীবনের বৃহত্তর পরিসর-সমাজ ও রাষ্ট্রে ইসলামী বিধান বর্জন করে চলছি। এসব অপূর্ণতা

যারা আল্লাহ রাসুল আলামীনকে একমাত্র ইলাহ বলে বিশ্বাস করে তাদেরকে অবশ্যই আল্লাহর দেওয়া পূর্ণাঙ্গ জীবনব্যবস্থাকে মানতে হবে এবং তার আলোকে জীবন পরিচালনা করতে হবে। আর আল্লাহরদর এই ইসলামী জীবনবিধান ছাড়া যদি কেউ ভিন্ন কোন মতাদর্শ ও বিধানকে গ্রহণ করে, তাহলে তারা যেমন দুনিয়ায় শান্তির আশা করতে পারে না, তেমনই পরকালেও মুক্তি পাবে না। ইসলামী জীবনানর্শের বাইরে আল্লাহ কিছুই গ্রহণ করবেন না। এ ব্যাপারে কুরআনের ঘোষণা হল—

وَمَنْ يَتَّبِعْ غَيْرَ الْإِسْلَامِ دِينًا فَلَنْ يُقْبَلَ مِنْهُ

“যে ইসলাম ছাড়া অন্যকোন জীবনাদর্শ অনুসন্ধান করে, তা কিছুতেই গ্রহণ করা হবে না।” (সূরা আল ইমরান, আয়াত : ৮৫)

আর শুধু মুখে মুখে ইসলামকে গ্রহণ করলেই মুক্তি পাওয়া যাবে না, শান্তি পাওয়া যাবে না। বরং পূর্ণাঙ্গভাবে ইসলামী জীবনাদর্শকে গ্রহণ করতে হবে। পরিপূর্ণভাবে ইসলামী বিধানের আনুগত্য করতে হবে। ব্যক্তিজীবন থেকে নিয়ে সমাজ রাষ্ট্র পরিবার ও আন্তর্জাতিক পর্যায় পর্যন্ত জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে ইসলামী জীবনব্যবস্থার পূর্ণাঙ্গ অনুসরণের সর্বাত্মক প্রচেষ্টা চালাতে হবে। শুধু কিছু ইবাদতের ক্ষেত্রেই নয়; বরং ইসলামকে একটি পরিপূর্ণ জীবনাদর্শ হিসেবে গ্রহণ করতে হবে জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে। জীবন পরিচালনার কোন অংশেই ইসলামী বিধানকে অচল ও অনুপযোগী মনে করা যাবে না। শুধু তাই নয়; বরং জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে ইসলামকে একমাত্র বিজয়ী আদর্শ হিসেবে প্রতিষ্ঠা করার সর্বোচ্চ প্রচেষ্টা চালাতে হবে। তবেই পরিপূর্ণভাবে ইসলামে প্রবেশ করা যাবে। আল্লাহ রাসুল আলামীন পবিত্র কুরআনে ঘোষণা করেছেন—

ادْخُلُوا فِي السِّلْمِ كَافَّةً وَلَا تَتَّبِعُوا خُطُوَاتِ الشَّيْطَانِ

“তোমরা পরিপূর্ণভাবে ইসলামে প্রবেশ কর এবং শয়তানের পদাংক অনুসরণ করো না।” (সূরা বাকারা, আয়াত : ২০৮)

তাই আজ আমাদেরকে একজন মুসলমান হিসেবে পত্তীরভাবে ভেবে দেখতে হবে, আমাদের জীবনে আমরা পূর্ণাঙ্গভাবে ইসলামের অনুসরণ করতে প্রস্তুত রয়েছি কিনা। জীবনে শান্তি ও মুক্তি পেতে হলে বিষয়টি অবশ্যই ভেবে দেখতে হবে। একুশ শতাব্দীতে আমরা যদি ইসলামের পূর্ণাঙ্গ অনুসরণে সচেষ্ট হতাম, তাহলে কোথাও অশান্তি থাকত না। কারণ মহান আল্লাহ ইসলামকে একমাত্র জীবনবিধান হিসেবে নির্ধারিত করেছেন। আর আমরা আজ এই শান্তি আদর্শকে ছেড়ে মিথ্যা

শুধু মুখে মুসলমান দাবি করলেই আল্লাহর পথের যাত্রী হওয়া যায় না। যারা আল্লাহর বিধানকে অস্বীকার করে, আল্লাহর ক্ষমতাকে অস্বীকার করে মানুষের জন্য নিজেরাই বিধান রচনা করে, ইসলামী জীবনাদর্শের পরিবর্তে ইহুদী-নাসারা ও মুশরেকদের গড়া মতবাদ তথা, পুঁজিবাদী গণতন্ত্র, সমাজতন্ত্র ও ধর্মনিরপেক্ষতাবাদ প্রতিষ্ঠা করতে চায়, আল্লাহ এবং আল্লাহর রাসূল (স.) যা হালাল করেন, যারা তা হারাম করে এবং আল্লাহ ও তাঁর রাসূলের হারামকৃত বস্তু যারা হালাল করে, তারা নিজেরা শত সহস্রবার মুসলমান দাবি করলেও প্রকৃতপক্ষে তারা শয়তানের পথযাত্রী। আর তাদেরকে যারা সহযোগিতা করে, সমর্থন করে, তাদের সাথে আপস করে, তারাও একই পথের পথিক।

এই সহজ সরল সমীকরণের পর আমাদের ভেবে দেখতে হবে, আমরা কোন পথের যাত্রী। আমাদের মাঝে থেকেই আবার অজ্ঞতা ও অসতর্কতা বশত আল্লাহর প্রদর্শিত যুক্তির রাজপথ থেকে বিচ্যুত হয়ে বিপথগামী হয়ে গেছে অনেকেই। কিন্তু এ কথা ভুলে গেলে চলবে না, আল্লাহ কাউকেই ছাড়বেন না। আমাদের সকলের জন্যই এমন এক সময় অপেক্ষা করছে, যখন কোন অজুহাত গ্রহণযোগ্য হবে না। কোন গোজামিল দিয়ে পার পাওয়া যাবে না। বড় দল, বড় নেতা, জননেত্রী, আপসহীন নেত্রী, দেশনেত্রী কেউ আমাদেরকে রক্ষা করতে পারবে না। বরং সকলকেই নিজ নিজ কর্মকাণ্ডের জন্য জবাবদিহি করতে হবে। যারা আনাদর্শের নেতৃত্ব দিচ্ছে তারাও রেহাই পাবে না।

আজ দুনিয়াতে যারা সেসব নেতা-নেত্রীর সমর্থন করছে, বিচারদিবসে তারাই তাদের বিরুদ্ধে দাঁড়াবে। এ প্রসঙ্গে পবিত্র কুরআনের ঘোষণা হল—

وَقَالُوا رَبَّنَا إِنَّا أَطَعْنَا سَادَتَنَا وَكُبَرَاءَنَا فَأَضَلُّوَنَا الْسَّبِيلَ رَبَّنَا اتِّخَذْهُمْ
ضِعْفَيْنِ مِنَ الْعَذَابِ وَالْعَنَهُمُ لَعْنَا كَبِيرًا

“লোকেরা বলবে—হে আমাদের রব, আমরা দুনিয়ায় আমাদের নেতৃবৃন্দের ও বড়দের আনুগত্য করেছি। ফলে তারা আমাদেরকে পথভ্রষ্ট করেছে। অতএব হে প্রভু, তুমি আজ তাদেরকে দ্বিগুণ আযাব দাও এবং তোমার রহমত থেকে তাদেরকে বহু দূরে সরিয়ে দাও।” (সূরা আহযাব, আয়াত : ৬৭, ৬৮)

এর এক আয়াতে বলা হয়েছে—

إِذْ تَبَرَّأَ الَّذِينَ اتَّبَعُوا مِنَ الَّذِينَ اتَّبَعُوا وَرَأَوْا الْعَذَابَ وَتَقَطَّعَتْ بِهِمُ الْأَسْبَابُ
وَقَالَ الَّذِينَ اتَّبَعُوا لَوْ أَنَّا لَنَّا كَرَّةً فَتَتَّبَرَّأُ مِنْهُمْ كَمَا تَبَرَّأُوا مِنَّا

“আল্লাহ যখন শাস্তি দিবেন, তখন এমন এক অবস্থা দেখা দিবে যে, দুনিয়াতে যেসব নেতা ও প্রধান ব্যক্তির অনুসরণ করা হতো, তারা নিজ অনুসারীদের সাথে সকল সম্পর্ক ছিন্ন হওয়ার কথা ঘোষণা করবে। কিন্তু তা সত্ত্বেও তারা অবশ্যই অনুসারীরা বলবে, হায়! আমাদেরকে আবার যদি সুযোগ দেওয়া হতো, তাহলে আজ এরা যেমন আমাদের সাথে সম্পর্ক ছিন্ন করে নিজেদের দায়িত্বহীন থাকার কথা ঘোষণা করছে, আমরাও তাদের সাথে সকল সম্পর্ক ছিন্ন করে দেখিয়ে দিতাম।” (সূরা বাকারা, আয়াত : ১৬৬-১৬৭)

إِنَّمَا تُجْزَوْنَ مَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ (৬৬ : ৭)

নিশ্চয়ই তোমরা যে সব নাকরমানির কাজ করিয়াছিলো তাহার সাজা দেওয়া হইবে। তাই কোন ওজর আপত্তি চলিবে না।

ثُمَّ إِنَّكُمْ إِلَيْهَا الصَّائِرُونَ الْمُكَذِّبُونَ (৩য়াকোয়া : ৫১)

ওহে গোমরাহ ও মিথ্যাবাদীগণ। নিশ্চয়ই তোমরা গোমরাহীর মধ্যে ছিলো আর হক চিত্তকে খুট বলিতো।

لَا تَكِلُونَ مِنْ شَجَرٍ مِّنْ زُكُومٍ (ঐ ৫২)

অতএব, এই কারণে দোষখের মধ্যে তোমাদিগকে যাক্কুম (সেজা গাছের মত কাটাওয়ালা) গাছ খাইতে হইবে।

আল্লাহ পাক দোষখী লোকদিগকে এত ক্ষুধা দান করিবেন যেন, ক্ষুধার ভাড়া সহ্য করিতে পারিবে না, তাই ঐ কাটাওয়ালা সেজা গাছ খাইয়া পেট পূর্ণ করিবে।

فَسَارِبُونَ عَلَيْهِ مِنَ الْحَمِيمِ (ঐ ৫৩)

ঐ যাক্কুম খাওয়ার পর তাহারা আবার অতিশয় গরম পানি পান করিবে। তাহা এতই গরম হইবে যে পেয়ালার মধ্যে পানি টপকগ করিয়া ফুটিতে থাকিবে। ঐ পানি যখন মুখের নিকটে নিবে, চেহারার সমস্ত পোশত জ্বলা হইয়া ঐ পেয়ালায় পড়িয়া যাইবে। দোষখিগণের এত পিপাসা হইবে যে, কলিজা জ্বলা জ্বলা হইয়া যাইবে, তাই প্রাণ বাঁচাইবার জন্য ঐ পানিও পান করিবে। সঙ্গে সঙ্গে জিহ্বা আঁতুড়ী সব গলিয়া পায়খানার রাস্তা দিয়া পড়িয়া যাইবে, তবু মৃত্যু হইবে না, আর পিপাসাও কমিবে না। ২৭

যারা কাফের, যদি তাদের কাছে পৃথিবীর সমুদয় সম্পদ এবং তৎসহ আরও তদনুরূপ সম্পদ থাকে আর এগুলোর বিনিময়ে কিয়ামতের শাস্তি থেকে পরিত্রান পেতে চায়, তবুও তাদের কাছ থেকে তা কবুল করা হবে না। তাদের জন্য যন্ত্রণাদায়ক শাস্তি রয়েছে। তারা দোষখের আগুন থেকে বের হয়ে আসতে চাইবে কিন্তু তা থেকে বের হতে পারবে না। তারা চিরস্থায়ী শাস্তি ভোগ করবে। (সূরা মায়েদা: ৩৬-৩৭)

সূরায় যুমারের মধ্যে আয়াহ পাক এরশাদ ফরমাইয়াছেন :

أَتَقُولُ حِينَ تَرَى الْعَذَابَ لَوْ أَنَّ لِي كَرَّةً فَأَكُونَ مِنَ الْمُحْسِنِينَ -

(যুমার : ৫৮)

যাহারা আখেরাতের উপর বিশ্বাস করে নাই, আমলও করে নাই, “যখন তাহারা ভীষণ আযাব দেখিবে, তখন বলিবে- মাবুদ! যদি আমাদের দ্বিতীয় বার দুনিয়াতে পাঠাইতেন, আমরা নেককার পরহেজগার হইয়া আসিতাম, বরং একটি নেকের কাজও ছাড়িতাম না।

بَلَىٰ قَدْ جَاءَكَ آيَتِي فَكَذَّبْتَ بِهَا (যুমার : ৫৯)

মাবুদ উত্তর করিবেন, হাঁ, তোমাদের নিকট আমার কলাম-কুরআন শরীফ পাঠাইয়াছিলাম তখন তাহাকে মিথ্যা মনে করিয়াছ।

وَأَسْكَبْتَ وَكُنْتَ مِنَ الْكَافِرِينَ ۝

আর অহংকার ও তাকাক্বুরী করিয়া নাকরমান সাগিয়াছ। এখন আর দুনিয়াতে বাহিতে পারিবা না।

وَيَوْمَ الْقِيَامَةِ تَرَى الَّذِينَ كَذَبُوا عَلَى اللَّهِ (ঐ : ৬০)

ওহে আমার হাবীব! আপনি ঐ হাশরের দিবসে দেখিবেন, যাহারা মিথ্যা বলিয়াছে আমার উপর وَجَّهَهُمْ مُّسَوِّدَةٌ তাহাদের মুখমস্তন অতি কাল ও কুণ্ডলিত। যাহারা আমার সঙ্গে তাকাক্বুরী করিয়াছে, ইসলামের হুকুম মানে নাই, তাহাদের জন্য কি ঐ দোযখ ঠিকানা হইবে না? নিশ্চয়ই হইবে। لَهُمْ مِنْ قَوْفِهِمْ كُلُّ مِثْلِ ۝ ঐ নাকরমানগণের উপর দোযখের মধ্যে মেঘ আসিয়া ছায়া দিবে। যখন তাহারা দেখিবে, মেঘ আসিতেছে তখন মনে আনন্দ পাইবে আর বলিবে দোযখের মধ্যে নিক্ষিপ্ত হইবার পর হইতে আর মেঘ দেখি নাই, এখন বুঝি আমাদের উপর দয়া হইয়াছে, সম্ভবতঃ বৃষ্টি হইবে। সঙ্গে সঙ্গে দেখিবে মেঘ হইতে গরম আসিতেছে। মনে করিয়াছিল ঐ মেঘের ছায়া পাইয়া কিছু শান্তি পাইবে, কিন্তু দেখিবে ছায়া সব আগুন হইয়া গিয়াছে এবং আযাবের উপর ডবল আযাব শুরু হইয়াছে।

"যারা অবাধ্য হয়, তাদের ঠিকানা জাহান্নাম | যখনই তারা জাহান্নাম থেকে বের হতে চাইবে, তখনই তাদেরকে তথায় ফিরিয়ে দেয়া হবে এবং তাদেরকে বলা হবে, তোমরা জাহান্নামের আযাবকে মিথ্যা বলতে, এখন তার স্বাদ আস্বাদন কর" (সূরা আস সেজদাহ-২০)

মুসলমান মানেই আপনার আমার সবারই ইচ্ছা হয় জান্নাতে যাওয়ার, আমরা কেউ কিন্তু জাহান্নামে যেতে চাই না!

কিন্তু কেনো আমরা গুণাহের কাজ ছাড়তে পারি না, কেনো নেকের কাজ ধরতে পারি না?

কারণ শয়তান ও নফস সারাক্ষণ আপনার আমার পিছনে লেগে রইছে কিভাবে আমাদের জাহান্নামে নেওয়া যায়!

শয়তান এবং নফসের হাত থেকে বাঁচার জন্য যেকোনো একজন হক্কানী আল্লাহর ওলির সান্নিধ্য দরকার! সাহাবীরা যেমন রাসূল সাঃ এর সংস্পর্শে খাঁটি মানুষে পরিণত কয়েছিলেন! এ যুগে রাসূল নেই এবং আলেমরাই রাসূল সাঃ এর উত্তরসূরী (হাদীস) সুতরাং নিজে নিজে যদি ইসলাম পরিপূর্ণ মানতে না পারেন তাহলে একজন আল্লাহওয়ালার সংস্পর্শে যান |

আমি চরমোনাই পীর সাহেবের সংস্পর্শে যাওয়ার জন্য সাজেস্ট করবো! উনাদেরও সমালোচনা আছে তবে উনাদের সংস্পর্শে, উনাদের উছিলায় লাখ লাখ বেনামাজি নামাজি হচ্ছে, বেরোজদারী রোজা রাখছে, দাঁড়িবিহীন দাঁড়ি রাখছে | আল্লাহ চাহেতু আল্লাহ আপনাকেও হেদায়াত দিতে পারেন!

প্রতি বছর ২ বার চরমোনাই বার্ষিক মাহফিল হয়! ফেব্রুয়ারি আর নভেম্বর মাসে! ৩ দিন ব্যাপী মাহফিল! লাখলাখ আল্লাহপ্রেমীরা জড়ো হয় | করজোড়ে অনুরোধে করবো জীবনে একবার হলেও অন্তত দেখার জন্য হলেও যাবেন |

ভাইয়েরা, বুঝার সুযোগ কিন্তু দুনিয়ায়

মৃত্যুর পর কিন্তু বুঝার কোনোই সুযোগ নাই

পরকালে প্রতিটা পাপী দুনিয়ায় ফিরে আসতে কাকুতিমিনতি করবে

কিন্তু আর সুযোগ দেওয়া হবে না!

নিশ্চয়ই আল্লাহ তাঁর অঙ্গীকার ভঙ্গ করবেন না

আজ থেকে ১০০ বছর পরে আপনার আমার কোনো ছিন্নও থাকবে না

তাহলে কি দরকার দুনিয়ার এসব রংতামাশা.....???

দুনিয়ার জীবন কিন্তু একটাই, বুঝারও সময় একবারই

অন্য ধর্মের ভাইবোনদেরকে ও বলবো ভাই, জীবন কিন্তু একবারই!

সুতরাং ধর্ম নিয়ে গবেষণা করুন, সত্যমিথ্যা যাচাই করুন!

ইসলাম বিশেষত মুহাম্মদ সাঃ এবং কোরআনুল কারীম নিয়ে যারা
গবেষণা করে মুসলিম হচ্ছেন, তাঁরা কেনো মুসলিম হচ্ছেন এই
"কেনো"র জবাব খুঁজুন

অন্যান্য ধর্মকে কেউ অস্বীকার করে না!

সর্বশেষ মহামানব মানবতার মুক্তির দিশারী হযরত মুহাম্মদ
সাঃ এর মাধ্যমে অতীতের ধর্মগুলো রহিত হয়ে গেছে

সৃষ্টিকর্তা সবার মঙ্গল করুক

আমার এই ফাইলটা কমপক্ষে ৫০,০০০+ ডাউনলোড হবে তাই কিছু
অতিজরুরী কথা লিখলাম! কেউ মনে কষ্ট পেলে ক্ষমা করে দিবেন

**অবশ্য মনে রাখবেন অন্যর ধর্মে আঘাত করা যাবে না
রাসূল সাঃ ধর্ম নিয়ে বাড়াবাড়ি নিষেধ করেছেন**

সবাই যদি নিজ নিজ ধর্ম পালন করে তবে সমাজে কোনো অশান্তি থাকে না

তথাকথিত জর্জীবাদ কে "না" বলুন

বিনা অপরাধে মানুষ হত্যার বিন্দুমাত্র ধর্মীয় ভিত্তি নেই
হত্যা তো দূরে থাক কোনোরূপ হিংসা ও করা যাবে না

মনে রাখবেন, মানুষের জন্য ধর্ম, ধর্মের জন্য মানুষ নয়

**রাসূল সাঃ বলাচ্ছে প্রতিবেশী যদি অমুসলিমও হয়
তাকে সাহায্য করতে হবে, অসুস্থ হলে সেবা করতে হবে
তবে হ্যাঁ আপনি বুঝাতে পারেন ইসলামই একমাত্র সঠিক ধর্ম**

আর সবসময় মনে রাখবেন:

**সবার উপরে মানুষ সত্য, তাহার উপরে নাই
যে কেউ বিপদে পড়লে ধর্ম না দেখে সাহায্য করুন**

সবার আগে মানবধর্ম

আসুন সবাই সবাইকে ভালোবাসি

দুনিয়া ও আখিরাতে শান্তিতে থাকি

BCS Bank

PDF বইয়ের অনলাইন লাইব্রেরী

MyMahbub.Com

"যে ব্যক্তিকে তার পালনকর্তার আয়াতসমূহ দ্বারা উপদেশ দান করা হয় অতঃপর সে তা থেকে মুখ ফিরিয়ে নেয়, তার চেয়ে জালিম আর কে?

নিঃসন্দেহে আমি তাদের কাছ থেকে প্রতিশোধ নেব" (সূরা আস সেজদাহ-২২)

"যারা অবাধ্য হয়, তাদের ঠিকানা জাহান্নাম | যখনই তারা জাহান্নাম থেকে বের হতে চাইবে, তখনই তাদেরকে তথায় ফিরিয়ে দেয়া হবে এবং তাদেরকে বলা হবে, তোমরা জাহান্নামের আযাবকে মিথ্যা বলতে, এখন তার স্বাদ আস্বাদন কর" (সূরা আস সেজদাহ-২০)

সব ধরনের ই-বুক ডাউনলোডের জন্য

MyMahbub.Com